FINAL 2011

Exercice 2

On veut trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\,(x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\quad x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2(x^2+y^2)f(x,y)\quad(*)$$

Pour cela, on va faire le changement de variables $u=\frac{y}{x}$ et $v=x^2+y^2$. Dans les questions 1 à 6, on considère une solution f d'un tel problème.

1) Justifier que l'application qui à (x,y) associe (u,v) est une bijection de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur un ensemble Ω qu'on déterminera. Expliciter la réciproque φ de cette bijection.

• Pour $(x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, $(u,v)=(\frac{y}{x},x^2+y^2)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$. Montrons que l'application ψ définie de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ dans $\Omega=\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et qui à (x,y) associe (u,v) est une bijection. Pour cela, vérifions que pour tout couple $(u_0,v_0)\in\Omega$, il existe un unique couple $(x_0,y_0)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ tel que $\psi(x_0,y_0)=(u_0,v_0)$: on a

$$\begin{array}{l}\forall\,(x_0,y_0)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\\ \forall\,(u_0,v_0)\in\Omega,\end{array}\qquad \left\{\begin{array}{l}u_0=\frac{y_0}{x_0}\\ v_0=x_0^2+y_0^2\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}y_0=u_0x_0\\ v_0=x_0^2(1+u_0^2)\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}y_0=u_0x_0\\ x_0^2=\frac{v_0}{1+u_0^2}\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}y_0=u_0\sqrt{\frac{v_0}{1+u_0^2}}\\ x_0=\sqrt{\frac{v_0}{1+u_0^2}}\end{array}\right.$$

Donc ψ est bijective et on a pour tout $(u,v)\in\Omega$, $\varphi(u,v)=\psi^{-1}(u,v)=\left(\sqrt{\dfrac{v}{1+u^2}},u\sqrt{\dfrac{v}{1+u^2}}\right)$.

---

2) On définit la fonction g sur Ω par $g(u,v)=f(\varphi(u,v))=f(x,y)$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

• Compte tenu de son expression, la fonction $(u,v)\to\frac{v}{1+u^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans $]0,+\infty[$ donc comme $\sqrt{\ }$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, $(u,v)\to\sqrt{\frac{v}{1+u^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω car ses applications composantes le sont. $g=f\circ\varphi$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω par composition.

---

3) Par définition, $\forall(x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, $f(x,y)=g(\frac{y}{x},x^2+y^2)$. Calculer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g et en déduire une équation aux dérivées partielles sur g ne faisant intervenir que les variables u et v.

• Pour tout $(x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, $f(x,y)=g(\frac{y}{x},x^2+y^2)$ donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{-y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u}(\frac{y}{x},x^2+y^2)+2x\frac{\partial g}{\partial v}(\frac{y}{x},x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial u}(\frac{y}{x},x^2+y^2)+2y\frac{\partial g}{\partial v}(\frac{y}{x},x^2+y^2)$$

donc

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x^2\frac{\partial g}{\partial v}(\frac{y}{x},x^2+y^2)+2y^2\frac{\partial g}{\partial v}(\frac{y}{x},x^2+y^2)=2v\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$$

Comme $\forall\,(x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, $x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2(x^2+y^2)f(x,y)$, on en déduit que $\forall(u,v)\in\Omega$,

$$2v\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=vg(u,v)\qquad\text{ou encore, comme } v>0 \text{ sur } \Omega,\qquad\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=g(u,v)$$

---

4) On fixe ici $u\in\mathbb{R}$ et on définit pour v appartenant à un intervalle K à préciser, $\theta(v)=g(u,v)$. Quelle équation vérifie la fonction θ ?

• Soit $u \in \mathbb{R}$ fixé. Posons pour tout $v \in K =]0, +\infty[$, $\theta(v) = g(u, v)$. On a alors, d'après Q3,

$$\forall\, v \in K, \quad \theta'(v) = \theta(v)$$

---

5) Montrer alors qu'il existe $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall\,(x, y) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R},\ f(x, y) = h(\frac{y}{x})e^{x^2+y^2}$.

• L'équa. diff. linéaire du premier ordre sur θ est immédiate à résoudre: il existe $\lambda_u \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $v \in K$, $\theta(v) = \lambda_u e^v$. Notons h l'application définie sur $\mathbb{R}$ qui à u associe $\lambda_u = e^{-v}\theta(v) = e^{-v}g(u, v)$. Compte tenu de cette expression, h et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. On a donc $\forall\,(u, v) \in \Omega$, $g(u, v) = h(u)e^v$ et donc

$$\forall\,(x, y) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}, \quad f(x, y) = g(u, v) = h(u)e^v = h(\frac{y}{x})e^{x^2+y^2}$$

---

6) Montrer que si f s'annule en un point, alors elle s'annule sur toute une demi-droite. Que dire alors du vecteur gradient en ces points ?

• Soit $(a, b) \in]0, +\infty[$ tel que $f(a, b) = 0$ i.e $h(\frac{b}{a})e^{a^2+b^2} = 0$ soit encore $h(\frac{b}{a}) = 0$. Alors pour tout $\lambda > 0$, $f(\lambda a, \lambda b) = h(\frac{\lambda a}{\lambda b})e^{\lambda^2(a^2+b^2)} = 0$. Donc f s'annule sur toute la demi-droite passant par $(0, 0)$ et (a, b). En un tel point (a, b), d'aprés (*), on a

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + b\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = < a\vec{i} + b\vec{j}\,,\ \overrightarrow{\text{grad}\, f}(a, b) > = 0$$

donc $\overrightarrow{\text{grad}\, f}(a, b)$ est orthogonal au vecteur de coordonnées (a, b) donc à la demi-droite en question.

---

7) Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère la fonction $(x, y) \to f(x, y) = h(\frac{y}{x})e^{x^2+y^2}$ qui est définie sur $A = \mathbb{R}^2\backslash\{(0, a), a \in \mathbb{R}\}$ et qui vérifie naturellement l'équation $(*)$ sur A. On cherche des conditions sur la fonction h pour que f se prolonge en une solution de classe $\mathcal{C}^1$ de $(*)$ sur un domaine plus grand que A.

a) Montrer que f est prolongeable par continuité en $(0, 0)$ ssi h est constante.

• Si h est constante $(= \lambda)$, $(x, y) \to f(x, y) = \lambda e^{x^2+y^2}$ est trivialement prolongeable à $\mathbb{R}^2$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Inversement, si f est prolongeable par continuité en $(0, 0)$ avec $f(0, 0) = \lambda$, pour tout $m \in \mathbb{R}$, on doit avoir $\lim_{t\to 0^+} f(t, mt) = f(0, 0) = \lambda$ ce qui donne $\lim_{t\to 0^+} h(m)e^{t^2(1+m^2)} = \lambda$ i.e $h(m) = \lambda$. Donc h doit être constante.

---

b) De manière plus générale, déterminer les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ de $(*)$ sur $\mathbb{R}^2$.

• Si f est solution de $(*)$ sur $\mathbb{R}^2$, elle est solution sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ et sur $]-\infty, 0[\times\mathbb{R}$. Il existe donc h_1, h_2 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall(x, y) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}$, $f(x, y) = h_1(\frac{y}{x})e^{x^2+y^2}$ et $\forall(x, y) \in]-\infty, 0[\times\mathbb{R}$, $f(x, y) = h_2(\frac{y}{x})e^{x^2+y^2}$ (même résolution !). Par le même argument qu'en a), la continuité en $(0, 0)$ impose h_1 constante égale à $f(0, 0)$. Idem pour h_2. Donc $h_1 = h_2 = f(0, 0)$. Les seules solutions possibles sont donc $(x, y) \to f(x, y) = \lambda e^{x^2+y^2}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Inversement, ces fonctions conviennent évidemment.

---

c) Montrer que f est prolongeable par continuité en $(0, a)$ avec $a \neq 0$ ssi h vérifie une condition simple que l'on déterminera.

• Si f est prolongeable en $(0, a)$ par $f(0, a) = \lambda$, on doit avoir $\lim_{t\to 0^+} f(t, a) = \lim_{t\to 0^-} f(t, a) = \lambda$. Comme $f(t, a) = h(\frac{a}{t})e^{t^2+a^2} \sim_0 h(\frac{a}{t})e^{a^2}$, cela impose que h ait la même limite en $\pm\infty$ $(= \lambda e^{-a^2})$. Inversement, si h a la même limite finie k en $\pm\infty$, alors si $(x, y) \to (0, a)$, $|\frac{y}{x}| \to +\infty$ et donc $f(x, y) \to ke^{a^2}$. On peut donc prolonger f en $(0, a)$.

---

d) Déterminer h pour que la solution correspondante f sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, a), a \in \mathbb{R}\}$ vérifie $f(1, t) = e$ pour tout t réel. Montrer que f est alors prolongeable à $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$ en une fonction continue. Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$ et vérifie-t-elle $(*)$?

• Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(1,t) = e \Longleftrightarrow h(t)e^{1+t^2} = e \Longleftrightarrow h(t) = e^{-t^2}$. La fonction f est donc $(x,y) \to e^{x^2+y^2-\frac{y^2}{x^2}}$.

• f est trivialement continue sur A. En un point $(0,a)$, $a \neq 0$, f peut être prolongée par $f(0,a) = 0$ car $\lim_{t\to+\infty} h(t) = \lim_{t\to-\infty} h(t) = 0$ (cf c). On note encore f ce prolongement continu à $\widehat{A} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

• Pour prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\widehat{A}$, il faut montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\widehat{A}$ et que celles-ci forment des fonctions continues sur $\widehat{A}$. En tout point de A, f admet évidemment des dérivées partielles. On a en particulier

$$\forall (x,y) \in A, \ \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x + 2\frac{y^2}{x^3}) \exp(x^2 + y^2 - \frac{y^2}{x^2})$$

En un point $(0,a)$,

$$\frac{f(t,a) - f(0,a)}{t} = \frac{e^{t^2+a^2}}{t} e^{\frac{-a^2}{t^2}} \sim_0 t\frac{e^{a^2}}{a^2} X\, e^{-X} \to_{t\to 0} 0 * 0 = 0 \text{ (en posant } X = \tfrac{a^2}{t^2} \to +\infty)$$

Ainsi, par définition, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,a)$ existe et vaut 0. $\frac{\partial f}{\partial x}$ est donc bien définie sur tout $\widehat{A}$. Reste à voir si elle est continue. Elle l'est clairement sur A d'après les théorèmes généraux de continuité. Etudions la continuité en $(0,a)$, $a \neq 0$.
En introduisant encore $X = \frac{y^2}{x^2}$ qui tend vers 0 quand $(x,y) \to (0,a)$,

$$\forall (x,y) \in A, \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x + 2\frac{y^2}{x^3}) \exp(x^2 + y^2 - \frac{y^2}{x^2}) = 2\frac{x}{y^2} e^{x^2+y^2}(y^2 + X^2)e^{-X}$$

Par croissance comparée, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \to 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,a)$ quand $(x,y) \to (0,a)$. $\frac{\partial f}{\partial x}$ est donc bien continue aussi en $(0,a)$.

• Les mêmes calculs s'appliquent pour $\frac{\partial f}{\partial y}$. On en déduit que f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\widehat{A}$. Le fait que la relation (*) reste vraie pour tout $(x,y) \in \widehat{A}$ s'obtient par continuité (il suffit de faire tendre $(x,y) \in A$ vers $(0,a)$!).

Correction du Problème 2

Dans tout le probl‘eme l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire usuel :

$$\text{Pour } X = (x, y) \text{ et } Y = (x', y'),\ \langle X\,,\,Y\rangle = xx' + yy'.$$

On rappelle qu'une partie A de $\mathbb{R}^2$ est convexe si et seulement si

$$\forall\,(X, Y) \in A^2,\ \forall\, t \in [0, 1],\ (1-t)X + tY \in A$$

(i.e. le segment joignant X à Y est enti‘erement contenu dans A).

Questions préliminaires

1. Soit $(U, V) \in (\mathbb{R}^2)^2$. Montrer que si (U, V) est une famille libre alors il existe $Z \in \mathbb{R}^2$ tel que $\langle Z\,,\,U\rangle = 0$ **et** $\langle Z\,,\,V\rangle = -1$.

Méthode 1 abstraite : $\psi \left\{ \begin{array}{ccc} U^\perp & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \langle X\,,\,V\rangle \end{array} \right.$ est une forme linéaire surjective car son image n'est pas réduite à $\{0\}$ (sinon $V \in (U^\perp)^\perp = \text{Vect}\{U\}$ ce qui contredit la liberté de $\{U, V\}$) donc il existe $Z \in U^\perp$ tel que $\langle Z\,,\,V\rangle = -1$ (prendre $Z \in \varphi^{-1}(\{-1\})$).

Méthode 2 système linéaire : notons (u_1, u_2) et (v_1, v_2) les coordonnées respectives de U et V dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Un vecteur Z de coordonnées (z_1, z_2) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ répondant aux conditions de l'énoncé existe si et seulement si le système d'inconnues $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} u_1 z_1 & + & u_2 z_2 & = & 0 \\ v_1 z_1 & + & v_2 z_2 & = & -1 \end{array} \right.$$

admet au moins une solution. Or le déterminant de ce système vaut $u_1 v_2 - u_2 v_1$ et il est non nul car c'est $\det(U, V)$ et $\{U, V\}$ est une famille libre si bien que le système admet une unique solution (qui peut d'ailleurs être explicitée avec les formules de Cramer).

Méthode 3 système linéaire : cherchons Z comme une combinaison linéaire des vecteurs U et V ((U, V) étant une famille libre de $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2, c'est une base de $\mathbb{R}^2$) sous la forme $Z = \alpha U + \beta V$:

$$Z = \alpha U + \beta V \text{ convient} \iff \left\{ \begin{array}{ccc} \langle \alpha U + \beta V\,,\,U\rangle & = & 0 \\ \langle \alpha U + \beta V\,,\,V\rangle & = & -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} \alpha\|U\|^2 & + & \beta\langle V\,,\,U\rangle & = & 0 \\ \alpha\langle U\,,\,V\rangle & + & \beta\|V\|^2 & = & -1 \end{array} \right.$$

Or le déterminant de ce système linéaire est, par symétrie du produit scalaire, $\|U\|^2\|V\|^2 - \langle U\,,\,V\rangle^2$. S'il est nul, alors $\|U\|^2\|V\|^2 = \langle U\,,\,V\rangle^2$ ce qui signifie que c'est un cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz donc la famille (U, V) est liée ce qui est une contradiction. Par conséquent il est non nul donc le système admet une unique solution (qui peut être explicitée avec les formules de Cramer en fonction de $\|U\|$, $\|V\|$ et $\langle Z\,,\,U\rangle$).

$\boxed{\text{Ainsi, il existe } Z \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \langle Z\,,\,U\rangle = 0 \textbf{ et } \langle Z\,,\,V\rangle = -1.}$

2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. (Re)démontrer que $\{X \in \mathbb{R}^2 \ /\ f(X) < 0\}$ est un ouvert.

Montrons que $\Omega = \{X \in \mathbb{R}^2 \ /\ f(X) < 0\}$ est ouvert par la définition des ouverts. Soit $X_0 \in \Omega$ et $\varepsilon = -\dfrac{f(X_0)}{2}$. On a donc $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en X_0, il existe $r > 0$ tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|X - X_0\| \leqslant r$, $|f(X) - f(X_0)| \leqslant \varepsilon$ c-à-d $f(X) \in [\dfrac{3f(X_0)}{2}, \dfrac{f(X_0)}{2}]$. Donc si $X \in B(X_0, r)$, $f(X) < 0$ i.e $X \in \Omega$. Ainsi, pour tout $X_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $B(X_0, r) \in \Omega$. $\boxed{\Omega \text{ est ouvert}}$.

Remarque: on pouvait aussi montrer que Ω^c est fermé par la caractérisation séquentielle des fermés.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\det\big((x-y)I_n + yJ\big) = \big(x+(n-1)y\big)(x-y)^{n-1}$$

Calculons ce déterminant en faisant des opérations sur les lignes et les colonnes. Avec $C_1 \leftarrow C_1 + \ldots + C_n$, on a

$$\begin{aligned}
\det\big((x-y)I_n + yJ\big) &= \begin{vmatrix} x & y & \ldots & y \\ y & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ y & \ldots & y & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & \ldots & y \\ x+(n-1)y & x & \ddots & y \\ \vdots & & \ddots & \ddots & y \\ x+(n-1)y & \ldots & y & x \end{vmatrix} \\
&= (x+(n-1)y) \begin{vmatrix} 1 & y & \ldots & y \\ 1 & x & \ddots & y \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ 1 & \ldots & y & x \end{vmatrix} \quad \text{(linéarité / premi`ere colonne)} \\
&= (x+(n-1)y) \begin{vmatrix} 1 & y & \ldots & y \\ 0 & x-y & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & x-y \end{vmatrix} \quad \text{(pour } i \geqslant 2,\ L_i \leftarrow L_i - L_1) \\
&= (x+(n-1)y)(x-y)^{n-1} \quad \text{(développement / premi`ere colonne et matrice diagonale)}
\end{aligned}$$

Partie I

Soit g une fonction définie sur Ω, ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose g de classe C^1. On note $\nabla g(X)$ le gradient de g en X.

On dira que g est convexe sur Ω si elle vérifie :

$$\forall\,(X,Y) \in \Omega^2,\ \forall\,\lambda \in [0,1], \quad g\Big((1-\lambda)X + \lambda Y\Big) \leqslant (1-\lambda)g(X) + \lambda g(Y).$$

---

1. (a) Soit h_1 et h_2 deux fonctions convexes sur $\mathbb{R}$. On pose dans cette question $g(x_1, x_2) = h_1(x_1) + h_2(x_2)$. Montrer que g est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Soient g_1 et g_2 deux fonctions convexes sur l'ouvert convexe Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que $g_1 + g_2$ est aussi convexe sur Ω.

⋆ Soit $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in [0,1]$. $(1-\lambda)X + \lambda Y = ((1-\lambda)x_1 + \lambda y_1, (1-\lambda)x_2 + \lambda y_2)$. Comme h_1 et h_2 sont convexes sur $\mathbb{R}$, par définition,

$$h_1\big((1-\lambda)x_1 + \lambda y_1)\big) \leqslant (1-\lambda)h_1(x_1) + \lambda h_1(y_1)$$

$$h_2\big((1-\lambda)x_2 + \lambda y_2)\big) \leqslant (1-\lambda)h_2(x_2) + \lambda h_2(y_2)$$

En ajoutant les deux inégalités, on obtient directement

$$\boxed{g\Big((1-\lambda)X + \lambda Y\Big) \leqslant (1-\lambda)g(X) + \lambda g(Y)}$$

⋆ Soit X et Y deux éléments de Ω et $\lambda \in [0,1]$. Comme g_1 et g_2 sont convexes sur Ω, par définition,

$$g_1\big((1-\lambda)X + \lambda Y\big) \leqslant (1-\lambda)g_1(X) + \lambda g_1(Y)$$

$$g_2\big((1-\lambda)X + \lambda Y\big) \leqslant (1-\lambda)g_2(X) + \lambda g_2(Y)$$

En ajoutant les deux inégalités, on obtient directement

$$\boxed{(g_1+g_2)\Big((1-\lambda)X + \lambda Y\Big) \leqslant (1-\lambda)(g_1+g_2)(X) + \lambda(g_1+g_2)(Y)}$$

2. On se donne $(X,Y) \in \Omega^2$.

   (a) Ω étant un ouvert convexe, montrer qu'il existe I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant $[0,1]$ tel que $\forall t \in I$, $(1-t)X + tY \in \Omega$. On pose alors pour $t \in I$, $G(t) = g\Big((1-t)X + tY\Big)$.

   (b) Montrer que G est dérivable sur I et que
$$\forall t \in I,\, G'(t) = \langle (Y-X)\,,\, \nabla g\Big((1-t)X + tY\Big)\rangle.$$

Pour (a), comme Ω est convexe, pour $t \in [0,1]$, $M_t = (1-t)X + tY \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, Il existe $r_X > 0$ et $r_Y > 0$ tel que $B(X, r_X) \subset \Omega$ et $B(Y, r_Y) \subset \Omega$. Donc $M_t = X + t(Y-X)$ est encore dans Ω si $\|t(Y-X)\| = |t|\|Y-X\| < r_X$ ce qui est vrai si $|t|$ assez petit (ou automatique si $X = Y$). Donc pour $t \in]-\dfrac{r_X}{\|Y-X\|}, 0[$, on a bien $M_t \in \Omega$ (même raisonnement avec Y et $M_t = Y + (1-t)(X-Y)$). Donc il existe un intervalle ouvert I contenant $[0,1]$ tel que pour $t \in I$, $M_t \in \Omega$.

Pour (b), G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I par composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$:

- $t \to (1-t)X + tY$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans Ω car ses applications composantes sont des fonctions affines de t.
- g est de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans $\mathbb{R}$ par hypoth'ese.

Comme $G(t) = g((1-t)x_1 + ty_1, (1-t)x_2 + ty_2)$ et $\nabla g = (\dfrac{\partial g}{\partial x_1}, \dfrac{\partial g}{\partial x_2})$, la r'egle de dérivation donne pour tout $t \in I$,
$$G'(t) = (y_1 - x_1)\frac{\partial g}{\partial x_1}((1-t)X + tY) + (y_2 - x_2)\frac{\partial g}{\partial x_2}((1-t)X + tY) = \langle (Y-X)\,,\, \nabla g\Big((1-t)X + tY\Big)\rangle$$

---

3. On suppose g convexe.

   (a) Soit $(X,Y) \in \Omega^2$ et G la fonction définie précédemment. Comparer, en utilisant la convexité de g, $G(1) - G(0)$ et $\dfrac{G(\lambda) - G(0)}{\lambda}$ pour $\lambda \in]0,1]$ et en déduire que $G(1) - G(0) \geqslant G'(0)$.

   (b) En déduire que
$$\forall (X,Y) \in \Omega^2, \quad g(Y) \geqslant g(X) + \langle (Y-X)\,,\, \nabla g(X)\rangle.$$

   (c) Montrer que $X \in \Omega$ réalise un minimum global de g (c'est-à-dire $\forall Y \in \Omega$, $g(Y) \geqslant g(X)$) **si et seulement si** $\nabla g(X) = (0,0)$.

Pour (a), on a $G(0) = g(X)$ et $G(1) = g(Y)$. Par définition de la convexité,
$$g((1-\lambda)X + \lambda Y) \leqslant (1-\lambda)G(X) + \lambda G(Y)$$
ce qui se réécrit $G(\lambda) \leqslant (1-\lambda)G(0) + \lambda G(1)$ et donc facilement, en divisant par $\lambda > 0$,
$$\boxed{\frac{G(\lambda) - G(0)}{\lambda} \leqslant G(1) - G(0)}$$

En faisant tendre λ vers 0, G étant dérivable en 0, on obtient $\boxed{G'(0) \leqslant G(1) - G(0)}$.

Alors, pour (b), les expressions en G par leur correspondance en g en particulier l'expression de $G'(t)$ trouvée en 2), on obtient immédiatement $g(Y) - g(X) \geqslant \langle (Y-X)\,,\, \nabla g\Big((1-0).X + 0.Y\Big)\rangle = \langle (Y-X)\,,\, \nabla g(X)\rangle$ donc
$$\boxed{g(Y) \geqslant g(X) + \langle (Y-X)\,,\, \nabla g(X)\rangle}$$

Enfin, pour (c), on sait, par théor'eme, que si g, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω, réalise un extremum en un point $X \in \Omega$, son gradient en X est nul. Inversement d'apr'es l'inégalité ci-dessus, si $\nabla g(X) = 0_{\mathbb{R}^2}$, pour tout $Y \in \Omega$, $g(Y) \geqslant g(X) + 0 = g(X)$ donc X est un extremum de g.

---

4. *Exemple :* soit $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 > x_1\}$ et $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2\ln(x_2 - x_1)$.
   (a) Montrer que Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ et que g est une fonction convexe sur Ω.
   (b) Montrer que g est de classe C^1 sur Ω et qu'elle admet un minimum global sur Ω qu'on calculera.

- ⋆ Si l'on définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction f par $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$, $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(x_1, x_2) < 0\}$ donc $\boxed{\Omega \text{ est un ouvert}}$ d'après la question préliminaire 2 car f est trivialement continue (polynôme de 2 variables).
- ⋆ De plus $\boxed{\Omega \text{ est convexe}}$ car si X, X' sont dans Ω, pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)X + tX' = ((1-t)x_1 + tx_1', (1-t)x_2 + tx_2') \in \Omega$ car $x_1 < x_2$ et $x_1' < x_2'$ donc en faisant une combinaison linéaire à coefficients positifs de ces deux inégalités ($1 - t \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$), on a bien
$$(1-t)x_1 + tx_1' < (1-t)x_2 + tx_2'$$
- ⋆ Posons $h : t \mapsto t^2$. h est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ (car de classe $\mathcal{C}^2$ à dérivée seconde positive ou nulle) donc d'après la question I-1a, $H : (x_1, x_2) \mapsto h(x_1) + h(x_2) = x_1^2 + x_2^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$ donc sur Ω.
  Posons $L : (x_1, x_2) \in \Omega \mapsto -2\ln(x_2 - x_1)$. Soient $(X = (x_1, x_2), X' = (x_1', x_2')) \in \Omega^2$ et $t \in [0,1]$.
$$L((1-t)X + tX') = -2\ln\Big((1-t)x_2 + tx_2' - \big((1-t)x_1 + tx_1'\big)\Big) = -2\ln\big((1-t)(x_2 - x_1) + t(x_2' - x_1')\big)$$
  si bien que par convexité de l'opposé de 2 fois la fonction logarithme $-2\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$,
$$L((1-t)X + tX') \leqslant (1-t)(-2\ln(x_2 - x_1)) + t(-2\ln(x_2' - x_1')) = (1-t)L(X) + tL(X')$$
  Par conséquent, L est convexe sur Ω.
  D'après la question I-1b, une somme de fonctions convexes sur Ω est convexe sur Ω,
  donc $\boxed{g = H + L \text{ est convexe sur } \Omega.}$
- ⋆ – $H : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω car c'est une fonction polynomiale de deux variables,
  – $L : (x_1, x_2) \mapsto -2\ln(x_2 - x_1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω car c'est la composée de $t \mapsto -2\ln t \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ (fonction réelle d'une variable réelle) et de $(x_1, x_2) \mapsto x_2 - x_1 \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}_+^*)$ (fonction polynomiale de deux variables),

  donc $\boxed{g = H + L \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \Omega.}$
- ⋆ La fonction g de cette question est convexe et de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω qui est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ donc le résultat de la question I-3c s'applique,
$$g \text{ admet un minimum global en } X \text{ sur } \Omega \iff \nabla g(X) = 0_{\mathbb{R}^2}$$
  or
$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) & = & 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + \dfrac{2}{x_2 - x_1} & = & 0 \\ 2x_2 - \dfrac{2}{x_2 - x_1} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + \dfrac{1}{x_2 - x_1} & = & 0 \\ x_2 + x_1 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 - \dfrac{1}{2x_1} & = & 0 \\ x_2 + x_1 & = & 0 \end{array}\right.$$
  et $x_1 - \dfrac{1}{2x_1} = 0 \iff x_1^2 = \dfrac{1}{2} \iff x_1 \in \left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ donc
$$\nabla g(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \left\{\begin{array}{l} (x_1,x_2) \in \left\{\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\} \\ X \in \Omega \end{array}\right. \underbrace{\iff}_{((x_1,x_2)\in\Omega \iff x_1 < x_2)} X = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\boxed{\text{Ainsi, } g \text{ admet un unique minimum global sur } \Omega \text{ en } \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right).}$$

Partie II

On consid‘ere maintenant deux fonctions f et g de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$; on suppose que la fonction g est convexe et qu'il existe en outre des points de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels g prend des valeurs **strictement négatives**.

On pose $E = \{X \in \mathbb{R}^2 / g(X) \leqslant 0\}$. On dira que $X \in E$ rend f minimale sur E si $\forall\, Y \in E,\ f(Y) \geqslant f(X)$.

1. Montrer que E est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ et que $\Omega = \{X \in \mathbb{R}^2 / g(X) < 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

⋆ Soient $(X, X') \in E^2$ et $\lambda \in [0, 1]$.
La convexité de g garantit que

$$g((1-\lambda)X + \lambda X') \leqslant (1-\lambda) \underbrace{g(X)}_{\substack{\leqslant 0 \\ \text{car } X \in E}} + \lambda \underbrace{g(X')}_{\substack{\leqslant 0 \\ \text{car } X' \in E}} \leqslant 0$$

donc $(1-\lambda)X + \lambda X' \in E$.

$\boxed{\text{Par conséquent, } E \text{ est une partie convexe de } \mathbb{R}^2.}$

⋆ Par hypothèse, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc **continue sur** $\mathbb{R}^2$ si bien que le résultat de la question préliminaire 2 s'applique : $\boxed{\Omega \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2.}$

---

2. On suppose que X rend f minimale sur E et que $g(X) < 0$. Montrer que $\nabla f(X) = (0, 0)$.

- $g(X) < 0$ donc $X \in \Omega$,
- Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ d'après la question précédente,
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω,
- X rend f minimale sur E donc, par définition, $\forall Y \in E\ ,\ f(Y) \geqslant f(X)$ d'où, puisque $\Omega \subset E$,

$$\forall Y \in \Omega\ ,\ f(Y) \geqslant f(X)$$

ce qui signifie que la fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω admet un minimum global (donc local) en X sur Ω donc $\boxed{\nabla f(X) = (0, 0).}$

---

3. On suppose maintenant que X rend f minimale sur E et que $g(X) = 0$.

   (a) i. Soit $Y \in \mathbb{R}^2$. On veut montrer, par l'absurde, qu'il est impossible d'avoir simultanément $\langle Y\ ,\ \nabla f(X)\rangle < 0$ et $\langle Y\ ,\ \nabla g(X)\rangle < 0$. On suppose donc $\langle Y\ ,\ \nabla f(X)\rangle < 0$ et $\langle Y\ ,\ \nabla g(X)\rangle < 0$ et on définit, pour $t \in \mathbb{R}$, $F(t) = f(X + tY)$ et $G(t) = g(X + tY)$.

   Déterminer le signe de $F'(0)$ et de $G'(0)$. En déduire qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $X + t_0 Y \in E$ **et** $f(X + t_0 Y) < f(X)$. Conclure.

Notons $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées respectives de X et Y dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

- – L'application de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto X + tY = (x_1 + ty_1, x_2 + ty_2)$ a ses deux composantes $t \mapsto x_1 + ty_1$ et $t \mapsto x_2 + ty_2$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
  – $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$,
  donc $F = f \circ (t \mapsto X + tY)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X + tY) \times y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X + tY) \times y_2 = \langle Y\ ,\ \nabla g(X + tY)\rangle$$

  donc, pour $t = 0$, $\boxed{F'(0) = \langle Y\ ,\ \nabla g(X)\rangle < 0.}$

- Un calcul analogue en remplaçant f par g donne G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{G'(0) = \langle Y \,,\, \nabla g(X)\rangle < 0.}$
- Les fonction F et G sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc leurs dérivées F' et G' sont continues sur $\mathbb{R}$, or elles sont strictement négatives en 0 donc en appliquant la définition de la continuité en 0 pour ces deux fonctions pour $\varepsilon \leftarrow \dfrac{1}{2}\min(|F'(0)|, |G'(0)|)$,

$$\exists \eta_F \in \mathbb{R}_+^* \;:\; \forall t \in [-\eta_F, \eta_F] \;,\; |F'(t) - F'(0)| \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{|F'(0)|}{2}$$

ce qui implique, puisque $F'(t) - F'(0) \leqslant |F'(t) - F'(0)|$,

$$\forall t \in [-\eta_F, \eta_F] \;,\; F'(t) \leqslant F'(0) + \frac{|F'(0)|}{2} = \frac{F'(0)}{2} < 0$$

On a de même

$$\exists \eta_G \in \mathbb{R}_+^* \;:\; \forall t \in [-\eta_G, \eta_G] \;,\; |G'(t) - G'(0)| \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{|G'(0)|}{2}$$

qui implique

$$\forall t \in [-\eta_G, \eta_G] \;,\; G'(t) < 0$$

Ainsi, les fonctions $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont strictement décroissantes sur } [-\eta_F, \eta_F] \text{ et sur } [-\eta_G, \eta_G] \text{ respectivement.}}$

- Posons $t_0 = \min(\eta_F, \eta_G)$.
  - D'une part, $t_0 > 0$ car η_F et η_G sont strictement positifs par construction.
  - D'autre part, F et G sont strictement décroissantes sur $[0, t_0]$ (car $[0, t_0] \subset [-\eta_F, \eta_F]$ et $[0, t_0] \subset [-\eta_G, \eta_G]$) donc

$$0 < t_0 \Rightarrow F(0) > F(t_0) \;\text{ et }\; G(0) > G(t_0)$$

  si bien qu'il $\boxed{\text{existe } t_0 > 0 \text{ tel que } f(X) > f(X + t_0Y) \text{ et } g(X) > g(X + t_0Y).}$

- Or nous savons que $g(X) = 0$ donc $g(X) > g(X + t_0Y)$ implique $g(X + t_0Y) \leqslant 0$ donc $X + t_0Y \in E$, or X rend f minimale sur E donc

$$f(X + t_0Y) \geqslant f(X)$$

ce qui contredit l'inégalité $f(X) > f(X + t_0Y)$ établie ci-dessus.

$\boxed{\text{Ainsi, il est impossible d'avoir simultanément } \langle Y \,,\, \nabla f(X)\rangle < 0 \text{ et } \langle Y \,,\, \nabla g(X)\rangle < 0.}$

---

ii. Déduire de ce qui préc'ede que :

$$\forall Y \in \mathbb{R}^2,\; \langle Y \,,\, \nabla g(X)\rangle < 0 \Rightarrow \langle Y \,,\, \nabla f(X)\rangle \geqslant 0.$$

D'après le point ci-dessus, puisqu'on ne peut avoir simultanément $\langle Y \,,\, \nabla f(X)\rangle < 0$ et $\langle Y \,,\, \nabla g(X)\rangle < 0$, l'une des deux assertions implique la négation de l'autre :
donc $\boxed{\forall Y \in \mathbb{R}^2,\; \langle Y \,,\, \nabla g(X)\rangle < 0 \Rightarrow \langle Y \,,\, \nabla f(X)\rangle \geqslant 0.}$

(b) En utilisant le résultat de la question I 3b, montrer que $\nabla g(X) \neq (0, 0)$.

Par l'absurde, supposons que $\nabla g(X) = (0, 0)$.
La fonction g est convexe et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert convexe $\mathbb{R}^2$ donc le résultat de la question I 3b donne, pour $g \leftarrow g$, $\Omega \leftarrow \mathbb{R}^2$, $X \leftarrow X$,

$$\forall Y \in \mathbb{R}^2 \;,\; g(Y) \geqslant \underbrace{g(X)}_{=0 \text{ par hyp.}} + \underbrace{\langle (Y - X) \,,\, \nabla g(X)\rangle}_{=0 \text{ par hyp. car } \nabla g(X) = (0,0)}$$

donc g est positive ou nulle sur $\mathbb{R}^2$ ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé selon laquelle g prend des valeurs strictement négatives.

$\boxed{\text{Ainsi, } \nabla g(X) \neq (0, 0).}$

(c) Soit $Y \in \mathbb{R}^2$ tel que $\langle Y\,,\,\nabla g(X)\rangle = 0$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = Y - \dfrac{1}{n}\nabla g(X)$.
En appliquant 3(a)ii, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\langle Y_n\,,\,\nabla f(X)\rangle \geqslant 0$ puis que $\langle Y\,,\,\nabla f(X)\rangle \geqslant 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité du produit scalaire en son premier argument, puisque $Y_n = Y - \dfrac{1}{n}\nabla g(X)$,

$$\langle Y_n\,,\,\nabla g(X)\rangle = \underbrace{\langle Y\,,\,\nabla g(X)\rangle}_{=0} - \frac{1}{n}\langle \nabla g(X)\,,\,\nabla g(X)\rangle = -\frac{1}{n}\|\nabla g(X)\|^2 < 0 \quad \text{car } \nabla g(X) \neq (0,0) \text{ (quest. précédente)}$$

donc la question 3(a)ii implique $\langle Y_n\,,\,\nabla f(X)\rangle \geqslant 0$.
- D'après le point ci-dessus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ 0 \leqslant \langle Y_n\,,\,\nabla f(X)\rangle = \underbrace{\langle Y\,,\,\nabla f(X)\rangle - \underbrace{\frac{1}{n}\langle \nabla g(X)\,,\,\nabla f(X)\rangle}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ 0}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ \langle Y\,,\,\nabla f(X)\rangle}$$

Les deux membres de l'inégalité ci-dessus ont une limite finie lorsque $n \to +\infty$ donc en passant à la limite dans l'inégalité, $\boxed{\langle Y\,,\,\nabla f(X)\rangle \geqslant 0.}$

(d) En utilisant la question préliminaire, montrer que $\nabla f(X)$ et $\nabla g(X)$ sont liés.

Par l'absurde, supposons que la famille $(\nabla f(X), \nabla g(X))$ est libre.
D'après la question préliminaire 1 appliquée pour $U \leftarrow \nabla g(X)$ et $V \leftarrow \nabla f(X)$, il existe $Z \in \mathbb{R}^2$ tel que $\langle Z\,,\,\nabla g(X)\rangle = 0$ et $\langle Z\,,\,\nabla f(X)\rangle = -1$. Or la question précédente peut être appliquée pour $y \leftarrow Z$ puisque Z v érifie $\langle Z\,,\,\nabla g(X)\rangle = 0$ si bien que

$$\langle Z\,,\,\nabla f(X)\rangle \geqslant 0$$

d'où $-1 \geqslant 0$ ce qui est une contradiction.
$\boxed{\text{Ainsi, } \nabla f(X) \text{ et } \nabla g(X) \text{ sont liés.}}$

---

4. Déduire des questions précédentes que si X rend f minimale sur E alors

- soit $g(X) < 0$ et $\nabla f(X) = (0,0)$,

- soit $g(X) = 0$ et $\exists \lambda \in [0, +\infty[$, $\nabla f(X) + \lambda \nabla g(X) = (0,0)$.

Supposons que X rend f minimale sur E

- Si $g(X) < 0$, alors d'après la question II-2, $\nabla f(X) = (0,0)$.
- Sinon, $g(X) = 0$ et dans ce cas, d'après la question II-3d, $(\nabla f(X), \nabla g(X))$ est liée donc

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2\ :\ a\nabla f(X) + b\nabla g(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \quad \text{et} \quad (a,b) \neq (0,0)\ .$$

Si $a = 0$, alors $b\nabla g(X) = 0_{\mathbb{R}^2}$ or d'après la question II-3b, $\nabla g(X) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ donc $b = 0$ ce qui contredit $(a,b) \neq (0,0)$. Par conséquent, $a \neq 0$ si bien qu'en posant $\lambda = -\dfrac{b}{a}$, on a

$$\nabla f(X) + \lambda \nabla g(X) = (0,0)\ .$$

De plus en calculant le produit scalaire des deux membres de l'égalité ci-dessus avec $\nabla g(X)$, on obtient

$$\langle \nabla g(X)\,,\,\nabla f(X)\rangle + \lambda \|\nabla g(X)\|^2 = 0$$

d'où, puisque $\|\nabla g(X)\| \neq 0$ (car $\nabla g(X) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$),

$$\lambda = \frac{\langle -\nabla g(X)\,,\, \nabla f(X)\rangle}{\|\nabla g(X)\|^2}$$

or d'après la question II-3ai, pour tout vecteur Y de $\mathbb{R}^2$, on peut pas avoir simultanément $\langle Y\,,\, \nabla g(X)\rangle < 0$ et $\langle Y\,,\, \nabla f(X)\rangle < 0$, donc puisque pour $Y \leftarrow -\nabla g(X)$ on a $\langle Y\,,\, \nabla g(X)\rangle < 0$, cela implique $\langle -\nabla g(X)\,,\, \nabla f(X)\rangle \geqslant 0$ si bien que $\lambda \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, soit } g(X) < 0 \text{ et } \nabla f(X) = (0,0)\text{, soit } g(X) = 0 \text{ et } \exists \lambda \in [0, +\infty[,\ \nabla f(X) + \lambda \nabla g(X) = (0,0).}$$

---

5. Pour $n = 3$, on prend $f(x, y) = \det\Big(((x - y)I_3 + yJ\Big)$ (cf préliminaires) et $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

   (a) Justifier qu'il existe $X_0 \in E$ rendant f minimale sur E.

   (b) Vérifier toutes les hypoth'eses nécessaires pour utiliser II.4 puis déterminer tous les X_0 possibles.

Soit $\psi : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$, polynomial donc continue sur $\mathbb{R}^2$.
$E = \psi^{-1}([0, 1])$ est un ensemble fermé, en tant qu'image réciproque de $[0, 1]$, fermé de $\mathbb{R}$, par ψ continue.
Et $\forall (x, y) \in E$, $\|(x, y)\|_2 \leqslant 1$, donc E est borné pour $\|\cdot\|_2$, donc pour toute norme.

$$\boxed{\text{Ainsi } E \text{ est un compact de } \mathbb{R}^2.}$$

Puis $f : (x, y) \mapsto \det\Big(((x - y)I_3 + yJ\Big) = (x - y)^2(x + 2y)$ est continue (polynomiale),
donc $f(E)$ est également un compact de $\mathbb{R}$, donc un segment de $\mathbb{R}$.
il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $f(E) = [a, b]$.
Donc il existe $X_0 \in E$ tel que $a = f(X_0)$, autrement écrit :

$$\boxed{X_0 \text{ rend } f \text{ minimal sur } E}$$

Notons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (polynomiale) et pour tout $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(X) = \big(2(x - y)(x + 2y) + (x - y)^2; -2(x - y)(x + 2y) + 2(x - y)^2\big) = (x - y)\big(3x + 3y; -6y\big)$$

D'après les questions précédentes, il y a deux possibilités : $X_0 = (x_0, y_0)$ vérifie $x_0^2 + y_0^2 < 1$ ou $x_0^2 + y_0^2 = 1$.
1. Supposons que $x_0^2 + y_0^2 < 1$.
Alors X_0 est un point critique de f, donc $(x_0 - y_0) = 0$ ou $(3x_0 + 3y_0; 6y_0) = (0, 0)$, donc $x_0 = y_0$ ou $x_0 = y_0 = 0$. On a alors $f(x_0, x_0) = 0$.
2. Supposons que $x_0^2 + y_0^2 = 1$.
Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(X_0) = \lambda \nabla g(X_0)$. Or $\nabla g(X) = \big(2x; 2y\big)$.

$$(x_0 - y_0)\big(3(x_0 + y_0); -6y_0\big) = \lambda\big(2x_0; 2y_0\big) \Longrightarrow \lambda = 3(y_0 - x_0) \text{ puis } x_0 + y_0 = -2x_0$$

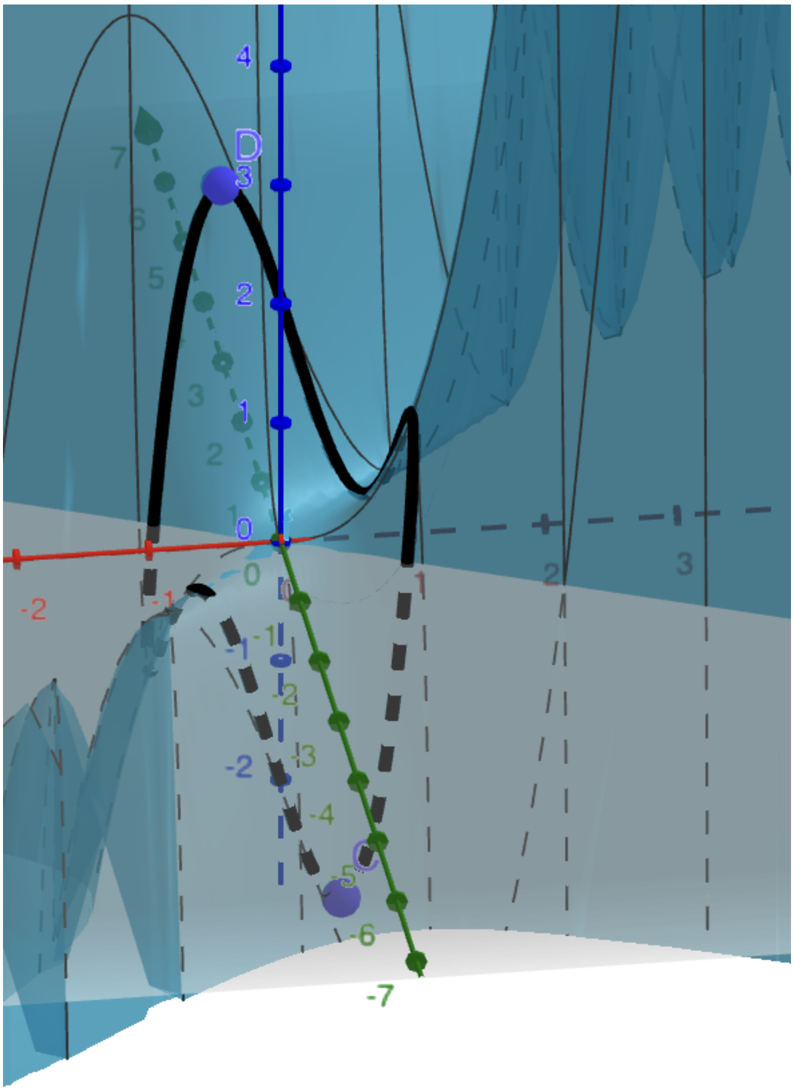
Donc $y_0 = -3x_0$, et donc, comme $1 = x_0^2 + y_0^2 = x_0^2 + 9x_0^2$, on a $x_0^2 = \dfrac{1}{10}$.
Ainsi, il y a deux solutions : $X_0' = (\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{-3}{\sqrt{10}})$ et $X_0'' = (\dfrac{-1}{\sqrt{10}}, \dfrac{3}{\sqrt{10}})$.
Enfin,

$$f(X_0') = \frac{4^2}{10} \times \frac{-5}{\sqrt{10}} = \frac{-8}{\sqrt{10}} \qquad f(X_0'') = \frac{(-4)^2}{10} \times \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}}$$

Comme $\dfrac{-8}{\sqrt{10}} \leqslant 0 \leqslant \dfrac{8}{\sqrt{10}}$, on a

$$\boxed{X_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right) \text{ et } f(X_0) = -\frac{8}{\sqrt{10}}}$$

La représentation graphique suivante est la surface $z = f(x, y)$, la trace épaisse est l'image du cercle unité de f. On y voit le maximum lié en $D = X_0''$ et le minimum lié en $C = X_0'$.


D