Devoir surveillé n°11

Sujet donné le samedi 1er juin 2024, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Problème - Inégalité de Carleman

Objectifs du problème :
On s'intéresse dans ce problème à une inégalité établie par Torsten Carleman (en 1922) :

si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge, alors la série de terme général $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant e\sum_{k=1}^{+\infty} a_n$$

Le problème est constitué de quatre parties. La première définit (simplement) la notion de fonction intégrable sur un intervalle non compact. La deuxième partie démontre un analogue intégral de cette inégalité : l'inégalité de Knopp. La troisième partie s'intéresse à la démonstration originale de l'inégalité de Carleman, utilisant du calcul différentiel. Enfin, la quatrième partie exploite la sommabilité et l'inégalité arithmético-géométrique pour obtenir d'une nouvelle façon l'inégalité de Carleman.

I . Fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+$

On considère une fonction ψ continue par morceaux, définie (au moins) sur un intervalle (semi-)ouvert $[a,b[$.
On dit que ψ est intégrable sur $[a,b[$ si : $\forall\, x\in[a,b[$, $\displaystyle\int_a^x |\psi(t)|\mathrm{d}t$ admet une limite finie pour $x\to b$. On note $\displaystyle\int_a^{\to b}|\psi(t)|\mathrm{d}t$ cette limite.

I.1. Montrer que s'il existe M tel que pour tout $x\in[a,b[$, $\displaystyle\int_a^x|\psi(t)|\mathrm{d}t\leqslant M$, alors ψ est intégrable sur $[a,b[$.
On pourra montrer qu'une certaine fonction est croissante et majorée sur $[a,b[$ donc convergente pour $x\to b$.

I.2. Soit ψ une fonction intégrable sur $[a,b[$. On fixe $\epsilon>0$ pour (a) et (b).

(a) Montrer qu'il existe V, voisinage de b tel que pour tout $x_1,x_2\in V\cap[a,b[$ avec $x_1<x_2$,
$$\int_{x_1}^{x_2}|\psi(t)|\mathrm{d}t\leqslant\epsilon$$

(b) En déduire que pour tout $x_1,x_2\in V\cap[a,b[$ avec $x_1<x_2$, $\left|\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\psi(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\epsilon$.

Cela signifie que $\Psi : x\mapsto\displaystyle\int_a^x\psi(t)\mathrm{d}t$ vérifie le critère de Cauchy pour les fonctions, au voisinage de b :
$$\forall\,\epsilon>0,\ \exists\,V\in\mathcal{V}_b\ \text{ tel que }\ :\forall\,x_1,x_2\in V, |\Psi(x_1)-\Psi(x_2)|\leqslant\epsilon$$

On admet que cela implique que Ψ admet une limite en b, que l'on note $\displaystyle\int_a^{\to b}\psi(t)\mathrm{d}t$.

(c) Montrer que $\displaystyle\int_a^{\to b}\psi(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^{\to b}|\psi(t)|\mathrm{d}t$

I.3. Soit $u,v:[a,b[\to\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose en outre que u' et v sont positives sur $[a,b[$.
On suppose que $u\times v'$ est intégrable sur $[a,b[$ et que $u\times v$ admet une limite finie en b.
Montrer que $u'\times v$ est intégrable sur $[a,b[$ et que
$$\int_a^{\to b}(u'\times v)(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to b}v(x)u(x)-v(a)u(a)-\int_a^{\to b}(u\times v')(t)\mathrm{d}t$$

Pour la question II.1.(e), on exploitera l'extension :
Si $u,v:]a,b[\to\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ avec $u'\times v\geqslant 0$ sur $]a,b[$.
On suppose que $u\times v'$ est intégrable sur $]a,b[$ et que $u\times v$ admet une limite finie en a et une limite finie en b.
Alors $u'\times v$ est intégrable sur $]a,b[$ et $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b}(u'\times v)(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to b}v(x)u(x)-\lim_{x\to a}v(t)u(t)-\int_{\to a}^{\to b}(u\times v')(t)\mathrm{d}t$

II . Inégalité de Knopp

Dans cette partie, on démontre l'inégalité de Knopp, souvent présentée comme analogue continu de l'inégalité de Carleman.

II.1. Deux (in)égalité intégrales

(a) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, un fonction continue par morceaux à valeurs dans un intervalle J. Soit φ une fonction continue et convexe sur J.

Expliquer pourquoi f et $\varphi \circ f$ sont intégrable sur $[a, b]$, puis que $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \in J$.

(b) En exploitant des sommes de Riemann, montrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \circ f(t)\mathrm{d}t$$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux, strictement positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$.
Pour tout $x > 0$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{1}{x}g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

(c) Déterminer la limite de $g(x)$ pour $x \to 0^+$.

(d) Déterminer la limite de $g(x)$ pour $x \to +\infty$.

(e) En déduire que h est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{\to+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\to 0}^{\to+\infty} h(x)\mathrm{d}x.$$

On pourra utiliser le résultat obtenu en I.3. avec extension.

II.2. Démonstration de l'inégalité de Knopp.

Soit f une fonction continue par morceaux, strictement positive, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(a) Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{e}{x^2}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

On pourra commencer par démontrer que $\ln(tf(t)) - \ln t = \ln(f(t))$, *puis exploiter l'inégalité obtenue en* $II.1.(b)$.

(b) En déduire que $x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\int_0^{\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \leqslant e\int_0^{\to+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

II.3. Application à l'inégalité de Carleman

On suppose dans cette question que (a_n) est une suite décroissante de réels strictement positifs telle que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} a_k$ converge.

On note f la fonction en escalier qui, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ est égale à a_k sur l'intervalle $[k-1, k[$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction v_k définie sur $[k-1, k]$ par

$$\begin{cases} v_k(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + \dfrac{1}{x}(x-k+1)\ln(a_k) & \text{si } k \geqslant 2 \\ v_1(x) = \ln(a_1) \end{cases}$$

est minimale pour $x = k$.

(b) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{k-1}^k \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \geqslant \exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \ln(a_i)\right)$$

(c) En déduire l'inégalité de Carleman dans le cas où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un suite décroissante.

(d) Expliquer comment on peut retirer l'hypothèse de décroissance de (a_n).

III . Inégalité de Carleman

On démontre dans cette partie l'inégalité de Carleman d'une manière indépendante de la partie précédente.
Les premières questions permettent d'établir l'inégalité arithmético-géométrique avec des méthodes de calcul différentiel qui permettent de se familiariser avec celles qui seront utilisées dans la seconde série de questions pour démontrer l'inégalité de Carleman.
L'inégalité arithmético-gémétrique sera utilisée dans la partie suivante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note U_n l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n$. Son adhérence, notée $\overline{U_n}$, est $(\mathbb{R}_+)^n$.

III.1. Inégalité arithmético-géométrique.
Soit $s > 0$. On définit les fonctions f et g_s sur U_n en posant, pour tout $x = (x_, \dots x_n) \in \overline{U_n}$,

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k \qquad \text{et} \qquad g_s(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) - s$$

On note X_s, le sous-ensemble de $\overline{U_n}$ constitué des zéros de g_s : $X_s = \{x \in \overline{U_n} \mid g_s(x) = 0\}$.

(a) On admet que f et g_s sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n. Donner l'expression de leur gradient en un point quelconque $x = (x_1, \dots x_n)$ de U_n.

(b) Démontrer que la restriction de f à X_s admet un maximum sur X_s et que ce maximum est en fait atteint sur $X_s \cap U_n$.
On pourra commencer par montrer que X_s est un compact de $\mathbb{R}^n$, puis vérifier que f est strictement positive en certains points de $X_s \cap U_n$.

On note $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un élément de $X_s \cap U_n$ en lequel la restriction de f à X_s a atteint son maximum.

(c) Démontrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = \dfrac{f(a)}{\lambda}$

(d) Démontrer alors que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in U_n \cap X_s$, $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ et en déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall\ (x_1, x_2, \dots x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \qquad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

III.2. Démonstration de l'inégalité de Carleman.
On considère l'application F_n de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall\ (x_1, \dots x_n) \in \overline{U_n}, \qquad F_n(x_1, \dots x_n) = x_1 + (x_1 x_2)^{1/2} + (x_1 x_2 x_3)^{1/3} + \cdots + (x_1 \dots x_n)^{1/n}$$

On note h_n l'application de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall\ (x_1, \dots x_n) \in \overline{U_n}, \qquad h_n(x_1, \dots x_n) = x_1 + \cdots + x_n - 1$$

On note H_n l'ensemble $H_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.

(a) Pourquoi peut-on affirmer que F_n et h_n sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n ?

(b) Déterminer le gradient de F_n et de le gradient de h_n en tout point de U_n.

(c) Démontrer que la restriction de F_n à $\overline{U_n} \cap H_n$ admet un maximum.

On admet que le maximum de F_n est en fait atteint sur $U_n \cap H_n$.
On note M_n le maximum de F_n sur $\overline{U_n} \cap H_n$ et on note $(a_1, \dots, a_n)$ un point de $U_n \cap H_n$ en lequel il est atteint.
Pour k entre 1 et n, on note $\gamma_k = (a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k}$.

(d) Démontrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$\begin{cases} \gamma_1 + \dfrac{\gamma_2}{2} + \cdots + \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_1 \\ \qquad \dfrac{\gamma_2}{2} + \cdots + \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 \end{cases}$$

(e) En déduire que :

i. $\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n = M_n$

ii. pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $\gamma_k = \lambda \omega_k a_k$ où

$$\begin{cases} \omega_k = k \left(1 - \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \right) \text{ si } k \in [\![1, n-1]\!] \\ \omega_n = n \end{cases}$$

L'objectif des trois questions suivantes est de démontrer que $\lambda \leqslant e$. On suppose par l'absurde que $\lambda > e$.

(f) Vérifier que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{e} \leqslant \left(\dfrac{k+1}{k+2} \right)^{k+1}$.

(g) Démontrer que $\omega_1 < \dfrac{1}{e}$ et que, pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $\omega_k \leqslant \dfrac{k}{k+1}$.

On pourra démontrer, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\omega_{k+1}{}^{k+1} = \dfrac{1}{\lambda}\omega_k{}^k \left(1 - \dfrac{\omega_k}{k}\right)^{-k}$.

(h) Aboutir à une contradiction sur ω_n.
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, \dots x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} (x_1 x_2 \cdots x_k)^{1/k} \leqslant e$$

(i) En déduire l'inégalité de Carleman

IV Inégalité de Carleman et sommabilité

On rappelle l'inégalité arithmético-géométrique démontrée dans la partie précédente :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \forall\ (x_1, x_2, \dots x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \qquad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

On considère dans cette partie une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels strictement positifs telle que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = \left(\prod\limits_{i=1}^{k} a_i\right)^{1/k}$.

IV.1. Montrer que $\sum\limits_{k\geqslant 1} p_k$ est une série à termes positifs.

IV.2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k \leqslant \dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$.

La famille $\left(\dfrac{1}{k}a_i\right)_{1\leqslant i\leqslant k}$ est-elle sommable ? Qu'en concluez-vous ?

IV.3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k \leqslant \frac{1}{k(k!)^{1/k}} \sum_{i=1}^{k} i a_i$$

On exploitera l'inégalité arithmético-géométrique avec des x_i bien choisis

IV.4. On note : $\forall\ (i, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A_{i,k} = 0$ si $i > k$ et $A_{i,k} = \dfrac{i a_i}{k(k+1)}$ si $i \leqslant k$.

Montrer que la famille $\left(\dfrac{i a_i}{k(k+1)}\right)_{(i,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et calculer $\sum\limits_{(i,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} A_{i,k}$.

IV.5. On recherche un majorant optimal de $\dfrac{k+1}{\sqrt[k]{k!}}$. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $s_k = \dfrac{k+1}{\sqrt[k]{k!}}$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $s_k \leqslant e \Longleftrightarrow (k+1)\ln(k+1) \leqslant k + \sum\limits_{i=1}^{k+1} \ln i$.

(b) Montrer, par une comparaison série-intégrale que $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)\ln(k+1) - k \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k+1} \ln i$

IV.6. Conclure quant à l'inégalité de Carleman.

••• FIN •••

Correction

Problème - Inégalité de Carleman

I . Fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+$

On considère une fonction ψ continue par morceaux, définie (au moins) sur un intervalle (semi-)ouvert $[a,b[$.

On dit que ψ est intégrable sur $[a,b[$ si : $\forall\, x\in[a,b[$, $\displaystyle\int_a^x |\psi(t)|\mathrm{d}t$ admet une limite finie pour $x\to b$. On note $\displaystyle\int_a^{\to b}|\psi(t)|\mathrm{d}t$ cette limite.

I.1. Montrer que s'il existe M tel que pour tout $x\in[a,b[$, $\displaystyle\int_a^x|\psi(t)|\mathrm{d}t\leqslant M$, alors ψ est intégrable sur $[a,b[$.

On pourra montrer qu'une certaine fonction est croissante et majorée sur $[a,b[$ donc convergente pour $x\to b$.

On suppose qu'il existe M tel que pour tout $x\in[a,b[$, $\displaystyle\int_a^x|\psi(t)|\mathrm{d}t\leqslant M$.

Notons $F: x\mapsto\displaystyle\int_a^x|\psi(t)|\mathrm{d}t$. Pour $x_1<x_2\in[a,b[$, par relation de Chasles :

$$F(x_2)-F(x_1)=\int_a^{x_2}|\psi(t)|\mathrm{d}t-\int_a^{x_1}|\psi(t)|\mathrm{d}t=\int_{x_1}^{x_2}|\psi(t)|\mathrm{d}t\geqslant 0$$

puisque nous intégrons une fonction positive sur $[x_1,x_2]$ (bornes dans le « bon »sens).

Ainsi F est croissante, elle est par hypothèse majorée par M.

Donc F admet une limite finie pour $x\to b$, limite inférieure à M (par ailleurs).

$$\boxed{f \text{ est intégrable sur } [a,b[\text{ et } \int_a^{\to b}|\psi(t)|\mathrm{d}t\leqslant M.}$$

I.2. Soit ψ une fonction intégrable sur $[a,b[$. On fixe $\epsilon>0$ pour (a) et (b).

(a) Montrer qu'il existe V, voisinage de b tel que pour tout $x_1,x_2\in V\cap[a,b[$ avec $x_1<x_2$,

$$\int_{x_1}^{x_2}|\psi(t)|\mathrm{d}t\leqslant\epsilon$$

Soit $\epsilon>0$. (Avec la notation précédente)

Puisque F est croissante majorée par $\displaystyle\int_a^{\to b}|\psi(t)|\mathrm{d}t$, il existe $V\in\mathcal{V}_b$ (ensemble des voisinages de b) tel que $\forall\,x\in V$,

$$\left|\int_a^x|\psi(t)|\mathrm{d}t-\int_a^{\to b}|\psi(t)|\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\epsilon}{2}$$

Puis, pour $x_1,x_2\in V$ (avec $x_1<x_2$ SPDG) :

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}|\psi(t)|\mathrm{d}t &=\left|\int_a^{x_2}|\psi(t)|\mathrm{d}t-\int_a^{x_1}|\psi(t)|\mathrm{d}t\right|=\left|\int_a^{x_2}|\psi(t)|\mathrm{d}t-\int_a^{\to b}|\psi(t)|\mathrm{d}t-\int_a^{x_1}|\psi(t)|\mathrm{d}t+\int_a^{\to b}|\psi(t)|\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant\left|\int_a^{x_2}|\psi(t)|\mathrm{d}t-\int_a^{\to b}|\psi(t)|\mathrm{d}t\right|+\left|\int_a^{x_1}|\psi(t)|\mathrm{d}t-\int_a^{\to b}|\psi(t)|\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc il existe } V \text{, voisinage de } b \text{ tel que pour tout } x_1<x_2\in V\cap[a,b[,\ \int_{x_1}^{x_2}|\psi(t)|\mathrm{d}t\leqslant\epsilon.}$$

(b) En déduire que pour tout $x_1,x_2\in V\cap[a,b[$ avec $x_1<x_2$, $\left|\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\psi(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\epsilon$.

Puis, on a pour tout $t\in[x_1,x_2]$, $\psi(t)\leqslant|\psi(t)|$, et $-\psi(t)\leqslant|\psi(t)|$ donc par croissance de l'intégrale sur $[x_1,x_2]$

$$\int_{x_1}^{x_2}\psi(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_{x_1}^{x_2}|\psi(t)|\mathrm{d}t\leqslant\epsilon$$

Et de même :

$$-\int_{x_1}^{x_2}\psi(t)\mathrm{d}t=\int_{x_1}^{x_2}-\psi(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_{x_1}^{x_2}|\psi(t)|\mathrm{d}t\leqslant\epsilon$$

En prenant le maximum des deux termes de gauche

$$\boxed{\forall\,x_1<x_2\in V,\quad\left|\int_{x_1}^{x_2}\psi(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\epsilon}$$

Cela signifie que $\Psi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x \psi(t)\mathrm{d}t$ vérifie le critère de Cauchy pour les fonctions, au voisinage de b :

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ V \in \mathcal{V}_b \text{ tel que } : \forall\ x_1, x_2 \in V, |\Psi(x_1) - \Psi(x_2)| \leqslant \epsilon$$

On admet que cela signifie que Ψ admet une limite en b, que l'on note $\displaystyle\int_a^{\to b} \psi(t)\mathrm{d}t$.

(c) Montrer que $\displaystyle\int_a^{\to b} \psi(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{\to b} |\psi(t)|\mathrm{d}t$

Pour tout $x \in [a, b[$, pour tout $t \in [a, x]$, $\psi(t) \leqslant |\psi(t)|$, puis par intégration $\Psi(x) = \displaystyle\int_a^x \psi(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x |\psi(t)|\mathrm{d}t = F(x)$.
Enfin ces deux fonctions de x admettent une limite finie en b. L'ordre est conservée par passage à la limite

$$\boxed{\int_a^{\to b} \psi(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{\to b} |\psi(t)|\mathrm{d}t}$$

I.3. Soit $u, v : [a, b[\to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose en outre que u' et v sont positives sur $[a, b[$.
On suppose que $u \times v'$ est intégrable sur $[a, b[$ et que $u \times v$ admet une limite finie en b.
Montrer que $u' \times v$ est intégrable sur $[a, b[$ et que

$$\int_a^{\to b} (u' \times v)(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} v(x)u(x) - v(a)u(a) - \int_a^{\to b} (u \times v')(t)\mathrm{d}t$$

Puisque u' et v sont positives,
pour démontrer que $u' \times v$ est intégrable, il suffit de démontrer que $x \mapsto \displaystyle\int_a^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ converge pour $x \to b$.
Or, on peut faire une intégration par parties sur $[a, x]$, puisque u et v' sont de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_a^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_a^x - \int_a^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t = u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

Puis par hypothèse :
- $u(x)v(x)$ admet une limite finie en b.
- uv' est intégrable sur $[a, b[$, donc d'après la question précédente : $\displaystyle\int_a^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ admet une limite pour $x \to b$.

Donc, par addition, $\displaystyle\int_a^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ admet une limite pour $x \to b$

$$\boxed{\text{Donc } u' \times v \text{ est intégrable sur } [a, b[\text{ et précisément } \int_a^{\to b} (u' \times v)(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} v(x)u(x) - v(a)u(a) - \int_a^{\to b} (u \times v')(t)\mathrm{d}t.}$$

II . Inégalité de Knopp

Dans cette partie, on démontre l'inégalité de Knopp, souvent présentée comme analogue continu de l'inégalité de Carleman.

II.1. Deux (in)égalité intégrales

(a) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, un fonction continue par morceaux à valeurs dans un intervalle J. Soit φ une fonction continue et convexe sur J.
Expliquer pourquoi f et $\varphi \circ f$ sont intégrable sur $[a, b]$, puis que $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \in J$.

---

f est une fonction continue par morceaux, définie sur le segment de $\mathbb{R}$ (compact) $[a, b]$, elle est donc intégrable sur $[a, b]$.
De même, on va **montrer** que la composition d'une fonction continues par morceaux (f) par une fonction continue (φ) est continue par morceaux.

Considérons $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision de $[a, b]$ subordonnée à f.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $\tilde{f}_k : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]x_{k-1}, x_k[\\ \lim\limits_{u\to x_{k-1}^+} f(x) & \text{si } x = x_{k-1} \\ \lim\limits_{u\to x_k^-} f(x) & \text{si } x = x_k \end{cases}$ est continue sur $[x_{k-1}, x_k]$

Puis, par composition de fonction continue : $\varphi \circ \tilde{f}_k$ est continue sur $[x_{k-1}, x_k]$.

Et donc pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $\varphi \tilde{\circ} f_k : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]x_{k-1}, x_k[\\ \lim\limits_{u\to x_{k-1}^+} f(x) & \text{si } x = x_{k-1} \\ \lim\limits_{u\to x_k^-} f(x) & \text{si } x = x_k \end{cases} = \varphi \circ \tilde{f}_k$

est continue sur $[x_{k-1}, x_k]k$ est continue.

Ainsi $\varphi \circ f$ est continue par morceaux (avec la même subdivision subordonnée).

$$\boxed{f \text{ et } \varphi \circ f \text{ sont continue par morceaux sur } [a,b] \text{ donc intégrables sur } [a,b].}$$

f est continue par morceaux, donc est borné et à valeurs dans J.

Donc il existe $m, M \in J$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, $m \leqslant f(t) \leqslant M$.

On a alors, par croissance de l'intégrale :

$$m \times (b-a) = \int_a^b m\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}t = M \times (b-a)$$

En divisant par $b-a > 0$: $m \leqslant \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant M$, donc

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \in J}$$

(b) En exploitant des sommes de Riemann, montrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \circ f(t)\mathrm{d}t$$

Puisque f et $\varphi \circ f$ sont continues par morceaux sur $[a,b]$, elles sont Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et donc l'intégrale de f (respectivement de $\varphi \circ f$) sur $[a,b]$ sont limites de leurs sommes de Riemann :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n \varphi \circ f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b \varphi \circ f(t)\mathrm{d}t$$

Par ailleurs, la fonction φ est convexe sur J.

$$\forall\, a_1, \dots a_n \in J, \quad \forall\, \lambda_1, \dots \lambda_n \text{ tels que } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \qquad : \qquad \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(a_i)$$

Donc avec $a_i \leftarrow f\big(a + \frac{i}{n}(b-a)\big) \in J$ et $\lambda_i \leftarrow \frac{1}{n}$ (on a bien $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{n}{n} = 1$) :

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f\big(a + \frac{i}{n}(b-a)\big)\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\varphi\left(f\big(a + \frac{i}{n}(b-a)\big)\right)$$

Ce qui, en passant à la limite (*on sait qu'elles existent*) qui conserve, l'ordre donne exactement :

$$\boxed{\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \circ f(t)\mathrm{d}t}$$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux, strictement positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{1}{x}g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

(c) Déterminer la limite de $g(x)$ pour $x \to 0^+$.

Soit $x \in]0,1]$.

f étant continue par morceaux sur $[0,x]$, elle y est bornée. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [0,x]$, $|f(t)| \leqslant M$.

On a donc les inégalités (on rappelle que x est positif) :

$$|g(x)| = \frac{1}{x}\left|\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x t|f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{x}\int_0^x t\mathrm{d}t = \frac{Mx}{2}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} Mx = 0$, donc, par encadrement :

$$\boxed{g \text{ admet une limite en } 0^+ \text{ et } \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0.}$$

A noter que, comme f est strictement positive par hypothèse, on n'a pas besoin des valeurs absolues.

(d) Déterminer la limite de $g(x)$ pour $x \to +\infty$.

Il existe X, tel que pour $x \geqslant X$: $\displaystyle\int_X^x |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.
Il existe M' tel que $\forall\ t \in [0, X]$, $|f(t)| \leqslant M'$.
Il existe X' tel que pour tout $x \geqslant X'$, $\displaystyle\left|\int_0^{X'} \frac{t}{x} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M'X'^2}{2x} \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.
Et donc pour tout $x \geqslant \max(X, X')$, $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x |tf(t)|\mathrm{d}t \leqslant \epsilon$.

$$\boxed{g \text{ admet une limite en } +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$$

(e) En déduire que l'intégrale h est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{\to+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\to 0}^{\to+\infty} h(x)\mathrm{d}x.$$

On pourra utiliser le résultat obtenu en I.3. avec extension.

Puisque f, puis g et donc h sont positive sur $\mathbb{R}+$, il suffit de calculer pour $0 < Z < X$

$$\int_Z^X h(x)\mathrm{d}x = \int_Z^X \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{:=v'(x)} \times \underbrace{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}_{:=u(x)}\,\mathrm{d}x$$

On peut appliquer le résultat démontrer en question I.3. car
- u et $v : x \mapsto \dfrac{-1}{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $u \times v = g$ admet des limites finies en 0 et $+\infty$, qui sont nulles.

On a :

$$\int_{\to 0}^{\to+\infty} h(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} g(x)}_{=0} - \underbrace{\lim_{x\to 0} g(x)}_{=0} - \int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{-1}{x} \times xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\to+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

II.2. Démonstration de l'inégalité de Knopp.
Soit f une fonction continue par morceaux, strictement positive, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(a) Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{e}{x^2}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

On pourra commencer par démontrer que $\ln(tf(t)) - \ln t = \ln(f(t))$, *puis exploiter l'inégalité obtenue en* $II.1.(b)$.

Comme f est strictement positive, pour tout $t > 0$, $t \times f(t) > 0$ et donc $\ln(t \times f(t))$ a bien du sens et

$$\ln(t \times f(t)) = \ln t + \ln(f(t))$$

On a donc

$$\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))\mathrm{d}t - \frac{1}{x}\int_0^x \ln t\mathrm{d}t$$

Réglons le calcul de droite : $\displaystyle\int_0^x \ln t\mathrm{d}t = [x\ln x - x - 0]$ et donc $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x \ln t\mathrm{d}t = \ln x - 1$.
On exploite ensuite l'inégalité de $1.(b)$ pour $J \leftarrow \mathbb{R}_+^*$, $\varphi \leftarrow \exp$, convexe, $b \leftarrow x$ et $a \leftarrow 0$:

$$\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x \exp(\ln(tf(t)))\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

Finalement (puisque $\dfrac{e}{x} > 0$) :

$$\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t\right) = \exp\left(\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))\mathrm{d}t\right) - \ln x + 1\right) = \frac{e}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{e}{x} \times \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

On a donc

$$\boxed{\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{e}{x^2}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}$$

(b) En déduire que $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\int_0^{\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \leqslant e\int_0^{\to+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

Comme l'application $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t\right)$ est positive,

il suffit de montrer (d'après I.1.) que pour tout X, $\displaystyle\int_0^X \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t\right)$ est majorée.

(Notons qu'en 0, $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t \to \lim_{u\to 0}\ln f(u)$ (dérivation, puis prolongement par continuité de f).

Or d'après la question précédente,

$$\int_0^X \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \leqslant e\int_0^X \underbrace{\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}_{=h(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant e\int_{\to 0}^{\to+\infty} h(x)\mathrm{d}x = e\int_0^{\to+\infty} f(u)\mathrm{d}u$$

Cette dernière intégrale existe bien puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Et donc, on peut affirmer que

$$\boxed{x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t\right) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+.}$$

On peut alors passer à la limite pour le terme de gauche ($X \to +\infty$), la majoration est conservée :

$$\boxed{\int_0^{\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \leqslant e\int_0^{\to+\infty} f(x)\mathrm{d}x}$$

II.3. Application à l'inégalité de Carleman

On suppose dans cette question que (a_n) est une suite décroissante de réels strictement positifs telle que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} a_k$ converge.

On note f la fonction en escalier qui, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ est égale à a_k sur l'intervalle $[k-1, k[$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction v_k définie sur $[k-1, k]$ par

$$\begin{cases} v_k(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\ln(a_i) + \dfrac{1}{x}(x-k+1)\ln(a_k) & \text{si } k \geqslant 2 \\ v_1(x) = \ln(a_1) \end{cases}$$

est minimale pour $x = k$.

Pour la situation $k = 1$,

$v_k : x \mapsto \ln(a_1)$ est constante sur $[0, 1]$ et est donc minimale (et maximale) en $x = 1$ (et ailleurs).

Pour $k \geqslant 2$.

$v_k(x) = 1 + \dfrac{1}{x}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\ln(a_i) - (k-1)\ln a_k\right) = 1 + \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}(\ln a_i - \ln a_k)$.

Or (a_i) est décroissante donc $\ln a_i > \ln a_k$, pour tout $i \leqslant k-1$.

Ainsi $v_k(x)$ est de la forme $1 + \dfrac{a}{x}$ avec $a > 0$, donc v_k est décroissante sur $[k-1, k]$.

$$\boxed{\text{Dans tous les cas } (k \in \mathbb{N}^*),\ v_k \text{ est minimal sur } [k-1, k] \text{ en } x = k.}$$

(b) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{k-1}^k \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \geqslant \exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \ln(a_i)\right)$$

On va utiliser la méthode de comparaison série-intégrale.

La fonction v_k est décroissante sur $[k-1, k]$: $\forall\ t \in [k-1, k]$, $v_k(t) \geqslant v_k(k)$.

Puis on intègre pour t de $k-1$ à k :

$$\int_{k-1}^k v_k(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_{k-1}^k v_k(k)\mathrm{d}t = v_k(k)$$

Comme $v_1(1)=\ln(a_1)$ et $v_k(k)=\dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln a_i$, on a $\displaystyle\int_{k-1}^{k} v_k(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln a_i$.
Par ailleurs, puisque f est en escalier, égale à a_{h+1} sur les intervalles $[h,h+1]$.
Soit $k\in\mathbb{N}^*$, pour $x\in[k-1,k]$, on applique la relation de Chasles :

$$\int_0^x \ln(f(t))\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{k-1}\int_{i-1}^{i}\ln(f(t))\mathrm{d}t+\int_{k-1}^{x}\ln(f(t))\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{k-1}\int_{i-1}^{i}\ln a_i\mathrm{d}t+\int_{k-1}^{x}\ln(a_k)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{k-1}\ln a_i+(x-k+1)\ln a_k$$

Donc $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t)\mathrm{d}t=v_k(x)$, et finalement :

$$\int_{k-1}^{k}\left(\frac{1}{x}\int_0^x\ln(f(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)\right)\underbrace{\Longrightarrow}_{\exp\nearrow}\exp\left(\int_{k-1}^{k}\left(\frac{1}{x}\int_0^x\ln(f(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right)\geqslant\exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)\right)$$

Enfin, on applique l'inégalité de 1.(b) pour $b=k$, $a=k-1$, $\varphi=\exp$:

$$\exp\left(\frac{1}{k-(k-1)}\int_{k-1}^{k}v_k(t)\right)s\leqslant\frac{1}{k-(k-1)}\int_{k-1}^{k}\exp\circ v_k(t)\mathrm{d}t$$

Cela conduit exactement, par transitivité, à

$$\boxed{\int_{k-1}^{k}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x\ln(f(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\geqslant\exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)\right)}$$

(c) En déduire l'inégalité de Carleman dans le cas où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un suite décroissante.

On a donc avec la question précédente, pour $k\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x\ln(f(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\geqslant\exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)\right)=\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)^{1/k}$,

Ce qui en sommant pour k de 1 à n :

$$\int_0^n\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x\ln(f(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x\ln(f(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)^{1/k}$$

Alors qu'en question 2.(b) : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x\ln(f(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\leqslant e\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$,

dès que $f:\mathbb{R}+\to\mathbb{R}_+^*$ continue par morceaux et intégrable.

Or ces dernières hypothèses sont vérifiées pour la fonction f définie en début de question 3 : $f=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\mathbf{1}_{[k-1,k[}$.

- f est bien continue par morceaux
- f est strictement positive (car $a_k>0$)
- $\displaystyle\int_0^x|f(t)|\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{k}a_i+(x-k)a_{k+1}$ si $\lfloor x\rfloor=k$.

Donc $\displaystyle\int_0^x|f(t)|\mathrm{d}t$ admet une limite pour $x\to+\infty$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}a_i$, puisque la série est convergente.

On a ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$e\sum_{i=1}^{+\infty}a_i=e\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_0^{+\infty}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x\ln(f(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{n}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x\ln(f(t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)^{1/k}$$

car $\exp v_k(x)$ est positive sur $[n,+\infty[$ (pour justifier l'inégalité du milieu).

Ainsi, la série, à terme général : $\lambda_k=\displaystyle\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)^{1/k}$ positifs a ses sommes partielles majorées par $e\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}a_i$,

$$\boxed{\text{La série de terme général }\lambda_k=\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)^{1/k}\text{ est donc convergente et }\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n}\leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty}a_n.}$$

(d) Expliquer comment on peut retirer l'hypothèse de décroissance de (a_n).

On suppose maintenant que les (a_k) ne sont plus décroissant.
Soit $N\in\mathbb{N}$. Considérons $E=\{a_1,a_2,\dots a_N\}$, ensemble fini.
Il existe une permutation $\sigma:\mathbb{N}_N\to\mathbb{N}_N$ tel que pour tout $i<j$: $a_{\sigma(i)}\geqslant a_{\sigma(j)}$.

Autrement écrit : la liste $(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots a_{\sigma(n)})$ est rangée dans l'ordre décroissant.
et ainsi : pour tout $k \in \mathbb{N}_N$, les termes (positifs) de $\{a_{\sigma(1)}, \dots a_{\sigma(k)}\}$ sont globalement plus grand que ceux de $\{a_1, \dots a_k\}$.

Par conséquent : $\forall\ k \in \mathbb{N}_N$, $\displaystyle\prod_{i=1}^{k} a_i \leqslant \prod_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)}$ et $\lambda_k = \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{1/k} \leqslant \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)}\right)^{1/k}$.

Par ailleurs, la suite $(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots a_{\sigma(N)}, 0, 0 \dots 0, \dots)$ vérifie le critère de la question précédente.
On note $b_k = a_{\sigma(k)}$ si $k \leqslant N$ et $b_k = 0$ si $k > N$.

Donc la série de terme général $\mu_k = \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{k} b_i\right)^{1/k}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

En particulier :

$$\sum_{k=1}^{N}\lambda_k \leqslant \sum_{k=1}^{N}\mu_k \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \underbrace{=}_{b_{N+1}=\dots=0} e\sum_{n=1}^{N} b_n \underbrace{=}_{\{b_1,\dots b_N\}=\{a_1,\dots a_N\}} e\sum_{n=1}^{N} a_n \underbrace{\leqslant}_{a_k \geqslant 0} e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Ce résultat étant vrai pour tout N,

$$\boxed{\text{La série de terme général positif } \lambda_k = \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{1/k} \text{ est donc majorée donc convergente et } \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.}$$

III . Inégalité de Carleman

On démontre dans cette partie l'inégalité de Carleman d'une manière indépendante de la partie précédente.
Les premières questions permettent d'établir l'inégalité arithmético-géométrique avec des méthodes de calcul différentiel qui permettent de se familiariser avec celles qui seront utilisées dans la seconde série de questions pour démontrer l'inégalité de Carleman.
L'inégalité arithmético-gémétrique sera utilisée dans la partie suivante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note U_n l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n$. Son adhérence, notée $\overline{U_n}$, est $(\mathbb{R}_+)^n$.

III.1. Inégalité arithmético-géométrique.
Soit $s > 0$. On définit les fonctions f et g_s sur U_n en posant, pour tout $x = (x, \dots x_n) \in \overline{U_n}$,

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k \qquad \text{et} \qquad g_s(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - s$$

On note X_s, le sous-ensemble de $\overline{U_n}$ constitué des zéros de g_s : $X_s = \{x \in \overline{U_n} \mid g_s(x) = 0\}$.

(a) On admet que f et g_s sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n. Donner l'expression de leur gradient en un point quelconque $x = (x_1, \dots x_n)$ de U_n.

Soit $x \in U_n$. Puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n, par définition

$$\boxed{\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]_{1\leqslant i\leqslant n} = \left[\prod_{k\neq i} x_k\right]_{1\leqslant i\leqslant n} = \left[\frac{f(x)}{x_i}\right]_{1\leqslant i\leqslant n} \qquad \text{et} \qquad \nabla g(x) = \left[\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\right]_{1\leqslant i\leqslant n} = \Big[1\Big]_{1\leqslant i\leqslant n}}$$

(b) Démontrer que la restriction de f à X_s admet un maximum sur X_s et que ce maximum est en fait atteint sur $X_s \cap U_n$.
On pourra commencer par montrer que X_s est un compact de $\mathbb{R}^n$, puis vérifier que f est strictement positive en certains points de $X_s \cap U_n$.

$X_s = \overline{U_n} \cap g^{-1}\{0\}$ est fermé, par intersection de deux fermés : l'adhérence est fermé, $\{0\}$ est fermé et g est continue).
Puis X_s est borné, puisque si $x \in X_s$, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $x_i \geqslant 0$ et $x_i = s - \displaystyle\sum_{j\neq i} x_j \leqslant s$, donc $\|x\|_\infty \leqslant s$.
Ainsi X_s est un compact de $\mathbb{R}^n$ (en tant que fermé et borné). Par ailleurs f est continue sur X_s. Donc $f(X_s)$ est compact.

$$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ admet un maximum, atteint sur } X_s.}$$

Il reste à montrer que ce maximum n'est pas en $\overline{U_n} \setminus U_n = \mathbb{R}_+^n \setminus {\mathbb{R}_+^*}^n = \{x = (x_1, \dots x_n) \mid \exists\ j \mid x_j = 0, \forall\ i x_i \geqslant 0\}$.
Or si $x \in \overline{U_n} \setminus U_n$, $\exists\ j \in \mathbb{N}_n$ tel que $x_j = 0$ et donc $f(x) = 0$,
alors que $\left(\dfrac{1}{s}, \dots \dfrac{1}{s}\right) \in X_s$ et $f\left(\dfrac{1}{s}, \dots \dfrac{1}{s}\right) = \dfrac{1}{s^n} > 0$, donc le maximum de f sur X_s est strictement positif.

$$\boxed{\text{Ce maximum est donc en fait atteint sur } X_s \cap U_n.}$$

On note $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un élément de $X_s \cap U_n$ en lequel la restriction de f à X_s a atteint son maximum.

(c) Démontrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = \dfrac{f(a)}{\lambda}$.

La point a est un extrema de f lié à la condition g, il vérifie donc : $(\nabla f(a), \nabla g(a))$ est liée.
Ainsi, comme $f(a) \neq 0$, vu le calcul de $\nabla f(a) \neq 0$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$,

ce qui d'après la calcul précédent, conduit à : $\forall\ i \in \mathbb{N}_n$, $\dfrac{f(a)}{a_i} = \lambda$.

Enfin, comme $f(a) > 0$ et $a_i > 0$, nécessairement, $\lambda > 0$.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \lambda > 0 \text{ tel que, pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ a_k = \frac{f(a)}{\lambda}.}$$

(d) Démontrer alors que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in U_n \cap X_s$, $\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ et en déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall\ (x_1, x_2, \ldots x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \qquad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

On a donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $a_i = \dfrac{f(a)}{\lambda} = a_1$.

Ainsi, $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = n a_1$ et donc $a_1 = \dfrac{s}{n} = a_i$, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$. Par conséquent, $f(a) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{s^n}{n^n}$.

Puis, comme il s'agit de la valeur maximale : pour tout $x \in U_n \cap X_s$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k = f(x) \leqslant f(a) = \dfrac{s^n}{n^n}$.

En prenant la racine n-ième et comme $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$, on obtient :

$$\boxed{\text{Pour tout } (x_1, \ldots, x_n) \in U_n \cap X_s,\ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.}$$

Considérons maintenant, un n-uplet $(x_1, \ldots x_n)$ de $(\mathbb{R}_+)^n$ et $s_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$, on a alors $\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$, avec $s \leftarrow s_0$.

$$\boxed{\forall\ (x_1, x_2, \ldots x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \qquad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

III.2. Démonstration de l'inégalité de Carleman.
On considère l'application F_n de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall\ (x_1, \ldots x_n) \in \overline{U_n}, \qquad F_n(x_1, \ldots x_n) = x_1 + (x_1 x_2)^{1/2} + (x_1 x_2 x_3)^{1/3} + \cdots + (x_1 \ldots x_n)^{1/n}$$

On note h_n l'application de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall\ (x_1, \ldots x_n) \in \overline{U_n}, \qquad h_n(x_1, \ldots x_n) = x_1 + \cdots + x_n - 1$$

On note H_n l'ensemble $H_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.

(a) Pourquoi peut-on affirmer que F_n et h_n sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n ?

F_n et h_n sont toutes deux polynomiales (en plusieurs valeurs : x_1, x_2,…x_n), donc

$$\boxed{F_n \text{ et } h_n \text{ sont toutes deux de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } U_n \text{ (et même } \mathbb{R}^n).}$$

(b) Déterminer le gradient de F_n et de le gradient de h_n en tout point de U_n.

Notons, plus formellement, que $F_n : (x_1, x_2, \ldots x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k} x_j\right)^{1/k}$ Comme précédemment, considérons $x \in U_n$. Les applications F_n et h_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n,

$$\forall\ i \in \mathbb{N}_n, \qquad \frac{\partial F_n}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\prod_{j=1}^{k} x_j\right)^{1/k}}_{=0 \text{ si } i>k} = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k x_i}\left(\prod_{j=1}^{k} x_j\right)^{1/k}$$

Ainsi :

$$\boxed{\nabla F_n(x) = \left[\frac{\partial F_n}{\partial x_i}(x)\right]_{1\leqslant i\leqslant n} = \left[\sum_{k=i}^{n} \frac{1}{kx_i}\left(\prod_{j=1}^{k} x_j\right)^{1/k}\right]_{1\leqslant i\leqslant n} \qquad \text{et} \qquad \nabla h_n(x) = \left[\frac{\partial h_n}{\partial x_i}(x)\right]_{1\leqslant i\leqslant n} = \Big[1\Big]_{1\leqslant i\leqslant n}}$$

(c) Démontrer que la restriction de F_n à $\overline{U_n} \cap H_n$ admet un maximum.

Comme précédemment, $\overline{U_n} \cap H_n$ est un compact, car $H_n = X_s$ pour $s = 1$. F_n est continue, donc

$$\boxed{\text{la restriction de } F_n \text{ à } \overline{U_n} \cap H_n \text{ admet un maximum.}}$$

On admet que le maximum de F_n est en fait atteint sur $U_n \cap H_n$.
On note M_n le maximum de F_n sur $\overline{U_n} \cap H_n$ et on note $(a_1, \ldots, a_n)$ un point de $U_n \cap H_n$ en lequel il est atteint.
Pour k entre 1 et n, on note $\gamma_k = (a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k}$.

(d) Démontrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $\forall\ i \in \mathbb{N}_n, \displaystyle\sum_{k=i}^{n} \frac{\gamma_k}{k} = \lambda a_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$

La point a est un extrema de F_n lié à la condition h_n, il vérifie donc : $(\nabla F_n(a), \nabla h_n(a))$ est liée.
Ainsi, comme $a \neq 0$, vu son calcul, $\nabla F_n(a) \neq 0$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla F_n(a) = \lambda \nabla h_n(a)$,

ce qui d'après la calcul précédent, conduit à : $\forall\ i \in \mathbb{N}_n, \displaystyle\sum_{k=i}^{n} \frac{1}{ka_i}\left(\prod_{j=1}^{k} a_j\right)^{1/k} = \lambda (> 0)$.

Ainsi, en multipliant par a_i et en notant $\gamma_k = (a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k}$, on a : $\forall\ i \in \mathbb{N}_n, \displaystyle\sum_{k=i}^{n} \frac{\gamma_k}{k} = \lambda a_i$.

Associé avec le fait que $(a_1, \ldots a_n) \in H_n$:

$$\boxed{\exists\ \lambda > 0 \text{ tel que } \forall\ i \in \mathbb{N}_n, \sum_{k=i}^{n} \frac{\gamma_k}{k} = \lambda a_i \text{ et } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1.}$$

(e) En déduire que :

i. $\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n = M_n$

ii. pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $\gamma_k = \lambda \omega_k a_k$ où $\begin{cases} \omega_k = k\left(1 - \dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right) & \text{si } k \in [\![1, n-1]\!] \\ \omega_n = n \end{cases}$

Sommons donc toutes les relations :

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} \frac{\gamma_k}{k} = \sum_{1\leqslant k\leqslant i\leqslant n} \frac{\gamma_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{k}\sum_{i=1}^{k} 1 = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$$

. Et comme $M_n = f_n(a) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_1 \ldots a_k)^{1/k} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k > 0$, on obtient la première égalité à démontrer.

On note alors $\omega_k = \dfrac{\gamma_k}{\lambda a_k}$ (car $a \in U_n$).

On sait que $\dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n$, donc $\omega_n = n$,

Puis pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\lambda a_i = \displaystyle\sum_{k=i}^{n} \frac{\gamma_k}{k} = \sum_{k=i}^{n} \frac{\lambda a_k}{k}\omega_k$. Donc, en simplifiant par $\lambda \neq 0$: $a_i = \displaystyle\sum_{k=i}^{n} \frac{a_k}{k}\omega_k$.

Ainsi, pour $i \in \mathbb{N}_{n-1}$: $a_i - a_{i+1} = \displaystyle\sum_{k=i} \frac{a_k}{k}\omega_k - \sum_{k=i+1} \frac{a_k}{k}\omega_k = \frac{a_i}{i}\omega_i$ et $\omega_i = i\left(1 - \dfrac{a_{i+1}}{a_i}\right)$.

$$\boxed{\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n = M_n\ ; \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}_n, \gamma_k = \lambda \omega_k a_k \text{ avec } \omega_n = n \text{ et } \forall\ k < n : \omega_k = k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right)}$$

On notera que pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $a_k > 0$ et donc γ_k puis ω_k également. On pourra donc si besoin diviser par l'un de ces nombres (sans changer le sens de l'inégalité).

L'objectif des trois questions suivantes est de démontrer que $\lambda \leqslant e$. On suppose par l'absurde que $\lambda > e$.

(f) Vérifier que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{e} \leqslant \left(\dfrac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$.

Composons par ln, fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{e} \leqslant \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1} \iff -1 \leqslant (k+1)\ln\frac{k+1}{k+2} \iff 1 \geqslant (k+1)\ln\frac{k+2}{k+1} = (k+1)\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right) \iff \frac{1}{k+1} \geqslant \ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$

Or, il est bien connu que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$ donc pour $x \leftarrow \dfrac{1}{k+1}$: toutes ces inégalités sont vraies :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N},\ \frac{1}{e} \leqslant \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}.}$$

(g) Démontrer que $\omega_1 < \dfrac{1}{e}$ et que, pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $\omega_k \leqslant \dfrac{k}{k+1}$.

On pourra démontrer, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, ${\omega_{k+1}}^{k+1} = \dfrac{1}{\lambda}{\omega_k}^k\left(1-\dfrac{\omega_k}{k}\right)^{-k}$.

$\omega_1 = \dfrac{\gamma_1}{\lambda a_1} = \dfrac{1}{\lambda}$ car $\gamma_1 = a_1$ et comme, par hypothèse, $\lambda > e$, on a $\omega_1 < \dfrac{1}{e}$.
Puis pour $k \in \mathbb{N}_{n-1}$:

$$\lambda^{k+1}{\omega_{k+1}}^{k+1}{a_{k+1}}^{k+1} = \gamma_{k+1}^{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1} a_i = {\gamma_k}^k \times a_{k+1} = \lambda^k{\omega_k}^k{a_k}^k \times a_{k+1}$$

Ainsi comme $\omega_k = k\left(1-\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right)$, on a $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \dfrac{\omega_k}{k}$ puis :

$$\boxed{\lambda\frac{{\omega_{k+1}}^{k+1}}{{\omega_k}^k} = \frac{{a_k}^k a_{k+1}}{{a_{k+1}}^{k+1}} = \left(1-\frac{\omega_k}{k}\right)^{-k}}$$

Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $\mathcal{P}_k$: « $\omega_k \leqslant \dfrac{k}{k+1}$ ».

— $\omega_1 \leqslant \dfrac{1}{e}$ et comme $e > 2$, $\dfrac{1}{e} \leqslant \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+1}$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
— Soit $k \in \mathbb{N}_{n-1}$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie.
  Donc $\dfrac{\omega_k}{k} \leqslant \dfrac{1}{k+1}$, puis $1-\dfrac{\omega_k}{k} \geqslant 1-\dfrac{1}{k+1} = \dfrac{k}{k+1}$ ainsi $\left(1-\dfrac{\omega_k}{k}\right)^{-k} \leqslant \left(\dfrac{k+1}{k}\right)^k$.
  On trouve donc :

$${\omega_{k+1}}^{k+1} \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \times \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \leqslant \frac{1}{\lambda} < \frac{1}{e}$$

$$\omega_{k+1} \leqslant e^{-1/k+1} \Longrightarrow \omega_{k+1} \leqslant \frac{k+1}{k+2}$$

  d'après l'inégalité démontrée à la question précédente. Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée

$$\boxed{\omega_1 < \frac{1}{e} \text{ et que, pour tout } k \text{ dans } [\![1,n]\!],\ \omega_k \leqslant \frac{k}{k+1}.}$$

(h) Aboutir à une contradiction sur ω_n.

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, \ldots x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_1x_2\cdots x_k)^{1/k} \leqslant e$

On a donc pour finir : $n = \omega_n \leqslant \dfrac{n}{n+1}$, absurde, même pour $n = 1$.
Nécessairement : $M_n = \lambda \leqslant e$.
Donc pour tout $(x_1, \ldots x_n) \in U_n$ tel que $H_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$, $F_n(x_1, \ldots x_n) \leqslant M_n \leqslant e$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ pour tout } (x_1, \ldots x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \text{ tels que } x_1 + \cdots + x_n = 1, \quad \sum_{k=1}^{n}(x_1x_2\cdots x_k)^{1/k} \leqslant e.}$$

(i) En déduire l'inégalité de Carleman

Soient a_k une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et notons $M = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $x_k = \dfrac{a_k}{M}$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $x_k > 0$, donc $(x_1, \ldots x_n) \in U_n$

$(x_1, x_2, \ldots x_n)$ vérifie les conditions de l'inégalité précédente : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_1x_2\cdots x_k)^{1/k} \leqslant e$. Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{a_1}{M}\right)\left(\frac{a_2}{M}\right)\cdots\left(\frac{a_k}{M}\right)\right)^{1/k} \leqslant e \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{M^k}\right)^{1/k}(a_1a_2\cdots a_k)^{1/k} \leqslant e$$

Et donc

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)^{1/k} \leqslant e\times M = e\sum_{k=1}^{n}a_k \leqslant e\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$$

Cette dernière inégalité est obtenue, car il s'agit d'une série à termes positifs.

Puis la suite des sommes partielles de la série de terme général $\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)^{1/k} > 0$ est majorée, donc

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n} \leqslant e\sum_{k=1}^{+\infty}a_k.}$$

IV Inégalité de Carleman et sommabilité

On considère dans cette partie une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels strictement positifs telle que $\sum_{n\geqslant 1}a_n$ converge.

On note, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $p_k = \left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{1/k}$.

IV.1. Montrer que $\sum_{k\geqslant 1}p_k$ est une série à termes positifs.

Comme, pour tout $i\in\mathbb{N}_k$, $a_i>0$, alors $\prod_{i=1}^{k}a_i>0$ et donc

$$\boxed{\forall\, k\in\mathbb{N}^*,\qquad p_k>0.}$$

IV.2. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $p_k\leqslant \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i$.

La famille $\left(\frac{1}{k}a_i\right)_{1\leqslant i\leqslant k}$ est-elle sommable ? Qu'en concluez-vous ?

On exploite l'I.A.G. pour $x_i\leftarrow a_i$, on a exactement : $p_k\leqslant \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i$.

En revanche, la famille $\left(\frac{1}{k}a_i\right)_{1\leqslant i\leqslant k}$ est une famille à termes positifs.

Il suffit donc de minorer par une famille non sommable pour démontrer sa non-sommabilité.

Or pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^{k}a_i>a_1$, puisque pour tout i, $a_i>0$. Et donc $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i$ est minorée par $\frac{a_1}{k}$.

Or la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{a_1}{k}$ diverge : c'est la série harmonique bien connue.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{k}a_i\right)_{1\leqslant i\leqslant k} \text{ n'est pas sommable. On en conclue rien (à part qu'il faut faire mieux...).}}$$

IV.3. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$p_k\leqslant \frac{1}{k(k!)^{1/k}}\sum_{i=1}^{k}ia_i$$

On exploitera l'inégalité arithmético-géométrique avec des x_i bien choisis

---

Notons pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, $x_i\leftarrow ia_i>0$. On peut appliquer l'I.A.G. :

$$\sqrt[k]{k!}\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)^{1/k} = \left(\prod_{i=1}^{k}ia_i\right)^{1/k} = \left(\prod_{i=1}^{k}x_i\right) \leqslant \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}ia_i$$

Et donc

$$\boxed{p_k\leqslant \frac{1}{k(k!)^{1/k}}\sum_{i=1}^{k}ia_i}$$

IV.4. On note : $\forall\ (i,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A_{i,k} = 0$ si $i > k$ et $A_{i,k} = \dfrac{ia_i}{k(k+1)}$ si $i \leqslant k$.

Montrer que la famille $\left(\dfrac{ia_i}{k(k+1)}\right)_{(i,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et calculer $\displaystyle\sum_{(i,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} A_{i,k}$.

La famille $\left(\dfrac{ia_i}{k(k+1)}\right)_{1\leqslant i\leqslant k}$ est à termes positifs.

Il suffit donc de montrer qu'en sommant cette famille d'une façon ou d'une autre, on obtient un nombre fini.

Notons $\forall\ (i,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A_{i,k} = 0$ si $i > k$ et $A_{i,k} = \dfrac{ia_i}{k(k+1)}$ si $i \leqslant k$ et faisons la somme pour k de 1 à $+\infty$, puis i de 1 à $+\infty$.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$, fixé et quelconque. $(A_{i,k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est télescopique. Pour tout $k \geqslant i$: $A_{i,k} = \dfrac{ia_i}{k(k+1)} = \dfrac{ia_i}{k} - \dfrac{ia_i}{k+1}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} A_{i,k}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} A_{i,k} = \sum_{k=i}^{+\infty} A_{i,k} = \frac{ia_i}{i} - 0 = a_i$.

On sait ensuite, par ailleurs, que la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 1} a_i$ est convergente, donc

$$\boxed{\text{La famille } \left(\dfrac{ia_i}{k(k+1)}\right)_{1\leqslant i\leqslant k} \text{ est sommable et } \sum_{(i,k)\in(\mathbb{N}^*)^2} A_{i,k} = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i.}$$

IV.5. On recherche un majorant optimal de $\dfrac{k+1}{\sqrt[k]{k!}}$. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $s_k = \dfrac{k+1}{\sqrt[k]{k!}}$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $s_k \leqslant e \iff (k+1)\ln(k+1) \leqslant k + \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} \ln i$.

En composant par ln croissante sur $\mathbb{R}_+^*$: $\quad s_k = \dfrac{k+1}{\sqrt[k]{k!}} \leqslant e \iff \ln(k+1) - \dfrac{1}{k}\ln(k!) \leqslant 1 \iff k\ln(k+1) \leqslant k + \ln k!$.

En additionnant $\ln(k+1)$ de part et d'autre (à la dernière inégalité), on conserve l'équivalence :

$$\boxed{s_k \leqslant e \iff (k+1)\ln(k+1) \leqslant k + \sum_{i=1}^{k+1} \ln i}$$

.

(b) Montrer, par une comparaison série-intégrale que $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)\ln(k+1) - k \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} \ln i$

$t \mapsto \ln t$ est croissante sur $[i, i+1]$, donc $\forall\ t \in [i, i+1]$, $\ln(t) \leqslant \ln(i+1)$. Puis on intègre l'inégalité entre i et $i+1$:

$$\int_i^{i+1} \ln t\mathrm{d}t \leqslant \ln(i+1)$$

Sommons ces inégalités pour i de 1 à k (en exploitant la relation de Chasles) :

$$\int_1^{k+1} \ln t\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{k} \int_i^{i+1} \ln t\mathrm{d}t \leqslant \sum_{i=1}^{k} \ln(i+1) = \sum_{i=2}^{k+1} \ln i = \sum_{i=1}^{k+1} \ln i$$

puisque $\ln 1 = 0$. Enfin, connaissant une primitive de ln : $t \mapsto t\ln t - t$, il vient :

$$\boxed{(k+1)\ln(k+1) - (k+1) - 0 + 1 \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} \ln i}$$

IV.6. Conclure quant à l'inégalité de Carleman.

On a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\quad p_k \leqslant \dfrac{1}{k(k!)^{1/k}} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} ia_i = s_k \sum_{i=1}^{k} \frac{ia_i}{k(k+1)} = \leqslant e\sum_{i=1}^{k} A_{i,k}$.

Or la famille (positive) $(A_{i,k})_{(i,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable, donc $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(e\sum_{i=1}^{+\infty} A_{i,k}\right)$ converge.

Par comparaison de série à termes positifs :

$$\boxed{\sum_{k\geqslant 1} p_k \text{ converge et on a la majoration : } \sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{1/k} \leqslant e\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty} A_{i,k} = e\sum_{i=1}^{+\infty} a_i}$$
