

DEVOIR SURVEILLÉ N°10

Sujet donné le samedi 4 mai 2024, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'**énoncé des formules utilisées**. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

PROBLÈME - DISTANCE À UNE PARTIE DE E (PRÉHILBERTIEN). DÉTERMINANT DE GRAM

Objectifs du problème :

On étudie, à l'aide de déterminants de GRAM la distance d'un vecteur de E (préhilbertien) à une de ses parties.

On commence avec $\dim E \leq 3$ (partie I), puis on généralise le cas pour $\dim E = n$ fini (partie II). En partie III, on étudie un cas où E n'est plus de dimension finie mais F reste de dimension finie (toujours avec les déterminants de GRAM). Enfin, en partie IV, sur un exemple, on étudie une situation sans utiliser la dimension, mais grâce à la complétude.

Notations :

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.

Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est noté généralement $u \cdot v$, la norme $\|u\|$.

I . Petite dimension

I.1. Soient u et v deux vecteurs quelconques de E . On note $\text{Gram}(u, v)$ la matrice définie par :

$$\text{Gram}(u, v) = \begin{bmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G(u, v) = \det[\text{Gram}(u, v)]$$

(a) Montrer que : $G(u, v) \geq 0$.

(b) On note P un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E contenant u et v et B une base orthonormale de P .
Vérifier que : $G(u, v) = [\det(u, v)]_B^2$

(c) A quelle condition a-t-on $G(u, v) = 0$ (nécessaire ? suffisante ?) ?

I.2. Dans toute la suite de la partie I, **n est égal à 3.**

Si u, v, w sont trois vecteurs quelconques de E , on note $\text{Gram}(u, v, w)$ la matrice définie par :

$$\text{Gram}(u, v, w) = \begin{bmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot w \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G(u, v, w) = \det[\text{Gram}(u, v, w)]$$

(a) Calculer $G(u, v, w)$ si u, v, w sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux.

(b) On suppose w orthogonal à u et v . Exprimer $G(u, v, w)$ en fonction de $G(u, v)$.

I.3. (a) Soient u, v, w trois vecteurs quelconques de E . Montrer qu'il existe t et n , vecteurs de E , vérifiant :

$$w = t + n, \quad u \cdot n = v \cdot n = 0, \quad (u, v, t) \text{ liée.}$$

Montrer que, dans ces conditions, on a : $G(u, v, w) = G(u, v, t) + G(u, v, n)$

(b) Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un triplet (x, y, z) de réels différent de $(0, 0, 0)$ tel que $xu + yv + zw$ soit orthogonal à u, v et w .

(ii) $G(u, v, w) = 0$

(c) En déduire que : $G(u, v, w) = 0 \iff (u, v, w) \text{ liée}$

(d) Montrer que $G(u, v, w)$ est un réel positif.

I.4. (a) Soient u, v, w trois vecteurs de E et B une base orthonormale de E .

Montrer que le réel $|\det(u, v, w)|_B$ ne dépend pas du choix de B (orthonormale).

On pourra démontrer que si B' est une autre base orthonormale de E , $\mathcal{M}_{B', B}(\text{id})$ est orthogonale i.e. telle que $M^T \times M = I_3$.

(b) Soit P un plan de E contenant u et v et n_1 un vecteur unitaire orthogonal à P . On désigne par B_1 une base orthonormée de P et on note $B = B_1 \cup \{n_1\}$. En utilisant ces deux bases, montrer que $G(u, v, w) = [\det(u, v, w)]_B^2$

I.5. Considérons une base B orthonormale de E et deux vecteurs u, v quelconques de E .

(a) Montrer que $\Phi : z \mapsto \det(u, v, z)_B$ est une forme linéaire.

En déduire qu'il existe un unique vecteur, a tel que $\forall z \in E, \Phi(z) = a \cdot z$.

Puisque a ne dépend que de u et de v (et de B), on le note maintenant $u \wedge v$.

(b) Montrer que si (u, v) libre alors $u \wedge v \perp u$ et $u \wedge v \perp v$, et que si (u, v) liée, alors $u \wedge v = 0$

(c) Quelle relation entre $u \wedge v$ et $v \wedge u$?

(d) Montrer que $\|u \wedge v\|^2 = G(u, v)$

II . Espace euclidien de dimension n

Soient $u, \dots, u_n$ n vecteurs de E . Pour tout i , tout j , entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note $g_{i,j} = u_i \cdot u_j$.

On note $\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)$ la matrice d'élément général $g_{i,j}$; son déterminant est noté $G(u_1, \dots, u_n) = \det [\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)]$.

On admet le théorème spectral :

Si M est une matrice symétrique, alors il existe D diagonale et P orthogonale (i.e. $P^T \times P = I_n$ telles que $M = P \times D \times P^{-1}$).

II.1. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . On pose, pour tout entier j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $u_j = \sum_{k=1}^n u_{k,j} e_k$

(a) Exprimer, pour tout i , tout j , $g_{i,j}$ en fonction des coordonnées des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ dans la base B .

(b) Soit $A = (u_{i,j})$, A élément de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\text{Gram}(u_1, \dots, u_n) = A^T A$$

(c) En déduire que $G(u_1, \dots, u_n)$ est un réel positif. Montrer que

$$G(u_1, \dots, u_n) \neq 0 \iff (u_1, \dots, u_n) \text{ libre}$$

II.2. On munit E d'un autre produit scalaire noté f_1 . Soit $(u_1, \dots, u_n)$ **une base orthonormale pour f_1** et $G_1 = \text{Gram}(u_1, \dots, u_n)$.

(a) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D , élément de $M_n(\mathbb{R})$, et une matrice P orthogonale telles que : $D = P^T G_1 P$.

(b) Soit $(v_1, \dots, v_n)$ la famille de vecteurs de E de matrice P dans la base $(u_1, \dots, u_n)$. Montrer que : $\text{Gram}(v_1, \dots, v_n) = D$.
En déduire que $(v_1, \dots, v_n)$ est une base orthogonale pour le produit scalaire $(x, y) \mapsto x \cdot y$ et orthonormale pour f_1 .

(c) Montrer que tous les éléments diagonaux de D sont strictement positifs.

II.3. Soit $(u_1, \dots, u_n)$, $(u'_1, \dots, u'_n)$ **deux bases orthonormales pour f_1** .

(a) Montrer qu'il existe S , matrice orthogonale, telle que :

$$G_2 = S^T G_1 S \text{ avec } G_1 = \text{Gram}(u_1, \dots, u_n) \text{ et } G_2 = \text{Gram}(u'_1, \dots, u'_n).$$

(b) Montrer que : $\det(G_1) = \det(G_2)$ et que $\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u'_i\|^2$.

III Espace préhilbertien réel et applications

Dans toute la suite E n'est plus forcément de dimension finie. Si $u_1, \dots, u_r$ sont r vecteurs de E , on note, comme dans la Partie II, $G(u_1, \dots, u_r)$ le déterminant de la matrice de $M_r(\mathbb{R})$ de terme général $u_i \cdot u_j$ (G est un déterminant de Gram).

III.1. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de p vecteurs de E et $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Pour tout x élément de E , on note x_F le projeté orthogonal de x sur F et $x^\perp$ le vecteur tel que : $x = x_F + x^\perp$.

(a) Exprimer x_F en fonction des vecteurs $e_1, \dots, e_p$.

On exploitera des déterminants de Gram dans la formule de Cramer pour inverser un certain système.

(b) On note $d(x, F) = \inf \{ \|x - f\| ; f \in F \}$. Montrer que $(d(x, F))^2 = x \cdot (x - x_F)$.

(c) Montrer que

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, e_1, \dots, e_p)}{G(e_1, \dots, e_p)}}$$

III.2. Dans toute la suite du problème, E désigne l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire

$$f \cdot g = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Pour λ réel strictement positif, on note p_λ l'élément de E défini par : $\forall t \in]0, 1], p_\lambda(t) = t^\lambda, p_\lambda(0) = 0$.

Soit $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs vérifiant :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \lambda_j = +\infty \text{ et } \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\lambda_j} \text{ est une série divergente}$$

(a) Pour n entier non nul, on note $E_n = \text{Vect}(p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_n})$. Vérifier que E_n est un sous-espace vectoriel de E de dimension n .

(b) Soit k un entier fixé pour toute la suite du problème.

Pour n entier non nul, on note :

$$u_n^k = \inf \left\{ \int_0^1 \left(t^k - \sum_{i=1}^n a_i t^{\lambda_i} \right)^2 dt ; (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

En interprétant u_n^k comme le carré d'une distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de E , exprimer u_n^k en fonction de déterminants de Gram .

III.3. Soit p un entier non nul, $(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$ des réels strictement positifs tels que, pour tout i , pour tout j , $i \neq j \Rightarrow b_i \neq b_j$

Le but de cette question est de calculer le déterminant de la matrice de $M_p(\mathbb{R})$ de terme général $\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)$.

Ce déterminant sera noté $C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$.

(a) Soit $F(X) = \frac{(X - a_1) \dots (X - a_{p-1})}{(X + b_1) \dots (X + b_p)}$. Expliciter la décomposition en éléments simples de F .

(b) On note D le déterminant d'ordre p :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \dots & \frac{1}{a_1 + b_{p-1}} & F(a_1) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_p + b_1} & \dots & \frac{1}{a_p + b_{p-1}} & F(a_p) \end{vmatrix}$$

Montrer, à l'aide de III.3.(a), et en calculant D par deux méthodes différentes que :

$$F(a_p) C(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1}) = \frac{\prod_{i=1}^{p-1} (a_i + b_p)}{\prod_{i=1}^{p-1} (b_p - b_i)} C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$$

(c) En déduire :

$$C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq p} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (a_i + b_j)}$$

III.4. (a) En notant $\lambda_0 = k$ et, pour i entier élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$, $\mu_i = \lambda_i + \frac{1}{2}$, exprimer u_n^k à l'aide d'un déterminant du type précédent.

(b) En déduire :

$$u_n^k = \frac{1}{1 + 2k} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{2k + 1}{1 + \lambda_i + k} \right)^2$$

III.5. On suppose que : $\forall i \geq 1, k \neq \lambda_i$.

(a) Montrer qu'il existe un entier non nul N tel que :

$$\forall i \geq N, \quad 1 - \frac{2k + 1}{1 + \lambda_i + k} > 0$$

(b) Quelle est la nature de la série $\sum_{i \geq N} \ln \left(1 - \frac{2k + 1}{1 + \lambda_i + k} \right)$?

En déduire que $u_n^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

IV Exemple d'espace de Hilbert et distance

On note E , le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites numériques définies sur $\mathbb{R}$. Autrement écrit : $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On considère $F = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid \sum_{k \geq 0} u_k^2 \text{ converge}\}$, l'ensemble des suites « de carré sommable ».

IV.1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la suite u suivante appartienne à F .

$$u : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^\alpha \left(n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) - \sin \frac{1}{n} \right)$$

IV.2. (a) Soient $u, v \in E$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n |u_k v_k| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k^2 \sum_{k=0}^n v_k^2}$

(b) En déduire que si $u, v \in F$, alors $\sum_{k \geq 0} u_k v_k$ est convergente.

(c) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

IV.3. On définit pour tout $u, v \in F$, $u \cdot v = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$ (série convergente d'après la question précédente)

(a) Montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur F .

Ainsi, F est un espace vectoriel préhilbertien réel. On note $\|\cdot\|$, la norme associée ($\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$).

(b) Comment s'exprime l'inégalité triangulaire pour ce produit scalaire ?

(c) On note $G_n = \{u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E \mid \forall k \geq n, u_k = 0\}$. On admet que G_n est un sous-espace vectoriel de F . Pour toute suite $u \in F$, exprimer $d_n = d(u, G_n)$, la distance de u à G_n . Montrer que (d_n) converge vers 0.

IV.4. On rappelle qu'une suite $u \in E$ est de Cauchy (ou vérifie le critère de Cauchy) si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p > q \geq N, |u_p - u_q| \leq \epsilon$$

(a) Montrer que si $u = (u_n)$ converge alors (u_n) est de Cauchy.

(b) Réciproquement, on suppose que u est une suite qui vérifie le critère de Cauchy.

i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists a_n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq a_n, |u_p - u_{a_n}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Quitte à prendre $a_{n+1} = a_n$, il existe donc une suite (a_n) croissante d'entiers telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq a_n, |u_p - u_{a_n}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

ii. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=a_n}^{a_{n+1}-1} (u_{k+1} - u_k)$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} |v_n|$ converge.

iii. En déduire, que la suite (u_n) converge.

On vient de démontrer que $\mathbb{R}$ est complet : ses suites sont convergentes si et seulement si elles sont de Cauchy.

IV.5. Considérons une suite $(u^p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F . Il s'agit donc d'une suite de suites. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u^p = (u_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose que (u^p) vérifie le critère de Cauchy (dans l'espace F normé) :

$$\forall \epsilon > 0, \exists P \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p > q \geq P, \|u^p - u^q\| \leq \epsilon$$

(a) Fixons $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $\exists P \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq q \geq P, |u_n^p - u_n^q| \leq \epsilon$.

(b) En déduire que, toujours pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $(u_n^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle qui vérifie le critère de Cauchy.

On note $u_n := \lim_{p \rightarrow +\infty} u_n^p$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite des limites pour les différentes valeurs de $\mathbb{N}$.

(c) Montrer que $(u^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers u i.e. $(\|u^p - u\|)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle qui converge vers 0.

On a ainsi démontré, avec l'ensemble de ces questions, que F est un espace préhilbertien réel, complet.

On dit que c'est un espace de HILBERT

IV.6. Soit $\rho \in [0, 1[$. Considérons $C_\rho = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \rho^n\}$.

(a) Montrer que $C_\rho \subset F$. On admet qu'il ne s'agit pas d'un sous-espace vectoriel.

Montrer également que C_ρ est convexe : $\forall u, v \in C_\rho, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda u + (1 - \lambda)v \in C_\rho$.

(b) Soit $w \in F$, fixé. On note $\delta := d(w, C_\rho) = \inf\{\|w - u\|, u \in C_\rho\}$.

Pourquoi δ existe bien ? Montrer qu'il existe une suite (de suites) $(u^r)_{r \in \mathbb{N}}$ de C_ρ tel que $\|w - u^r\| \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \delta (= d(w, C_\rho))$.

(c) Montrer que pour tout $r > s$:

$$\|(w - u^r) + (w - u^s)\|^2 + \|u^r - u^s\|^2 = 2\|w - u^r\|^2 + 2\|w - u^s\|^2 \quad \text{inégalité du parallélogramme}$$

(d) En exploitant la convexité de C_ρ , en déduire $\|u^r - u^s\|^2 \leq 2(\|w - u^r\|^2 - \delta^2) + 2(\|w - u^s\|^2 - \delta^2)$, puis que (u^r) est de Cauchy

(e) En déduire que (u^r) converge. Montrer que $U := \lim_r u^r$ est dans C_ρ et vérifie $\|w - U\| = \delta$

(f) Montrer que U est la seule suite de C_ρ vérifiant $\|w - U\| = \delta$.

On a ainsi vu sur un exemple comment élargir la notion de distance à un convexe (fermé) dans un espace de Hilbert.

D'une certaine façon, U est le projeté (orthogonal) de w sur U .

• • • FIN • • •

Correction

PROBLÈME - DISTANCE À UNE PARTIE DE E (PRÉHILBERTIEN). DÉTERMINANT DE GRAM

I . Petite dimension

I.1. Soient u et v deux vecteurs quelconques de E . On note $\text{Gram}(u, v)$ la matrice définie par :

$$\text{Gram}(u, v) = \begin{bmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G(u, v) = \det[\text{Gram}(u, v)]$$

(a) Montrer que : $G(u, v) \geq 0$.

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz(-Bouniakovsky) :

$$\forall u, v \in E, \quad |u \cdot v| \leq \|u\| \times \|v\|$$

Donc en élevant au carré, on trouve

$$G(u, v) = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2 \geq 0$$

(b) On note P un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E contenant u et v et B une base orthonormale de P .
Vérifier que : $G(u, v) = [\det_B(u, v)]^2$

Supposons que $B = (a, b)$ (a et b sont les deux vecteurs de la base orthonormales).

Alors il existe $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ tel que $u = u_1 a + u_2 b$ et $v = v_1 a + v_2 b$.

Alors par bilinéarité du produit scalaire :

$$u \cdot v = (u_1 a + u_2 b) \cdot (v_1 a + v_2 b) = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad u \cdot u = u_1^2 + u_2^2 \quad v \cdot v = v_1^2 + v_2^2$$

puisque (a, b) est une base orthonormale Et donc

$$\begin{aligned} G(u, v) &= (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 = u_1^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 - u_1^2 v_1^2 - u_2^2 v_1^2 - 2u_1 v_1 u_2 v_2 \\ &= u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 - 2u_1 v_2 u_2 v_1 = (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2 \end{aligned}$$

$$G(u, v) = [\det_B(u, v)]^2$$

(c) A quelle condition a-t-on $G(u, v) = 0$ (nécessaire ? suffisante ?) ?

On a l'équivalence :

$$G(u, v) = 0 \iff \det_B(u, v) = 0 \iff (u, v) \text{ liée.}$$

(On aurait également pu raisonner avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

I.2. Dans toute la suite de la partie I, **n est égal à 3.**

Si u, v, w sont trois vecteurs quelconques de E , on note $\text{Gram}(u, v, w)$ la matrice définie par :

$$\text{Gram}(u, v, w) = \begin{bmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot w \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G(u, v, w) = \det[\text{Gram}(u, v, w)]$$

(a) Calculer $G(u, v, w)$ si u, v, w sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux.

On a, puisque u, v, w sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux : $u \cdot v = v \cdot w = u \cdot w = 0$.

Et donc la matrice $\text{Gram}(u, v, w)$ est diagonale :

$$G(u, v, w) = (\|u\| \|v\| \|w\|)^2$$

(b) On suppose w orthogonal à u et v . Exprimer $G(u, v, w)$ en fonction de $G(u, v)$.

Dans ce cas, il s'agit d'un calcul de déterminant par blocs :

$$G(u, v, w) = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v & 0 \\ v \cdot u & v \cdot v & 0 \\ 0 & 0 & w \cdot w \end{vmatrix} = (w \cdot w) \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{vmatrix}$$

$$\text{Ainsi, dans ce cas : } G(u, v, w) = \|w\|^2 \times G(u, v).$$

I.3. (a) Soient u, v, w trois vecteurs quelconques de E . Montrer qu'il existe t et n , vecteurs de E , vérifiant :

$$w = t + n, \quad u \cdot n = v \cdot n = 0, \quad (u, v, t) \text{ liée.}$$

Montrer que, dans ces conditions, on a : $G(u, v, w) = G(u, v, t) + G(u, v, n)$

• Si (u, v) liée.

Notons $F = \text{vect}(u)$. Considérons la projection orthogonale de w sur F .

Alors il existe $t \in F$ et $n \in F^\perp$ tel que $w = t + n$.

Puis (u, v, t) liée (éléments de F), $u \cdot n = v \cdot n = 0$ car $n \in F^\perp$.

• Si (u, v) libre.

Dans E euclidien de dimension 3, l'espace $F = \text{vect}(u, v)$ est de dimension 2.

Il admet un supplémentaire de dimension 1 de vecteur directeur $n' : F^\perp = \text{vect}(n')$.

On a alors $u \cdot n' = v \cdot n' = 0$.

Puis en prenant la projection orthogonale de w sur F et donc de direction $F^\perp = \text{vect}(n')$,

il existe $t \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $w = t + \lambda n'$.

Enfin on considère $n = \lambda n'$, par linéarité : $u \cdot n = v \cdot n = 0$ et $w = t + n$.

Comme $t \in F = \text{vect}(u, v)$ alors (u, v, t) liée.

Dans tous les cas :

$$\boxed{\text{Il existe } t \text{ et } n, \text{ vecteurs de } E, \text{ vérifiant : } w = t + n, \quad u \cdot n = v \cdot n = 0, \quad (u, v, t) \text{ liée.}}$$

On a alors (en appliquant la linéarité par rapport à la dernière colonne :

$$G(u, v, w) = G(u, v, t + n) = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot t + u \cdot n \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot t + v \cdot n \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot t + w \cdot n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot t \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot t \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot n \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot n \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot n \end{vmatrix}$$

Comme (u, v, t) est liée, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u + \beta v + \gamma t = 0$.

Et donc pour la première matrice (de droite), on a la relation linéaires entre colonne : $\alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 = 0$ (colonne nulle).

Donc cette matrice est nulle, puis on remplace w par $t + n$ sur la dernière ligne et par linéarité :

$$G(u, v, w) = 0 + \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot n \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot n \\ t \cdot u & t \cdot v & t \cdot n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot n \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot n \\ n \cdot u & n \cdot v & n \cdot n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot n \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot n \\ t \cdot u & t \cdot v & t \cdot n \end{vmatrix} + G(u, v, n)$$

On va montrer que le déterminant qui reste est nul. En effet :

— comme $n \perp u, n \perp v$, on a $u \cdot n = v \cdot n = 0$

— Puis : ou bien (u, v) liée donc la première colonne et la seconde colonne sont colinéaires et le déterminant est nul,
ou bien (u, v) libre et donc comme (u, v, t) lié, nécessairement : $t \in \text{vect}(u, v)$.
et donc $t \cdot n = 0$ et ainsi la troisième colonne de ce déterminant est nul.

Bilan, comme $G(u, v, t) = 0$:

$$\boxed{G(u, v, w) = G(u, v, n) = G(u, v, t) + G(u, v, n)}$$

(b) Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe un triplet (x, y, z) de réels différent de $(0, 0, 0)$ tel que $xu + yv + zw$ soit orthogonal à u, v et w .
- (ii) $G(u, v, w) = 0$

Supposons qu'il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tel que $(xu + yv + zw) \perp (\text{vect}(u, v, w))$.

Notons $s = xu + yv + zw$, ce vecteur orthogonal à u, v et w .

Considérons les trois colonnes de $\text{Gram}(u, v, w)$, notée C_1, C_2, C_3 respectivement.

$$xC_1 + yC_2 + zC_3 = x \begin{pmatrix} u \cdot u \\ v \cdot u \\ w \cdot u \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} u \cdot v \\ v \cdot v \\ w \cdot v \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} u \cdot w \\ v \cdot w \\ w \cdot w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cdot (xu + yv + zw) \\ v \cdot (xu + yv + zw) \\ w \cdot (xu + yv + zw) \end{pmatrix} = 0_3$$

Ainsi, les colonnes de $\text{Gram}(u, v, w)$ sont linéairement dépendantes et donc $G(u, v, w) = 0$.

Supposons que $G(u, v, w) = 0$. On peut tenter le raisonnement directement inversé.

Alors les colonnes de $G(u, v, w)$ forment une famille liée.

Donc il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tel que $xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0_3$.

On a donc par linéarité, pour le premier coefficient : $x(u \cdot u) + y(u \cdot v) + z(u \cdot w) = u \cdot (xu + yv + zw) = 0$.

et de même pour les autres coefficients : $v \cdot (xu + yv + zw) = 0 = w \cdot (xu + yv + zw)$.

Ainsi, il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tel que $(xu + yv + zw) \perp (\text{vect}(u, v, w))$.

$$\boxed{\text{Donc : } [\text{il existe } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \text{ tel que } (xu + yv + zw) \perp (\text{vect}(u, v, w))] \iff G(u, v, w) = 0.}$$

(c) En déduire que : $G(u, v, w) = 0 \iff (u, v, w)$ liée

Supposons que $G(u, v, w) = 0$.

Alors il existe $s = xu + yv + zw$, non nul tel que $s \in (\text{vect}(u, v, w))^\perp$.

Nécessairement, il faut que $(\text{vect}(u, v, w))$ n'est pas égal à E .

Il s'agit donc d'un sous-espace de E strictement plus petit, donc de dimension ≤ 2 .

Et donc nécessairement : (u, v, w) liée.

Réciproquement, si (u, v, w) libre.

Il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tel que $xu + yv + zw = 0$,

On a alors $(xu + yv + zw)$ orthogonal à u, v et w (puisque'il s'agit du vecteur nul).

Et donc, d'après la question précédente : $G(u, v, w) = 0$.

$$G(u, v, w) = 0 \iff (u, v, w) \text{ liée.}$$

(d) Montrer que $G(u, v, w)$ est un réel positif.

On fait un synthèse des questions précédentes (3.(a), puis 3.(c) et enfin 2.(b)) en conservant les notations :

$$G(u, v, w) = G(u, v, t) + G(u, v, n) = 0 + G(u, v, n) = \|n\|^2 G(u, v)$$

car (u, v, t) liée et n orthogonal à u et v .

$$\text{Par produit de nombres positifs (1.(a)), } G(u, v, w) \text{ est un réel positif.}$$

I.4. (a) Soient u, v, w trois vecteurs de E et B une base orthonormale de E .

Montrer que le réel $|\det_B(u, v, w)|$ ne dépend pas du choix de B .

On pourra démontrer que si B' est une autre base orthonormale de E , $\mathcal{M}_{B', B}(\text{id})$ est orthogonale i.e. telle que $M^T \times M = I_3$.

Soit B' , une seconde base orthonormée. On a vu dans le cours :

$$\det_B(u, v, w) = \det_B(B') \times \det_{B'}(u, v, w)$$

Notons $M = \mathcal{M}_{B', B}(\text{id})$, alors $\det_B(B')$ est exactement $\det M$.

Mais M est la matrice d'une base orthonormale écrite dans une base orthonormale.

On a vu cours que dans ce cas $M^T \times M = I_3$ (c'est une matrice orthogonale).

Par conséquent

$$1 = \det I_3 = \det(M^T \times M) = \det M^T \times \det M = (\det M)^2$$

Et donc $\det_B(B') = \det M = \pm 1$. En prenant la valeur absolue :

$$|\det_B(u, v, w)| = |\pm 1| \times |\det_{B'}(u, v, w)| = |\det_{B'}(u, v, w)|$$

$$\text{Donc le réel } |\det_B(u, v, w)| \text{ ne dépend pas du choix de } B \text{ (base orthonormale).}$$

(b) Soit P un plan de E contenant u et v et n_1 un vecteur unitaire orthogonal à P . On désigne par B_1 une base orthonormée de P et on note $B = B_1 \cup \{n_1\}$. En utilisant ces deux bases, montrer que $G(u, v, w) = [\det_B(u, v, w)]^2$

Par construction B est une base orthonormée de $\text{vect}(u, v, n_1) = E$, puisque E est de dimension égale à 3.

Si (u, v, w) lié, alors on a vu que $G(u, v, w) = 0$ et de même $\det_B(u, v, w) = 0$.

Supposons donc maintenant que (u, v, w) libre. Donc on a exactement $w = \lambda n_1 + t$ avec (u, v, t) lié.

On applique le résultat de la question I.3.(a) : $G(u, v, w) = G(u, v, t) + G(u, v, \lambda n_1)$.

Mais (u, v, t) est lié donc $G(u, v, t) = 0$ (1.3(b)). Puis n_1 est orthogonale à u et v donc d'après 1.2(b) :

$$G(u, v, w) = \|\lambda n_1\|^2 G(u, v) = \lambda^2 G(u, v)$$

Et par ailleurs, en exploitant la linéarité par rapport à la troisième colonne (et (u, v, t) lié) :

$$\det_B(u, v, w) = \det_B(u, v, t + \lambda_1 n) = \lambda_1 \det_B(u, v, n_1) = \lambda_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

où on notera $B_1 = (u_1, u_2)$ et considérera : $u = a_1 u_1 + a_2 u_2$ et $v = b_1 u_1 + b_2 u_2$.

On trouve $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \det_{B_1}(u, v)$ Ainsi, en élevant tout au carré (et en exploitant 1.(b)) :

$$G(u, v, w) = \|\lambda n_1\|^2 G(u, v) = \lambda^2 G(u, v) = \lambda^2 [\det_{B_1}(u, v)]^2 = [\det_B(u, v, w)]^2$$

I.5. Considérons une base B orthonormale de E et deux vecteurs u, v quelconques de E .

- (a) Montrer que $\Phi : z \mapsto \det_B(u, v, z)$ est une forme linéaire.

En déduire qu'il existe un unique vecteur, a tel que $\forall z \in E, \Phi(z) = a \cdot z$.

Puisque la fonction $\det$ est 3-linéaire par rapport aux colonnes, Φ est linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (comme le déterminant). Donc $\Phi \in E^*$. Il s'agit d'une application directe du lemme de Riesz.

$$\theta : E \rightarrow E^*, a \mapsto (z \mapsto a \cdot z) \text{ est un isomorphisme}$$

Donc, comme $\Phi \in E^*$, il admet un unique antécédent a par θ :

$$\boxed{\text{il existe un unique vecteur, } a \text{ tel que } \forall z \in E, \Phi(z) = a \cdot z.}$$

Puisque a ne dépend que de u et de v (et de B), on le note maintenant $u \wedge v$.

- (b) Montrer que si (u, v) libre alors $u \wedge v \perp u$ et $u \wedge v \perp v$, et que si (u, v) liée, alors $u \wedge v = 0$

On suppose que (u, v) libre.

On a par construction de $u \wedge v : (u \wedge v) \cdot u = \det_B(u, v, u) = 0$ car il y a deux colonnes nulles.

De même $(u \wedge v) \cdot v$. (On ne se sert pas de la liberté)

$$\boxed{u \wedge v \perp u \text{ et } u \wedge v \perp v.}$$

On suppose que (u, v) liée, alors pour tout $z \in E, \Phi(z) = \det_B(u, v, z) = 0$.

Donc Φ est l'application nulle, par injectivité de θ :

$$\boxed{u \wedge v = 0}$$

- (c) Quelle relation entre $u \wedge v$ et $v \wedge u$?

Comme $\det$ est antisymétrique,

$$\forall z \in E, (u \wedge v) \cdot z = \det_B(u, v, z) = -\det_B(v, u, z) = -(v \wedge u) \cdot z$$

Ainsi pour tout $z \in E, (u \wedge v + v \wedge u) \cdot z = 0$. Comme le produit scalaire est non dégénéré (ou avec la méthode dite de MAXIME avec $z = (u \wedge v - v \wedge u)$), nécessairement : $u \wedge v + v \wedge u = 0$.

$$\boxed{u \wedge v = v \wedge u}$$

- (d) Montrer que $\|u \wedge v\|^2 = G(u, v)$

On applique la formule précédente, avec $y = u \wedge v$, on a donc (cf question précédente) :

$$\|u \wedge v\|^2 = (u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = \det_B(u, v, u \wedge v) = \sqrt{G(u, v, u \wedge v)} = \|u \wedge v\| \sqrt{G(u, v)}$$

En élevant au carré, puis simplifiant par $\|u \wedge v\|^2$:

$$\boxed{\|u \wedge v\|^2 = G(u, v)}$$

Remarques !

Il faudrait être attentif aux l'orientation des bases ici. Mais comme on fait le calcul avec des carrés de déterminant, cela ne change rien. Donc on s'en passe (ce n'était pas le cas dans le sujet original : Centrale PSI - 1999)

II . Espace euclidien de dimension n

Soient $u, \dots, u_n$ n vecteurs de E . Pour tout i , tout j , entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note $g_{i,j} = u_i \cdot u_j$

On note $\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)$ la matrice d'éléments généraux $g_{i,j}$ et le déterminant de cette matrice est noté

$$G(u_1, \dots, u_n) = \det [\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)]$$

On admet le théorème spectral :

Si M est une matrice symétrique, alors il existe D diagonale et P orthogonale (i.e. $P^T \times P = I_n$ telles que $M = P \times D \times P^{-1}$).

II.1. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . On pose, pour tout entier j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $u_j = \sum_{k=1}^n u_{k,j} e_k$

(a) Exprimer, pour tout i , tout j , $g_{i,j}$ en fonction des coordonnées des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ dans la base B .

Pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, par bilinéarité du produit scalaire :

$$g_{i,j} = u_i \cdot u_j = \sum_{k=1}^n u_{k,i} e_k \cdot \sum_{h=1}^n u_{h,j} e_h = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n u_{k,i} u_{h,j} e_k \cdot e_h$$

Mais comme B est orthonormée, $e_k \cdot e_h = \delta_{k,h}$, et donc

$$g_{i,j} = \sum_{k=1}^n u_{k,i} u_{k,j}$$

(b) Soit $A = (u_{i,j})$, A élément de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que
 $\text{Gram}(u_1, \dots, u_n) = A^T A$

Pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$,

$$[A^T A]_{i,j} = \sum_{k=1}^n [A^T]_{i,k} [A]_{k,j} = \sum_{k=1}^n n[A]_{k,i} [A]_{k,j} = \sum_{k=1}^n u_{k,i} u_{k,j} = g_{i,j} = [\text{Gram}]_{i,j}$$

d'après la question précédente.

On a donc

$$\text{Gram}(u_1, \dots, u_n) = A^T \times A$$

(c) En déduire que $G(u_1, \dots, u_n)$ est un réel positif. Montrer que
 $G(u_1, \dots, u_n) \neq 0 \iff (u_1, \dots, u_n)$ libre

On a alors

$$G(u_1, \dots, u_n) = \det(\text{Gram}) = \det(A^T A) = \det(A^T) \det A = (\det A)^2$$

Comme $\det A$ est un réel,

$$G(u_1, \dots, u_n) \text{ est un réel positif.}$$

Et, on a alors l'équivalence :

$$G(u_1, \dots, u_n) = 0 \iff \det A = 0 \iff \det (\mathcal{M}_B(u_1, \dots, u_n)) = 0 \iff (u_1, \dots, u_n) \text{ liée}$$

II.2. On munit E d'un autre produit scalaire noté f_1 . Soit $(u_1, \dots, u_n)$ **une base orthonormale pour f_1** et $G_1 = \text{Gram}(u_1, \dots, u_n)$.

(a) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D , élément de $M_n(\mathbb{R})$, et une matrice P orthogonale telles que : $D = P^T G_1 P$.

La matrice G_1 est symétrique, puisque G_1 est une matrice de Gram et que $u_i \cdot u_j = u_j \cdot u_i$.

On applique donc le théorème spectral : $\exists D, P$ telles que $G_1 = P D P^{-1}$ avec $P^{-1} = P^T$ car P orthogonale et D diagonale.

$$\text{il existe une matrice diagonale } D, \text{ élément de } M_n(\mathbb{R}), \text{ et une matrice } P \text{ orthogonale telles que : } D = P^T G_1 P$$

(b) Soit $(v_1, \dots, v_n)$ la famille de vecteurs de E de matrice P dans la base $(u_1, \dots, u_n)$. Montrer que : $\text{Gram}(v_1, \dots, v_n) = D$.
 En déduire que $(v_1, \dots, v_n)$ est une base orthogonale pour le produit scalaire $(x, y) \mapsto x \cdot y$ et orthonormale pour f_1 .

Soient $i, j \in \mathbb{N}$,

$$[D]_{i,j} = \sum_{k,h} [P^T]_{i,k} [G_1]_{k,h} [P]_{h,j} = \sum_{k,h} [P^T]_{i,k} (u_k \cdot u_h) [P]_{h,j} = \left(\sum_{k=1}^n [P]_{k,i} u_k \right) \cdot \left(\sum_{h=1}^n [P]_{h,j} u_h \right)$$

Or par construction de P , $\sum_{k=1}^n [P]_{k,i} u_k = v_i$ et $\sum_{h=1}^n [P]_{h,j} u_h = v_j$.

$$D = (v_i \cdot v_j)_{i,j} = \text{Gram}(v_1, \dots, v_n)$$

Comme D est diagonale, on a $v_i \cdot v_j = [D]_{i,j} = 0$ dès que $i \neq j$. Donc $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est orthogonale pour $u \cdot v$.
alors que (par bilinéarité de f_1) :

$$f_1(v_i, v_j) = f_1 \left(\sum_{k=1}^n [P]_{k,i} u_k; \sum_{h=1}^n [P]_{h,j} u_h \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n [P]_{k,i} [P]_{h,j} f_1(u_k, u_h) = \sum_{k=1}^n [P]_{k,i} [P]_{k,j}$$

car $f_1(u_k, u_h) = \delta_{k,h}$ et donc en transposant P :

$$f_1(v_i, v_j) = \sum_{k=1}^n [P^T]_{i,k} [P]_{k,j} = [P^T \times P]_{i,j} = [I_n]_{i,j} = \delta_{i,j}$$

Donc $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est orthonormée pour f_1

$$(v_1, \dots, v_n) \text{ est une base orthogonale pour le produit scalaire } (x, y) \mapsto x \cdot y \text{ et orthonormale pour } f_1.$$

(c) Montrer que tous les éléments diagonaux de D sont strictement positifs.

D'après la question précédente : $[D]_{i,i} = v_i \cdot v_i = \|v_i\|^2$, donc

$$\text{tous les éléments diagonaux de } D \text{ sont strictement positifs.}$$

II.3. Soit $(u_1, \dots, u_n), (u'_1, \dots, u'_n)$ deux bases orthonormales pour f_1 .

(a) Montrer qu'il existe S , matrice orthogonale, telle que :

$$G_2 = S^T G_1 S \text{ avec } G_1 = \text{Gram}(u_1, \dots, u_n) \text{ et } G_2 = \text{Gram}(u'_1, \dots, u'_n).$$

On note S , la matrice des coordonnées de $(u'_1, \dots, u'_n)$ dans la base $(u_1, \dots, u_n)$.

On a donc pour tout $i, j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} [S^T \times S]_{i,j} &= \sum_{k=1}^n [S^T]_{i,k} [S]_{k,j} = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n [S]_{k,i} [S]_{h,j} \delta_{k,h} = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n [S]_{k,i} [S]_{h,j} f_1(u_k, u_h) \\ &= f_1 \left(\sum_{k=1}^n [S]_{k,i} u_k; \sum_{h=1}^n [S]_{h,j} u_h \right) = f_1(u'_i, u'_j) = \delta_{i,j} = [I_n]_{i,j} \end{aligned}$$

Donc $S^T \times S = I_n$.

Et de même, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$:

$$[G_2]_{i,j} = u'_i \cdot u'_j = \left(\sum_{k=1}^n [S]_{k,i} u_k \right) \cdot \left(\sum_{h=1}^n [S]_{h,j} u_h \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n [S^T]_{i,k} [S]_{h,j} (u_k \cdot u_h) = \sum_{k=1}^n [S^T]_{i,k} [G_1]_{k,h} [S]_{h,j} = [S^T \times G \times S]_{i,j}$$

$$S^T \times S = I_n \text{ et } S^T \times G_1 \times S = G_2$$

(b) Montrer que : $\det(G_1) = \det(G_2)$ et que $\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u'_i\|^2$.

On a donc

$$\det G_2 = \det(S^T G_1 S) = \det(S^T) \det G_1 \det S = \det G_1 \times \det S^T \det S = \det G_1 \det(S^T S) = \det G_1 \det I_n = \det G_1$$

Puis

$$\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 = \text{tr}(G_2) = \text{tr}(S^T G_1 S) = \text{tr}(G_1 S S^T) = \text{tr}(G_1) = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$$

$$\det(G_1) = \det(G_2) \text{ et } \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u'_i\|^2$$

III Espace préhilbertien réel et applications

Dans toute la suite E n'est plus forcément de dimension finie. Si $u_1, \dots, u_r$ sont r vecteurs de E , on note, comme dans la Partie II, $G(u_1, \dots, u_r)$ le déterminant de la matrice de $M_r(\mathbb{R})$ de terme général $u_i \cdot u_j$ (G est un déterminant de Gram).

III.1. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de p vecteurs de E et $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Pour tout x élément de E , on note x_F le projeté orthogonal de x sur F et $x^\perp$ le vecteur tel que : $x = x_F + x^\perp$.

(a) Exprimer x_F en fonction des vecteurs $e_1, \dots, e_p$.

On exploitera des déterminants de Gram dans la formule de Cramer pour inverser un certain système.

$(e_1, \dots, e_p)$ est une famille et est génératrice de F , donc elle en forme une base.

$x_F \in F$, donc il existe $a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ tel que $x_F = \sum_{i=1}^p a_i e_i$.

Puis comme $x = x_F + x^\perp$, on a $x \cdot e_k = x_F \cdot e_k + x^\perp \cdot e_k = x_F \cdot e_k$, puisque $x^\perp \in F^\perp$.

, on a donc les p équations (paramétrées par k) : $x \cdot e_k = \sum_{i=1}^p a_i e_i \cdot e_k$.

Ces équations forment un système dont les inconnues sont $(a_1, a_2, \dots, a_p)$.

$$\begin{cases} e_1 \cdot e_1 a_1 + e_2 \cdot e_1 a_2 + \dots + e_p \cdot e_1 a_p = x \cdot e_1 \\ e_1 \cdot e_2 a_1 + e_2 \cdot e_2 a_2 + \dots + e_p \cdot e_2 a_p = x \cdot e_2 \\ \vdots \\ e_1 \cdot e_p a_1 + e_2 \cdot e_p a_2 + \dots + e_p \cdot e_p a_p = x \cdot e_p \end{cases}$$

Le déterminant du système est exactement $G(e_1, e_2, \dots, e_p)$.

On peut appliquer la formule de Cramer, pour obtenir a_i , il faut alors prendre le déterminant avec comme i -ième colonne, le second membre. Autrement écrit, il ne s'agit plus de $e_i \cdot e_k$, mais $x \cdot e_k$.

On pourrait croire retrouver $G(e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_p)$, sauf que la i -ème ligne n'est pas liée à x .

Ainsi, on a $a_i = \frac{\Delta(e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_p)}{G(e_1, e_2, \dots, e_p)}$ avec $\Delta(e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_p) = |(d_{k,h})_{k,h}|$ et $d_{k,h} = \begin{cases} e_k \cdot e_h & \text{si } h \neq i \\ e_k \cdot x & \text{si } h = i \end{cases}$.

$$x_F = \sum_{i=1}^p \frac{\Delta(e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_p)}{G(e_1, e_2, \dots, e_p)} e_i$$

(b) On note $d(x, F) = \inf \{ \|x - f\| ; f \in F \}$. Montrer que $(d(x, F))^2 = x \cdot (x - x_F)$.

On a vu dans le cours, $d(x, F) = \|x - x_F\|$.

Au carré : $(d(x, F))^2 = \|x - x_F\|^2 = (x - x_F) \cdot (x - x_F) = x \cdot (x - x_F) + x_F \cdot (x - x_F)$.

Or $x_F \in F$ et $x - x_F \in F^\perp$ donc $x_F \cdot (x - x_F) = 0$. Ainsi :

$$(d^2(x, F))^2 = x \cdot (x - x_F)$$

(c) Montrer que

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, e_1, \dots, e_p)}{G(e_1, \dots, e_p)}}$$

$x_F = \sum_{i=1}^p a_i e_i$. Considérons $\text{Gram}(x, e_1, \dots, e_p)$, de taille $p+1$ et faisons la transformation linéaire sur les colonnes : $C_1 \leftarrow C_1 - a_1 C_2 - a_2 C_3 - \dots - a_p C_{p+1}$.

Le déterminant est alors inchangé :

$$G(x, e_1, \dots, e_p) = \begin{vmatrix} x \cdot (x - x_F) & x \cdot e_1 & \dots & x \cdot e_p \\ e_1 \cdot (x - x_F) & e_1 \cdot e_1 & \dots & e_1 \cdot e_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_p \cdot (x - x_F) & e_p \cdot e_1 & \dots & e_p \cdot e_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \cdot (x - x_F) & x \cdot e_1 & \dots & x \cdot e_p \\ 0 & e_1 \cdot e_1 & \dots & e_1 \cdot e_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & e_p \cdot e_1 & \dots & e_p \cdot e_p \end{vmatrix}$$

car $x - x_F \in F^\perp$ et donc $e_i \cdot (x - x_F) = 0$.

Et donc $G(x, e_1, e_2, \dots, e_p) = x(x - x_F) \times G(e_1, e_2, \dots, e_p)$.

En reprenant le résultat de la question précédente, on trouve donc

$$d(x, F) = \sqrt{x \cdot (x - x_F)} = \sqrt{\frac{G(x, e_1, \dots, e_p)}{G(e_1, \dots, e_p)}}$$

III.2. Dans toute la suite du problème, E désigne l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire

$$f.g = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Pour λ réel strictement positif, on note p_λ l'élément de E défini par : $\forall t \in]0, 1], p_\lambda(t) = t^\lambda, p_\lambda(0) = 0$.

Soit $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs vérifiant :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \lambda_j = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\lambda_j} \text{ est une série divergente}$$

(a) Pour n entier non nul, on note $E_n = \text{Vect}(p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_n})$. Vérifier que E_n est un sous-espace vectoriel de E de dimension n .

Il suffit de montrer que la famille $(p_{\lambda_1}, p_{\lambda_2}, \dots, p_{\lambda_n})$ est une famille libre, on aura alors une base de E de cardinal égal à n .

Soit $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ tel que $\sum_{i=1}^n \mu_i p_{\lambda_i} = 0$.

Les fonctions p_λ sont dérivables et pour tout $t \in]0, 1]$, $p'_\lambda(t) = \lambda t^{\lambda-1}$ et donc en multipliant par t , on trouve : $\sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i p_{\lambda_i} = 0$.

On applique $p-1$ fois ce processus, on a les équations $\forall k \leq p-1 : \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i^k p_{\lambda_i} = 0$.

puis, on prend la valeur en 1 : $\forall k \leq p-1 : \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i^k = 1$.

Ainsi $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ est la solution du système linéaire homogène de p équations dont le déterminant du système associé est exactement le déterminant de VANDERMONDE en $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$.

Ce déterminant égale à $\prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i)$ est non nul, puisque les λ_k sont distincts et donc le système homogène en question n'admet qu'une solution : la solution nulle.

Donc $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) = (0, 0, \dots, 0)$. Et donc $(p_{\lambda_1}, p_{\lambda_2}, \dots, p_{\lambda_n})$ est une famille libre.

E_n est un sous-espace vectoriel de E de dimension n .

(b) Soit k un entier fixé pour toute la suite du problème.

Pour n entier non nul, on note :

$$u_n^k = \inf \left\{ \int_0^1 \left(t^k - \sum_{i=1}^n a_i t^{\lambda_i} \right)^2 dt ; (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

En interprétant u_n^k comme le carré d'une distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de E , exprimer u_n^k en fonction de déterminants de Gram .

Notons $f_k : t \mapsto t^k$.

$$u_n^k = \inf \{ \|f_k - \sum_{i=1}^n a_i p_{\lambda_i}\|^2, (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \} = \inf \{ \|f_k - s\|^2, s \in E_n \} = d^2(f_k, E_n)$$

Ainsi, en exploitant la réponse de la question 1.(c) :

$$u_n^k = \frac{G(f_k, p_{\lambda_1}, p_{\lambda_2}, \dots, p_{\lambda_n})}{G(p_{\lambda_1}, p_{\lambda_2}, \dots, p_{\lambda_n})}$$

III.3. Soit p un entier non nul, $(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$ des réels strictement positifs tels que, pour tout i , pour tout j , $i \neq j \Rightarrow b_i \neq b_j$

Le but de cette question est de calculer le déterminant de la matrice de $M_p(\mathbb{R})$ de terme général $\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)$.

Ce déterminant sera noté $C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$.

(a) Soit $F(X) = \frac{(X - a_1) \dots (X - a_{p-1})}{(X + b_1) \dots (X + b_p)}$. Expliciter la décomposition en éléments simples de F .

Le numérateur de F est de degré $p-1$, son dénominateur de degré p , donc F n'admet pas de partie entière.

Les p pôles de F sont les $(-b_k)_{k \in \mathbb{N}_p}$, ils sont tous simples, donc il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ tels que

$$F(X) = \sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k}{X + b_k} \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \frac{\prod_{i \in \mathbb{N}_{p-1}} (-b_k - a_i)}{\prod_{i \in \mathbb{N}_p \setminus \{k\}} (-b_k + b_i)} = \frac{\prod_{i \in \mathbb{N}_{p-1}} (b_k + a_i)}{\prod_{i \in \mathbb{N}_p \setminus \{k\}} (b_k - b_i)}$$

(b) On note D le déterminant d'ordre p :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_{p-1}} & F(a_1) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_p + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p + b_{p-1}} & F(a_p) \end{vmatrix}$$

Montrer, à l'aide de III.3.(a), et en calculant D par deux méthodes différentes que :

$$F(a_p) C(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1}) = \frac{\prod_{i=1}^{p-1} (a_i + b_p)}{\prod_{i=1}^{p-1} (b_p - b_i)} C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$$

Puisque $F(a_1) = F(a_2) = \cdots = F(a_{p-1}) = 0$, la dernière colonne de D est quasiment nulle et donc

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_{p-1}} & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{p-1} + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{p-1} + b_{p-1}} & 0 \\ \frac{1}{a_p + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p + b_{p-1}} & F(a_p) \end{vmatrix} = F(a_p) \times \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_{p-1}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{p-1} + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{p-1} + b_{p-1}} \end{vmatrix} = F(a_p) \times C(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1})$$

Et par ailleurs, le déterminant D est inchangé en faisant l'opération élémentaire sur les colonnes : $C_p \leftarrow C_p - \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k C_k$.

Mais on a alors, pour cette nouvelle colonne, en ligne i : $F(a_i) - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\alpha_k}{a_i + b_k} = \frac{\alpha_p}{a_i + b_p}$ (question précédente). En factorisant par α_p cette dernière colonne (le déterminant est linéaire par rapport à la dernière colonne), on trouve :

$$D = \alpha_p \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_{p-1}} & \frac{1}{a_1 + b_p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_p + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p + b_{p-1}} & \frac{1}{a_p + b_p} \end{vmatrix} = C(a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$$

En remplaçant α_p par sa valeur (trouvée à la question précédente) :

$$F(a_p) C(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1}) = \frac{\prod_{i=1}^{p-1} (a_i + b_p)}{\prod_{i=1}^{p-1} (b_p - b_i)} C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$$

(c) En déduire :

$$C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq p} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (a_i + b_j)}$$

On a donc pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)}{C(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1})} = \frac{F(a_p) \prod_{i=1}^{p-1} (b_p - b_i)}{\prod_{i=1}^{p-1} (a_i + b_p)} = \frac{\prod_{i=1}^{p-1} (a_p - a_i) \prod_{i=1}^{p-1} (b_p - b_i)}{\prod_{i=1}^{p-1} (a_p + b_i) \prod_{i=1}^{p-1} (a_i + b_p)}$$

Puis par récurrence ou par télescopage multiplicatif :

$$C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq p} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (a_i + b_j)}$$

III.4. (a) En notant $\lambda_0 = k$ et, pour i entier élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$, $\mu_i = \lambda_i + \frac{1}{2}$, exprimer u_n^k à l'aide d'un déterminant du type précédent.

Avec la convention $\lambda_0 = k$, en fait on cherche $\frac{G(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)}{G(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$.

Pour calculer ces déterminants de GRAM, nous avons besoin de calculer pour tout $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$p_{\lambda_i} \cdot p_{\lambda_j} = \int_0^1 t^{\lambda_i + \lambda_j} dt = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j + 1} = \frac{1}{\mu_i + \mu_j}$$

On a donc

$$u_n^k = \frac{C(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)}{C(\mu_1, \dots, \mu_n, \mu_1, \dots, \mu_n)}$$

(b) En déduire :

$$u_n^k = \frac{1}{1+2k} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right)^2$$

En remplaçant par leur valeur :

$$\begin{aligned} u_n^k &= \frac{C(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)}{C(\mu_1, \dots, \mu_n, \mu_1, \dots, \mu_n)} = \frac{\prod_{0 \leq i < j \leq n} (\mu_j - \mu_i) \prod_{0 \leq i < j \leq n} (\mu_j - \mu_i) \prod_{1 \leq i, j \leq n} (\mu_i + \mu_j)}{\prod_{0 \leq i, j \leq n} (\mu_i + \mu_j) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\mu_j - \mu_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\mu_j - \mu_i)} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^n (\mu_j - \mu_0)^2}{(\mu_0 + \mu_0) \prod_{j=1}^n (\mu_0 + \mu_j)^2} \end{aligned}$$

Puis $2\mu_0 = 2(\lambda_0 + \frac{1}{2}) = 2k+1$ alors que $\mu_0 + \mu_j = \lambda_0 + \lambda_j + 1 = k+1 + \lambda_j$ et $\mu_j - \mu_0 = \lambda_j - k$.

Donc $\frac{\mu_j - \mu_0}{\mu_0 + \mu_j} = \frac{\lambda_j - k}{\lambda_j + k + 1} = \frac{(\lambda_j + k + 1) + (-2k - 1)}{\lambda_j + k + 1} = 1 - \frac{2k+1}{\lambda_j + k + 1}$. Ainsi :

$$u_n^k = \frac{1}{1+2k} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right)^2$$

III.5. On suppose que : $\forall i \geq 1, k \neq \lambda_i$.

(a) Montrer qu'il existe un entier non nul N tel que :

$$\forall i \geq N, \quad 1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k} > 0$$

Par hypothèse, nous savons que la suite (λ_j) est strictement croissante, divergente vers $+\infty$.

Donc $\left(\frac{2k+1}{1+\lambda_j+k}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante, convergente vers 0 (puisque $\lambda_j > 0$).

Donc $\left(1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_j+k}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, convergente vers 1

$$\text{Donc il existe un entier non nul } N \text{ tel que : } \quad \forall i \geq N, \quad 1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k} > 0$$

(b) Quelle est la nature de la série $\sum_{i \geq N} \ln \left(1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right)$?

En déduire que $u_n^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Pour $i \geq N$, $1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k} \leq 1$, donc $\ln \left(1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right) \leq 0$.

Il s'agit d'une série à termes négatifs, donc de signe constant (si on souhaite une série à termes positifs, on multiplie par -1),

elle est donc de même nature que la série dont le terme général est équivalent à

$$\ln \left(1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right) \underset{i \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k} \underset{i \rightarrow +\infty}{\sim} -(2k+1) \frac{1}{\lambda_i}$$

Or cette série est divergente, par hypothèse.

$$\text{Donc } \sum_{i \geq N} \ln \left(1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right) \text{ diverge vers } -\infty.$$

Puis, pour $n > N$:

$$\ln(u_n^k) = -\ln(1+2k) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \ln\left(\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k} - 1\right) + 2 \sum_{i=N+1}^n \ln\left(1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right)$$

Les deux premières parties de la somme sont bornées et la série diverge vers $-\infty$.
En composant par exp, qui admet une limite nulle en $-\infty$:

$$(u_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0$$

IV Exemple d'espace de Hilbert et distance

On note E , le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites numériques définies sur $\mathbb{R}$. Autrement écrit : $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On considère $F = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid \sum_{k \geq 0} u_k^2 \text{ converge}\}$, l'ensemble des suites « de carré sommable ».

IV.1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la suite u suivante appartienne à F .

$$u : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^\alpha \left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - \sin \frac{1}{n} \right)$$

Calculons un équivalent de u_n pour $n \rightarrow +\infty$.

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = n \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

$$u_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{2\alpha} \frac{1}{9n^6} = \frac{1}{9n^{6-2\alpha}}$$

Par critère de Riemann et équivalence de séries générales à termes positifs

$$u \in F, \text{ i.e. } \sum u_n^2 \text{ converge si et seulement si } 6 - 2\alpha > 1 \text{ i.e. } \alpha < \frac{5}{2}.$$

IV.2. (a) Soient $u, v \in E$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n |u_k v_k| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k^2 \sum_{k=0}^n v_k^2}$

Il est bien connu que sur $\mathbb{R}^{n+1}$, $x \cdot y = \sum_{i=0}^n x_i y_i$ est un produit scalaire.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz associée permet d'affirmer pour $x_i \leftarrow |u_i|$ et $y_i \leftarrow |v_i|$:

$$\sum_{i=0}^n |u_i v_i| = x \cdot y \leq \sqrt{x \cdot x} \sqrt{y \cdot y} = \sqrt{\sum_{i=0}^n u_i^2 \sum_{i=0}^n v_i^2}$$

(b) En déduire que si $u, v \in F$, alors $\sum_{k \geq 0} u_k v_k$ est convergente.

Soient $u, v \in F$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a d'après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^n |u_k v_k| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k^2 \sum_{k=0}^n v_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} v_k^2}$$

Cette dernière majoration est indépendante de n , donc la série à terme positif $|u_k v_k|$ a ses sommes partielles majorées, donc la série de terme général $|u_k v_k|$ converge, donc la série de terme général $u_k v_k$ converge absolument donc converge.

$$\text{Si } u, v \in F, \text{ alors } \sum_{k \geq 0} u_k v_k \text{ est convergente.}$$

(c) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

Soient $u, v \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La suite $w = \lambda u + \mu v$ est bien définie : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda u_n + \mu v_n$.

Puis $w_n^2 = \lambda^2 u_n^2 + 2\lambda\mu u_n v_n + \mu^2 v_n^2$.

Or $u, v \in F$, donc $\sum u_n^2, \sum v_n^2$ et d'après la question précédente $\sum u_n v_n$ convergent.

Par addition de série convergente : $\sum w_n^2$ converge également. Ainsi $w \in F$.

F est un sous-espace vectoriel de E .

IV.3. On définit pour tout $u, v \in F$, $u \cdot v = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$ (série convergente d'après la question précédente)

(a) Montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur F .

Notre application est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$,

- symétrique puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$ $u_k v_k = v_k u_k$, donc $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k u_k$.
- bilinéaire puisque linéaire à gauche :

$$(\lambda u + \mu v) \cdot w = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u + \mu v)_k w_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda \sum_{k=0}^n u_k w_k + \mu \sum_{k=0}^n v_k w_k = \lambda u \cdot w + \mu v \cdot w$$

et à droite, par symétrie

- positive puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k^2 \geq 0$ donc est de limite positive
- définie puisque si $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2 = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\underbrace{\sum_{k=0}^n u_k^2}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k^2}_{\geq 0} = 0$.

Donc nécessairement $\sum_{k=0}^n u_k^2 = 0$ et donc pour $n \geq 1$: $u_n^2 = \sum_{k=0}^n u_k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 = 0$, et $u_0^2 = \sum_{k=0}^0 u_k^2 = 0$ ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

$u \cdot v = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$ est bien un produit scalaire sur F .

Ainsi, F est un espace vectoriel préhilbertien réel. On note $\| \cdot \|$, la norme associée ($\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$).

(b) Comment s'exprime l'inégalité triangulaire pour ce produit scalaire ?

$$\text{Pour tout } u, v \in F, \underbrace{\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k)^2}}_{=\|u+v\|} \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2}}_{=\|u\|} + \underbrace{\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} v_k^2}}_{=\|v\|}$$

(c) On note $G_n = \{u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in F \mid \forall k \geq n, u_k = 0\}$. On admet que G_n est un sous-espace vectoriel de F . Pour toute suite $u \in F$, exprimer $d_n = d(u, G_n)$, la distance de u à G_n . Montrer que (d_n) converge vers 0.

Pour tout $u \in F$, $u = u^{G_n} + u^\perp$ avec $\begin{cases} u^{G_n} : \forall k \leq n, u_k^F = u_k \text{ et } \forall k > n, u_k^{G_n} = 0 \\ u^\perp : \forall k \leq n, u_k^\perp = 0 \text{ et } \forall k > n, u_k^\perp = u_k \end{cases}$.

On a clairement, $u^{G_n} \in G_n \subset F$ et $u^\perp \in F$. Et par ailleurs

$$u^{G_n} \cdot u^\perp = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^{G_n} u_k^\perp = \sum_{k=0}^n u_k^{G_n} \underbrace{u_k^\perp}_{=0} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{u_k^{G_n}}_{=0} u_k^\perp = 0$$

Donc il s'agit de la projection orthogonale de u sur G_n . Et donc

$$d_n = \|u - u^{G_n}\| = \|u^\perp\| = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k^2}$$

Alors d_n est la racine du reste d'ordre n de la série convergente de terme générale u_k^2 .

On sait que nécessairement ce reste tend vers 0, et donc par composition par $\sqrt{\cdot}$ continue en 0 :

$$(d_n) \text{ converge vers } 0.$$

IV.4. On rappelle qu'une suite $u \in E$ est de Cauchy (ou vérifie le critère de Cauchy) si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p > q \geq N, |u_p - u_q| \leq \epsilon$$

(a) Montrer que si $u = (u_n)$ converge alors (u_n) est de Cauchy.

Considérons une suite u convergente. Notons $\ell = \lim(u_n)$. Soit $\epsilon > 0$.

Alors, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Et donc pour tout $p > q \geq N$, (inégalité triangulaire) : $|u_p - u_q| = |u_p - \ell + \ell - u_q| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

$$\text{Ainsi, si } (u_n) \text{ est convergente, alors } (u_n) \text{ vérifie le critère de Cauchy.}$$

(b) Réciproquement, on suppose que u est une suite qui vérifie le critère de Cauchy.

i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists a_n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq a_n$, $|u_p - u_{a_n}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On applique la définition du critère de Cauchy, avec $\epsilon \leftarrow \frac{1}{2^{n+1}}$, on a l'existence de N , que l'on note a_n , tel que

$$\forall p > q \geq a_n, |u_p - u_q| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Quitte à prendre $a_{n+1} = a_n$, il existe donc une suite (a_n) croissante d'entiers telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq a_n, |u_p - u_{a_n}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

ii. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=a_n}^{a_{n+1}-1} (u_{k+1} - u_k)$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} |v_n|$ converge.

Notons que si $a_{n+1} = a_n$, le terme $v_n = 0$ car la somme est vide, ce qui n'est pas grave...

Puisque $a_{n+1} \geq a_n$, alors on a avec $p \leftarrow a_{n+1}$ (télescopage) :

$$|v_n| = \left| \sum_{k=a_n}^{a_{n+1}-1} (u_{k+1} - u_k) \right| = |u_{a_{n+1}} - u_{a_n}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Et donc par majoration du terme général d'une série à termes positifs par le terme général d'une série convergente,

$$\text{La série } \sum_{n \geq 0} |v_n| \text{ converge.}$$

iii. En déduire, que la suite (u_n) converge.

La série de terme général v_n converge absolument donc converge.

Par ailleurs la sommes partielles se simplifie (sommation par paquets) :

$$S_n = \sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{h=a_k}^{a_{k+1}-1} (u_{h+1} - u_h) \right) = \sum_{h=a_0}^{a_{n+1}-1} (u_{h+1} - u_h) = u_{a_{n+1}} - u_{a_0}$$

Puisque la série $\sum v_n$ converge alors (S_n) converge, i.e. $(u_{a_{n+1}})$ converge.

On a donc une suite extraite de u qui converge notons ℓ sa limite.

Soit $\epsilon > 0$ fixé. Alors :

— il existe N_1 tel que $\forall n \geq N_1, |u_{a_n} - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2}$

— il existe N_2 tel que $\forall p > q \geq N_2, |u_p - u_q| \leq \frac{\epsilon}{2}$

Donc pour tout $n \geq \max(a_{N_1}, N_2)$, alors $|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{a_{N_1}}| + |u_{a_{N_1}} - \ell| \leq \epsilon$.

$$\text{La suite } (u_n) \text{ converge.}$$

On vient de démontrer que $\mathbb{R}$ est complet : ses suites sont convergentes si et seulement si elles sont de Cauchy.

IV.5. Considérons une suite $(u^p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F . Il s'agit donc d'une suite de suites. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u^p = (u_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose que (u^p) vérifie le critère de Cauchy (dans l'espace F normé) :

$$\forall \epsilon > 0, \exists P \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p > q \geq P, \|u^p - u^q\| \leq \epsilon$$

(a) Fixons $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $\exists P \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq q \geq P$, $|u_n^p - u_n^q| \leq \epsilon$.

Puisque (u^p) vérifie le critère de Cauchy, et par somme positive :

$$\forall \epsilon > 0, \exists P \in \mathbb{N} \mid \forall p > q \geq P, |u_n^p - u_n^q|^2 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k^p - u_k^q|^2 = \|u^p - u^q\|^2 \leq \epsilon^2$$

Donc

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \exists P \in \mathbb{N} \mid \forall p > q \geq P, |u_n^p - u_n^q| \leq \epsilon}$$

(b) En déduire que, toujours pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $(u_n^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle qui vérifie le critère de Cauchy.

C'est tout simplement la définition du critère de Cauchy :

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N} \text{ fixé, } (u_n^p)_{p \in \mathbb{N}} \text{ est une suite réelle qui vérifie le critère de Cauchy, elle est donc convergente.}}$$

On note $u_n := \lim_{p \rightarrow +\infty} u_n^p$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite des limites pour les différentes valeurs de $\mathbb{N}$.

(c) Montrer que $(u^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers u i.e. $(\|u^p - u\|)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle qui converge vers 0.

Soit $\epsilon > 0$.

Puisque (u^p) vérifie le critère de Cauchy : $\exists P \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p > q \geq P, \|u^p - u^q\| \leq \epsilon$ donc $\|u^p - u^q\|^2 \leq \epsilon^2$

$$\text{Et donc } \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k^p - u_k^q|^2 \leq \epsilon^2,$$

Fixons maintenant un entier n afin de manipuler des sommes finies : $\sum_{k=0}^n |u_k^p - u_k^q|^2 \leq \epsilon^2$.

Cette dernière inégalité est vraie pour tout $q \geq N$, donc on peut faire tendre $q \rightarrow +\infty$, on a une somme (finie) de suite majorée et convergente, la limite vérifie la même inégalité (élargie si besoin) :

$$\exists P \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \geq P, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n |u_k^p - u_k|^2 \leq \epsilon^2$$

Faisons maintenant tendre n vers $+\infty$, puisque la suite (à termes positifs) des sommes partielles est majorée :

$$\exists P \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \geq P, \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k^p - u_k|^2 \leq \epsilon^2$$

Bilan :

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \exists P \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \geq P, \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k^p - u_k|^2 \leq \epsilon^2 \text{ et donc } (u^p)_{p \in \mathbb{N}} \rightarrow u}$$

On a ainsi démontré, avec l'ensemble de ces questions, que F est un espace préhilbertien réel, complet.

On dit que c'est un espace de HILBERT

IV.6. Soit $\rho \in [0, 1[$. Considérons $C_\rho = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \rho^n\}$.

(a) Montrer que $C_\rho \subset F$. On admet qu'il ne s'agit pas d'un sous-espace vectoriel.

Montrer également que C_ρ est convexe : $\forall u, v \in C_\rho, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda u + (1 - \lambda)v \in C_\rho$.

Si $u \in C_\rho$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n^2 \leq (\rho^2)^n$.

On compare ainsi deux séries à termes positifs, comme $\rho^2 < 1$, la majorante est convergente.

Par comparaison : $\sum u_n^2$ converge.

Donc $u \in F$.

$$\boxed{C_\rho \subset F}$$

Si $u, v \in C_\rho$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|(\lambda u + (1 - \lambda)v)_n| = |\lambda u_n + (1 - \lambda)v_n| \leq |\lambda u_n| + |(1 - \lambda)v_n| \quad \text{par inégalité triangulaire}$$

Puis comme $\lambda \geq 0$ et $(1 - \lambda) \geq 0$:

$$|(\lambda u + (1 - \lambda)v)_n| \leq \lambda |u_n| + (1 - \lambda) |v_n| \leq \lambda \rho^n + (1 - \lambda) \rho^n = (\lambda + 1 - \lambda) \rho^n = \rho^n$$

$$\boxed{\text{Donc } C_\rho \text{ est convexe.}}$$

- (b) Soit $w \in F$, fixé. On note $\delta := d(w, C_\rho) = \inf\{\|w - u\|, u \in C_\rho\}$.

Pourquoi δ existe bien ? Montrer qu'il existe une suite (de suites) $(u^r)_{r \in \mathbb{N}}$ de C_ρ tel que $\|w, u^r\| \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \delta (= d(w, C^\rho))$.

$\{\|w - u\|, u \in C_\rho\}$ est un ensemble de nombres réels positifs, donc minoré par 0. Il admet une borne inférieure. C'est une propriété caractéristique de $\mathbb{R}$.

δ existe bien.

Par définition d'une borne inférieure, pour tout $\epsilon > 0$, $\exists u \in C_\rho$ tel que $\delta - \epsilon < \|w - u\| \leq \delta$.

En prenant $\epsilon = \frac{1}{r}$, puis en notant u^r , la suite u ainsi obtenue, on a : $\|\|w - u^r\| - \delta\| < \frac{1}{r}$

Il existe une suite (de suites) $(u^r)_{r \in \mathbb{N}}$ de C_ρ tel que $\|w - u^r\| \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \delta (= d(w, C^\rho))$.

- (c) Montrer que pour tout $r > s$:

$$\|(w - u^r) + (w - u^s)\|^2 + \|u^r - u^s\|^2 = 2\|w - u^r\|^2 + 2\|w - u^s\|^2$$

Il s'agit de l'inégalité du parallélogramme, toujours vraie dans les espaces euclidiens :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x \cdot y = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

avec $x \leftarrow w - u^r$ et $y \leftarrow w - u^s$, on a $x - y = u^r - u^s$ et on retrouve bien :

$\|(w - u^r) + (w - u^s)\|^2 + \|u^r - u^s\|^2 = 2\|w - u^r\|^2 + 2\|w - u^s\|^2$

- (d) En exploitant la convexité de C_ρ , en déduire $\|u^r - u^s\|^2 \leq 2(\|w - u^r\|^2 - \delta^2) + 2(\|w - u^s\|^2 - \delta^2)$, puis que (u^r) est de Cauchy.

Notons $v = \frac{u^r + u^s}{2}$, suite moyenne de u^r et de u^s . Comme C_ρ est convexe, alors $v \in C_\rho$.

On a ensuite : $\|(w - u^r) + (w - u^s)\|^2 = \|2(w - v)\|^2 = 4\|w - v\|^2 \geq 4\delta^2$, car δ est un minorant de $\{\|w - v\|, v \in C_\rho\}$.

Et ainsi :

$$\|u^r - u^s\|^2 = 2\|w - u^r\|^2 + 2\|w - u^s\|^2 - \|2(w - v)\|^2 \leq 2\|w - u^r\|^2 + 2\|w - u^s\|^2 - 4\delta^2$$

$\|u^r - u^s\|^2 \leq 2(\|w - u^r\|^2 - \delta^2) + 2(\|w - u^s\|^2 - \delta^2)$

Puis comme $(\|w - u^r\|^2) \rightarrow \delta^2$ et de même $(\|w - u^s\|^2) \rightarrow \delta^2$,

pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall r, s \geq N$, $(\|w - u^r\|^2 - \delta^2) \leq \frac{\epsilon^2}{4}$ et $(\|w - u^s\|^2 - \delta^2) \leq \frac{\epsilon^2}{4}$.

pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall r, s \geq N$, $\|u^r - u^s\|^2 \leq \epsilon^2$

La suite (de suites) (u^r) est de Cauchy.

- (e) En déduire que (u^r) converge. Montrer que $U := \lim_r u^r$ est dans C_ρ et vérifie $\|w - U\| = \delta$.

La suite (u^r) est de Cauchy, dans l'espace complet F . Donc elle converge dans F . Notons U sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \lim u_n^r$. Or pour tout $r \in \mathbb{N}$, $|u_n^r| \leq \rho^n$.

En passant à la limite (réelle) : $|U_n| \leq \rho^n$.

(u^r) converge vers une suite U , élément de C_ρ .

L'application $\text{dis} : u^r \mapsto \|w - u^r\|$ est 1-lipschitzienne (par inégalité triangulaire) donc continue.

On a donc $\delta = \lim_{r \rightarrow +\infty} \text{dis}(u^r) = \text{dis}(\lim u^r) = \text{dis}(U) = \|w - U\|$

$\|w - U\| = \delta$

- (f) Montrer que U est la seule suite de C vérifiant $\|w - U\| = \delta$.

Si V vérifie la même relation que U , toujours par l'inégalité du parallélogramme :

$$\|U - V\|^2 \leq 2\|w - U\|^2 + 2\|w - V\|^2 - 4\delta^2 = 0$$

Et donc nécessairement $\|U - V\| = 0$ et donc $U = V$.

U est la seule suite de C vérifiant $\|w - U\| = \delta$.

On a ainsi vu sur un exemple comment élargir la notion de distance à un convexe (fermé) dans un espace de Hilbert. D'une certaine façon, U est le projeté (orthogonal) de w sur U .

• • • FIN • • •
