

Devoir à la maison n°7

Exercice

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois, I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A \times M = M\}$$
$$E_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2 \times M = AM\}$$

Partie I : Structure

1. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
2. Montrer que $E_1(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On admettra que $E_2(A)$ est également un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. (a) Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$.
(b) Montrer que si A est inversible alors $E_1(A) = E_2(A)$.
4. (a) Établir que si $A - I$ est inversible alors $E_1(A) = \{0\}$.
(b) Un exemple : $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Partie II : Étude d'un cas particulier

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
2. Montrer que la matrice $D = P^{-1}CP$ est une matrice diagonale.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.
Montrer l'équivalence suivante : $M \in E_1(C) \iff N \in E_1(D)$.
4. Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b et c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.
6. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_2(C)$.
Est-ce que $E_1(C) = E_2(C)$?

Problème

On rappelle que $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs.

Dans tout l'exercice, on notera $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. On note alors $\det(A) = ad - bc$ (lu déterminant de A).

Partie A

1. Calculer $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

En déduire que si $ad - bc \neq 0$ alors A est inversible. Exprimer alors A^{-1} .

Réciproquement, montrer que si $ad - bc = 0$, alors A n'est pas inversible.

2. Déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Supposons que $\det(A) \neq 0$. Exprimer $\det(A^{-1})$ en fonction de $\det(A)$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, i.e. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^4$.

Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} et que A^{-1} est, elle aussi, un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Donner alors l'expression de A^{-1} en fonction de a, b, c, d .

On notera désormais $SL_2(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det(M) = 1\}$.

5. Montrer que si A et $B \in SL_2(\mathbb{Z})$, alors $A \times B \in SL_2(\mathbb{Z})$.

6. Déterminer les couples $(b, c) \in \mathbb{Z}^4$ tels que $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & c \\ b & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$

Partie B

On désigne par $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles qu'il existe un entier naturel p , non nul, vérifiant $A^p = I_2$. Pour chaque matrice A de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, on admet qu'il existe un plus petit entier naturel q non nul tel que $A^q = I_2$, on le note $h(A)$; il est appelé ordre de la matrice A .

Soit A , une matrice de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, d'ordre $h(A) = p$.

1. Inverse de A .

- (a) Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

En déduire les valeurs possibles de $\det(A)$.

- (b) Vérifier que $A^{-1} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{C})$. Comparer $h(A)$ et $h(A^{-1})$.

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $P : z \mapsto \det(A - zI_2)$.

- (a) Montrer que $T(z) = z^2 - \text{tr}(A)z + \det(A)$.

- (b) Montrer que $(T(A) =) A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2$ est la matrice nulle.

- (c) On note λ_1 et λ_2 les deux racines complexes, éventuellement confondues, de T .

Exprimer en fonction de λ_1 et λ_2 , la trace $\text{tr}(A)$, de la matrice A .

- (d) On admet que λ_1 et λ_2 sont de module 1. (Ce sera démontré en question 5).

En déduire que $\text{tr}(A) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

3. Montrer que les matrices $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et déterminer leurs ordres. La matrice produit CD appartient-elles à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$?

4. Retour sur le polynôme T .

Connaissant $\text{tr}(A)$ et $\det(A)$, vérifier qu'il n'y a que 10 polynômes T possibles.

Calculer les racines de ces polynômes. Montrer en particulier que quatre d'entre eux ont des racines de module différent de 1.

5. Diagonalisation de A .

On note, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $A_z = A - zI_2$

- (a) Montrer que A_z n'est pas inversible ssi $z \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

- (b) En déduire que $\text{Ker } A_{\lambda_1}$ et $\text{Ker } A_{\lambda_2}$ ne sont pas réduits à $\{0\}$.

- (c) Soient $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A_{\lambda_1}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A_{\lambda_2}$ et $P = (X_1 | X_2)$

Montrer que $\lambda_1^p = 1$ et $\lambda_2^p = 1$, en déduire que λ_1 et λ_2 sont de module 1.

Quelle conséquence pour les polynômes T à considérer ?

- (d) Montrer également que $A \times P = P \times D$ où D est une matrice diagonale à préciser.

- (e) Montrer que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors P est inversible.

6. Ordre de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$.

- (a) Déduire des questions précédentes, que si $A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, alors il existe P inversible et D diagonale telle que $A = P \times D \times P^{-1}$.

- (b) Exprimer alors simplement A^n , avec P et P^{-1} .

- (c) En déduire l'existence et la valeur du plus petit entier naturel non nul p_2 tel que :

$$\forall A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z}) \quad A^{p_2} = I_2$$