Devoir à la maison n°8

Exercice

On désigne par a et b deux réels distincts et soit ϕ l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$ qui à tout polynôme P associe le quadruplet $(P(a), P'(a), P(b), P'(b))$.

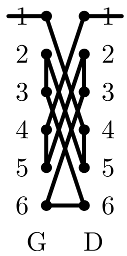
1. Montrer que ϕ est un isomorphisme.
2. Déterminer l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer tous les polynômes P vérifiant :

$$P(2) = 3, P'(2) = 1, P(1) = 2, P'(1) = 4$$

(on pourra commencer par chercher un polynôme de degré inférieur ou égal à trois vérifiant ces conditions.)

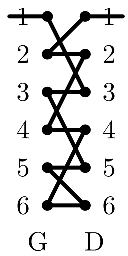
Problème - Combien de façon de lacer ses chaussures ?

Le but de ce problème est d'étudier le nombre de façons différentes de lacer des chaussures.
Nous considérons que les chaussures possèdent n oeillets à droite et n oeillets à gauche.
Nous noterons i_D, le i^eoeillet droit (ou le oeillet situé à la hauteur i à droite) de la chaussure considérée et j_G, le j^eoeillet gauche (ou le oeillet situé à la hauteur j à gauche) de cette même chaussure, i et j représentent alors tous les entiers situés entre 1 et n.
La fonction du laçage est de maintenir attachés deux morceaux de cuir ; nous ne considérerons que des laçages où **tous** les oeillets sont utilisés **une et une seule fois**, reliés les uns aux autres, et de telle sorte que **chaque oeillet d'une série** (hormis le premier et le dernier) **soit relié à au moins un oeillet de l'autre série**. Le premier et le dernier oeillet peuvent se trouver n'importe où.
Nous modéliserons un laçage sous forme **de liste**. C'est la liste ordonnée des oeillets rencontrés lorsque l'on « fait le laçage ». Les deux exemples suivant illustrent cette idée :



$\leftarrow (1_G, 4_D, 5_D, 2_G, 3_G, 6_D, 6_G, 3_D, 2_D, 5_G, 4_G, 1_D)$

$(1_G, 3_D, 3_G, 5_D, 5_G, 6_D, 6_G, 4_D, 4_G, 2_D, 2_G, 1_D) \rightarrow$



Exemples de laçages pour $n = 6$

Enfin, nous considérons différents type de laçages (regroupés par famille) :

i. Laçages denses ou compacts :
Un laçage est dense (ou compact) si les deux segments de lacet qui joignent un oeillet partent toujours vers des oeillets d'en face. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des laçages compacts.

ii. Laçages simples :
Un laçage est simple si la suite des oeillets rencontrés démarre en 1 (droite ou gauche) puis est croissante, puis décroissante (elle ne change qu'une fois de sens de variations). On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des laçages simples.

iii. Laçages droits :
Un laçage est droit si des deux segments de lacet qui joignent un oeillet, l'un vient exactement de l'oeillet d'en face. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des laçages droits.

iv. Laçages superdroits :
Un laçage est superdroit si des deux segments de lacet qui joignent un oeillet, l'un vient exactement de l'oeillet d'en face et l'autre se trouve du même côté (droite ou gauche). On exige également que le segment issu du premier oeillet rejoint exactement l'oeillet d'en-face et que le premier et le dernier oeillet soient du même côté. On note $\mathcal{SD}$ l'ensemble des laçages superdroits.
(A noter qu'il n'y a pas d'exigence particulière sur le premier oeillet dans le laçage droit)

Dans la premiére partie (A), on prendra $n = 6$. Dans les parties suivantes (B à D), nous considérerons que n est un entier quelconque.

A. Exemples

1. Pourquoi, la liste suivante : $L = (1_G, 2_D, 3_D, 6_D, 2_G, 3_G, 4_G, 4_D, 5_G, 5_D, 1_D, 6_G)$ n'est pas un laçage acceptable ?
   Comment modifier *trés simplement* la liste L pour que le laçage devienne acceptable ?
2. Dessinez les deux laçages associés aux deux listes $L_1 = (1_G, 2_D, 3_D, 4_G, 4_D, 6_D, 2_G, 5_G, 5_D, 3_G, 1_D, 6_G)$ et $L_2 = (6_G, 1_D, 3_G, 5_D, 5_G, 2_G, 6_D, 4_D, 4_G, 3_D, 2_D, 1_G)$?
   Que constatez-vous ?
   Expliquez pourquoi on peut affirmer :≪ *en réalité, pour un laçage, il existe toujours deux suites acceptables, obtenues palindromiquement l'une de l'autre ; c'est pourquoi dans nos décomptes il faudra veiller à diviser par deux le nombre de laçages obtenus* ≫.
   Ainsi, lorsque nous compterons le nombre de liste de laçages, il faudra diviser par deux pour obtenir le nombre de laçages différents.
3. Pour $n = 6$, donner, pour chacun de ces quatre types de laçages, un exemple (différent de ceux donnés dans l'énoncé) sous forme de liste.

B. Laçages droits

On cherche dans cette partie à dénombrer le nombre de laçages droits et superdroits.

1. (a) Montrer que pour définir une liste représentant un laçage droit, il faut et il suffit de
      — se donner une permutation de l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots n\}$
      — se donner pour chacun des éléments de E noté i, une lettre G ou D indiquant le côté du premier oeillet de hauteur i rencontré
      — indiquer si le second oeillet est exactement à la même hauteur que le premier.
   (b) En déduire la valeur de card($\mathcal{D}$).
      On n'oubliera pas de penser à la remarque vue en A.2.
2. (a) Pourquoi n'existe-t-il pas de laçage superdroit, si n est impair ?
   (b) Montrer que si n est pair, alors card($\mathcal{SD}$) $= n!$
3. Montrer que $\mathcal{SD} \subset \mathcal{D}$. Donner la valeur du cardinal de $\mathcal{SD} \cap \mathcal{D}$, selon la parité de n.

C. Laçages compacts

On cherche dans cette partie à dénombrer le nombre de laçages compacts (ou denses).

1. Que vaut $\mathcal{SD} \cap \mathcal{C}$. Quel est alors le cardinal de $\mathcal{SD} \cap \mathcal{C}$?
2. Que vaut le cardinal de $\mathcal{C}$?
   On pourra raisonner par décomposition, comme pour la question B.1.)
3. Nous cherchons maintenant à décomposer l'ensemble $\mathcal{C}$.
   (a) Montrer que card $(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = 2 \times n!$.
   (b) Montrer que card $(\mathcal{C} \cap \mathcal{S}) = 3^{n-1}$.
      On pourra remarquer que toute liste d'un laçage de $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$ est équivalente à la donnée de la latéralité du premier oeillet et d'une $(n-1)$-liste dont le i^eterme indique si le laçage passe par les deux oeillets, ou par un seul oeillet ou aucun oeillet de la hauteur i lors du cheminement ***croissant*** *de la liste).*
   (c) Montrer que card $(\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \cap \mathcal{S}) = 2^{n-1}$.
   (d) Montrer que si A et B sont finis, alors card$(A \cup B)$ = card(A) + card(B) − card$(A \cap B)$.
      En appliquant cette formule pour les ensembles $A = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ et $B = \mathcal{C} \cap \mathcal{S}$, calculer le nombre de laçages compacts, droits ou simples.
4. En déduire le nombre de laçages compacts qui ne sont ni droits ni simples.
   (*Le résultat sera exprimé sous forme d'un calcul que l'on ne cherchera pas à effectuer*)

D. Nombre total de laçages

On cherche dans cette partie à dénombrer le nombre total de laçages.
On notera $m = \frac{n}{2}$, si n est pair et $m = \frac{n-1}{2}$ si n est impair, de sorte que m est toujours un entier.

1. En exploitant au mieux la particularité d'un laçage : *un côté ne peut se répéter qu'une unique fois (et jamais plus)*, montrer que le nombre de laçages différents est
$$n!^2 \sum_{p=0}^{m} \frac{n}{n-p} \binom{n-p}{p}^2$$
2. Qu'est-il passé par la tête du professeur lorsqu'il a écrit ce devoir ? (Quelle est son inspiration ?)