Devoir à la maison n°6
CORRECTION

Vous trouverez évidemment ce qu'il faut écrire dans une bonne copie (en noir, ici).
Mais aussi, deux types de section (grisées) vous permettront de profiter de cette correction au mieux :
— Remarque :
Il s'agit de commentaires pour aider à la compréhension
— Piste de recherche :
Il s'agit de questions complémentaires pour savoir quoi trouver ou pour continuer l'étude...

Problème

A. Relation sur les polynômes à coefficients entiers

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on suppose que $\deg(P) = n$ ($n \geqslant 1$) et on note $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Piste de recherche...
On doit démontrer une divisibilité, donc quelque chose du genre $p \times A = a_0$, avec $A \in \mathbb{Z}$.
Or lorsqu'on applique les hypothèses de la question $P(r) = 0$, on obtient de fractions de dénominateurs q^k.
Pour obtenir des entiers, on même donc au même dénominateur, i.e. le PPCM des q^k, il s'agit de q^n.
On multiplie donc tout par q^n, puis on isole a_0 (resp. a_n)

r est une racine de P, donc $P(r) = 0$ et $q^n \times P(r) = 0$, c'est-à-dire :

$$q^n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{p^k}{q^k} \right) = \sum_{k=0}^{n} a_k q^{n-k} p^k = 0$$

On a donc, en particulier :

$$a_n p^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-k} = -q \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-1-k} \right) \qquad \text{et} \qquad a_0 q^n = -p \left(\sum_{k=1}^{n} a_k p^{k-1} q^{n-k} \right)$$

Or les nombres $\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-1-k} \right)$ et $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k p^{k-1} q^{n-k} \right)$ sont des entiers, donc

$$q | a_n p^n \qquad \text{et} \qquad p | a_0 q^n$$

Enfin $p \wedge q = 1$, car $\frac{p}{q}$ est l'écriture irréductible de r, donc $p \wedge q^n = 1$ et $q \wedge p^n = 1$.
On applique enfin le lemme de Gauss et on obtient

$$\boxed{p | a_0 \quad \text{et} \quad q | a_n}$$

Remarques !
Comme beaucoup d'autres, ce théorème s'appelle le théorème de Gauss. C'est assez classique dès que l'on s'intéresse au polynôme de $\mathbb{Z}[X]$.
On notera également que lorsque vous cherchez une racine évidente entière d'un polynôme à coefficients entiers (ce qui arrive assez souvent finalement), il faut cherche cette racine parmi les diviseur de a_0. (Ce qui est naturel lorsque $a_0 = 0$...)

B. Polynômes de Tchebychev

1. Construction de la famille de polynômes.
   (a) On commence par montrer l'existence de T_n.

Piste de recherche...
La seule chose que l'on doit vérifier est la formule en $\cos(nx)$, on a vu en cours que dans ce cas là (pour des cas particuliers de n), il fallait exploiter la formule d' Euler, puis le binôme de Newton. C'est toujours vrai dans le cas général (pour tout n).

Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(nx) = \mathfrak{Re}\left(e^{inx}\right) = \mathfrak{Re}\left((e^{ix})^n\right) = \mathfrak{Re}\left((\cos x + i \sin x)^n\right) = \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k} x i^k \sin^k(x)\right)$$

Or i^k n'est réel que si k est pair et si $k = 2p$, alors $i^k = i^2p = (i^2)^p = (-1)^p$.
Donc, en considérant $p = \frac{k}{2}$, donc lorsque k varie de 0 à n, p varie de 0 à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ($p \in \mathbb{N}$).

$$\cos(nx) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \sin^{2p}(x) \cos^{n-2p}(x) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \left(\sin^2(x)\right)^p \cos^{n-2p}(x)$$

En exploitant la relation : $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(nx) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (1 - \cos^2(x))^p \cos^{n-2p}(x)$$

Considérons $T_n = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (1-X^2)^p X^{n-2p}$, on a donc pour tout réel x, $\cos(nx) = T_n(\cos x)$.
Montrons maintenant l'unicité d'un tel polynôme.

Remarques !
La démarche présentée maintenant est très très classique (2 polynômes, soustraction, infinité de racines). A savoir-faire !

Si T_n et Q_n vérifient la même relation, on a donc pour tout réel x : $T_n(\cos x) - Q_n(\cos x) = 0$
Et donc pour tout $y \in [-1, 1]$,

$$(T_n - Q_n)(y) = T_n(\cos(\arccos(y)) - Q_n(\cos(\arccos(y)) = 0$$

Ainsi $T_n - Q_n$ admet une infinité de racines (tous les réels de $[-1, 1]$), c'est le polynôme nul, i.e. $T_n = Q_n$.

$$\boxed{\text{On a donc l'existence et l'unicité du polynôme } T_n \in \mathbb{R}[X], \text{ tel que } \forall\, x \in \mathbb{R}, \cos(nx) = T_n(\cos x)}$$

Remarques !
Il s'agit de la famille des polynômes de Tchebychev de première espèce. Que vaut $T_n(ch(x))$?

   (b) **Piste de recherche...**
Il s'agit de simples calculs, vous pourriez vérifier par vous même (et montrer les traces des calculs sur la copie

$$\boxed{T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad T_2 = 2X^2 - 1, \quad T_3 = 4X^3 - 3X, \quad T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1}$$

   (c) **Piste de recherche...**
Il faut réussir à exprimer 0, 1 et -1 comme des $\cos(x)$,avec x bien choisi ; c'est la seule connaissance simple et directe que l'on a de T_n

$$\boxed{T_n(0) = T_n(\cos \frac{\pi}{2}) = \cos(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p \end{cases}, \; T_n(1) = \cos(n0) = 0, \; T_n(-1) = \cos(n\pi) = (-1)^n}$$

Piste de recherche...

Les calculs sont un peu rapides ici. Vous devez bien vous assurer de leur justesse (et de les avoir compris)!!

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Piste de recherche...

On applique toujours la même méthode que pour l'unicité (infinité de racines).
Evidemment, il faut connaître « ses »formules trigonométriques. On remarquera l'importance de garder la symétrie pour faciliter les calculs...

Soit $Q_n = T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n$. Soit $y \in [-1, 1]$ et $x = \arccos(y)$ donc $y = \cos x$,

$$Q_n(y) = T_{n+2}(\cos x) - 2\cos x T_{n+1}(\cos x) + T_n(\cos x) = \cos[(n+2)x] - 2\cos[x]\cos[(n+1)x] + \cos(nx)$$
$$= \big(\cos[(n+2)x] + \cos(nx)\big) - 2\cos[x]\cos[(n+1)x]$$
$$= 2\cos\frac{(n+2)x + nx}{2}\cos\frac{(n+2)x - nx}{2} - 2\cos[x]\cos[(n+1)x] = 0$$

Donc Q_n admet une infinité de racines (tous les nombres réels de $[-1, 1]$, donc $Q_n = 0$:

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n = 0}$$

3. **Piste de recherche...**

Pour la suite des questions, il y a maintenant deux options pour trouver les propriétés vérifiées par T_n : la propriété caractéristique ($T_n(\cos x) = \dots$) ou la relation de récurrence ($T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$). Il faut choisir, on peut néanmoins anticiper que la seconde propriété servira plus pour les questions qui suivent, sinon celles-ci auraient été placées plus haut...

Piste de recherche...

Si on exploite la relation de récurrence, ce sera souvent dans des démonstrations par récurrence.
Or ce genre de raisonnement est toujours un peu laborieux, on a donc intérêt à optimiser en écrivant dans les hypothèses de récurrence le plus d'informations possibles (et réduire en conséquence le nombre de récurrence).
Par ailleurs, vue la forme de la relation de récurrence, ce sera toujours des récurrence à deux termes

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$: « le terme dominant de T_n est $2^{n-1}X^n$ et T_n a la parité de n ».

— $T_1 = X$, son terme dominant est $X = 2^{1-1}X^1$. Et T_1 est impair. Donc $\mathcal{P}_1$ vraie.

— $T_2 = 2X^2 - 1$, son terme dominant est $2X^2 = 2^{2-1}X^2$. Et T_2 est pair. Donc $\mathcal{P}_2$ vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vérifiées.
  Le degré de T_n est n, celui de T_{n+1} est $n+1$,
    donc celui de $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ est $(n+1)+1 = n+2$.
    Et $[T_{n+2}]_{n+2} = 2 \times 1 \times [T_{n+1}]_{n+1} + 0 = 2 \times 2^{(n+1)-1} = 2^{n+1} = 2^{(n+2)-1}$
    Ainsi le terme dominant de T_{n+2} est bien $2^{(n+2)-1}X^{n+2}$.
  En outre, T_n a la parité de n égale à celle de $n+2$: $T_n(-X) = (-1)^{n+2}T_n(X)$
    T_{n+1} a la parité de $n+1$, donc $2XT_{n+1}$ à la parité de $n+2$:
$$2(-X)T_{n+1}(-X) = -2X(-1)^{n+1}T_{n+1}(X) = (-1)^{n+2}2XT_{n+1}(X).$$
    Par addition, T_{n+2} a la parité de $n+2$.
  Ainsi $\mathcal{P}_{n+2}$ est bien vérifiée.

$$\boxed{\text{On a donc démontré que le terme dominant de } T_n \text{ est } 2^{n-1}X^n \text{ et } T_n \text{ a la parité de } n}$$

4. **Remarques !**

On va raisonner (toujours) par récurrence, mais alors il faut montrer la stabilité de $\mathbb{Z}[X]$ par addition de polynômes. Ce sera l'objet du début de la réponse qui suit

Si $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$, et $B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$,

  alors $C = A + B = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k)X^k \in \mathbb{Z}[X]$, en effet : $\forall\ k$, $a_k + b_k \in \mathbb{Z}$.

On a alors par récurrence : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $T_n \in \mathbb{Z}[X]$.
En effet, le résultat est vrai pour $n = 0$ ($T_0 = 1$) et $n = 1$ ($T_1 = X$).
Puis, en vertu du lemme démontré en début de question si $T_n, T_{n+1} \in \mathbb{Z}[X]$, alors $T_{n+2} \in \mathbb{Z}[X]$.

$$\boxed{\text{Tous les coefficients de } T_n \text{ sont des entiers relatifs.}}$$

5. **Piste de recherche...**

*La question est claire : il faut **exprimer** ces racines. Il faut donc résoudre $T_n(y) = 0$.*
Avec la relation caractéristique (avec cos), on saura en trouver un certain nombre (celles situées dans $[-1, 1]$).
Espérons qu'on les trouvera toutes (au plus n)...

Soit y une racine de T_n dans l'intervalle $[-1, 1]$, il existe $x \in [0, \pi]$ tel que $y = \cos x$ (en fait $x = \arccos(y)$).

$$T_n(y) = 0 = T_n(\cos x) = \cos(nx) \Longrightarrow nx \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Longrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\pi}{n}\right]$$

Notons $x_k = \dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{2k+1}{2n}\pi$. On a alors $x_k \in [0, \pi] \Leftrightarrow 0 \leqslant 2k+1 \leqslant 2n \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant n - \frac{1}{2}$
Il y a donc exactement n valeurs distinctes possibles pour $x_k \in [0, \pi]$: x_0, x_1,...x_{n-1}.
Par ailleurs, cos est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$,
Donc il y a donc exactement n valeurs distinctes possibles pour y : $\cos(x_0)$, $\cos(x_1)$,...$\cos(x_{n-1})$.
Or T_n, de degré n admet au plus n racines, donc on les a toutes !

$$\boxed{\text{Ainsi, } T_n \text{ admet } n \text{ racines réelles distinctes : les } y_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \text{ pour } k \in [\![0, n-1]\!]}$$

Remarques !

Nous avions écrit qu'il faudrait probablement plutôt utiliser la relation de récurrence que la relation caractéristique pour les questions après 3.
Autrement écrit : pourquoi cette question n'a pas été posée plutôt ? Tout simplement parce qu'on doit utiliser un résultat acquis plus tard : $\deg(T_n) = n$

6. **Piste de recherche...**

On peut sûrement (mais je ne le ferais pas) chercher à appliquer la même méthode : exprimer T_n, puis T_n' puis ses racines.
Mais là l'énoncé de demande pas d'expliciter les racines de T_n', mais seulement de montrer leur existence.
Cela rappelle le théorème de Rolle. On va donc regarder les polynômes du point de vue des fonctions (polynomiales, donc)

Notons $t_n : x \mapsto T_n(x)$ et t_n', sa dérivée. On a alors $t_n'(x) = (T_n')(x)$.
On sait que T_n donc t_n s'annule en y_k et que les y_k sont distincts,
plus précisément : $y_0 > y_1 > \cdots > y_{n-2} > y_{n-1}$.
Appliquons $n-1$ fois le théorème de Rolle entre les points y_k et y_{k+1} (pour $k \in [\![0, n-2]\!]$).
$t_n(y_k) = t_n(y_{k+1}) = 0$, donc il existe $z_k \in]y_{k+1}, y_k[$ telles que $t_n'(z_k) = 0$
On a donc l'entrelacement : $y_0 > z_0 > y_1 > z_1 > y_2 \cdots > y_{n-2} > z_{n-2} > y_{n-1}$ avec $T_n(y_k) = 0$ et $T_n'(z_k) = 0$

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2,\ T_n' \text{ admet } (n-1) \text{ racines réelles distinctes.}}$$

Remarques !

Là aussi, la question est classique (on l'avait d'ailleurs déjà vu en TD début décembre) : c'est la méthode de l'entrelacement des racines. (On pourrait d'ailleurs continuer en dérivant à nouveau T_n'...)

7. Suivant les indications (et avec la notion de la question précédente),
$\varphi_n = t_n \circ \cos$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, par composition.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n'(x) = -\sin(x) \times t_n'(\cos(x)) \quad \text{et} \quad \varphi_n''(x) = -\cos(x) t_n'(\cos(x)) + \sin^2(x) t_n''(\cos x)$$

Par ailleurs, $\varphi_n(x) = \cos(nx)$, donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n'(x) = -n\sin(nx) \quad \text{et} \quad \varphi_n''(x) = -n^2\cos(nx)$$

Donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad -n^2\cos(nx) = -n^2 t_n(\cos x) = \varphi_n''(x) = -\cos(x) t_n'(\cos x) + (1 - \cos^2(x)) t_n''(\cos x)$$

Donc pour tout $y \in [-1, 1]$ ($y = \cos x$)

$$-n^2 T_n(y) = (1 - y^2) T_n''(y) - y T_n'(y)$$

Ainsi $R = (1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n$ admet une infinité de racines (tout $y \in [-1, 1]$), donc $R = 0$.

$$\boxed{\text{Bilan : } T_n \text{ vérifie la relation différentielle : } n^2 T_n - XT_n' + (1 - X^2) T_n'' = 0}$$

(On pourra considérer la fonction $x \mapsto T_n(\cos x)$)

Piste de recherche...

Le principe est le suivant :

(a) On écrit chaque polynôme : T_n, T_n' et T_n'' sous forme de somme.

(b) On addition ceux-ci en associant bien ensemble tous les termes associés à X^k (pour tout k)

(c) On identifie avec le polynôme nul : cela donne une relation de récurrence sur les a_k

(d) On essaye de résoudre cette relation de récurrence.

Il est d'un usage très fréquent avec les équations différentielles, en particulier lorsqu'on recherche des solutions de ces équations sous forme de série entière (i.e. $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$) comme on le fait souvent en seconde année. L'intérêt de cette question est donc de s'entrainer pour ce calcul...

On écrit $T_n = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$. Bien qu'elle semble infinie, cette somme est bien finie, puisque pour $k > \deg T_n = n$, $a_k = 0$.
On a alors $T_n' = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} k a_k X^{k-1}$ et donc $XT_n' = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} k a_k X^k$

Remarques !

Notons que cette somme pourrait commencer à 1, car le premier terme correspondant à $k=0$ est nul : c'est $0\times a_0$.

Mais pour faciliter les additions qui vont suivre, on a intérêt à avoir les même valeurs d'indice de somme (cela évite l'étude de cas particuliers pléthoriques)

On a de même $T_n'' = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} k(k-1)a_k X^{k-2}$. Donc $X^2T_n'' = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} k(k-1)a_k X^k$,

on a intérêt à noter $1T_n'' = \displaystyle\sum_{h\in\mathbb{N}} (h+2)(h+1)a_{h+2}X^h$ ($h=k-2$ et somme de $k=2$ à...)

On a donc

$$n^2T_n - XT_n' + (1-X^2)T_n'' = n^2T_n - XT_n' + T_n'' - X^2T_n'' = 0$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \big(n^2a_k - ka_k + (k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k\big)X^k = 0$$

On peut identifier :

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\qquad n^2a_k - ka_k + (k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k = (n^2-k-k^2+k)a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2} = 0$$

$$\forall\, k\in\mathbb{N}, k<n \qquad a_k = \frac{(k+1)(k+2)}{k^2-n^2}a_{k+2} = \frac{(k+1)(k+2)}{(k-n)(k+n)}a_{k+2}$$

(On prend $k<n$, pour que le dénominateur soit non nul. Et que $a_k > 0$, si $k>n$ car $\deg(T_n)=n$).

$$\boxed{\text{On a donc (avec } h=k-2) : \forall\, h\leqslant n,\ a_{h-2} = \frac{h(h-1)}{(h-2-n)(h-2+n)}a_h}$$

On a donc en posant $h=n-2p$: $a_{n-2p-2} = \dfrac{(n-2p)(n-2p-1)}{(-2p-2)(2n-2p-2)}a_{n-2p} = \dfrac{(n-2p)(n-2p-1)}{(-4)(p+1)(n-(p+1))}a_{n-2p}$
Puis, en multipliant cette relation (pour p de 0 à $P-1 \leqslant \frac{n}{2}$) on obtient

$$a_{n-2}a_{n-4}\dots a_{n-2P+2}a_{n-2P} = \prod_{p=0}^{P-1} a_{n-2p-2} = \prod_{p=0}^{P-1}\left(\frac{(n-2p)(n-2p-1)}{(-4)(p+1)(n-(p+1))}a_{n-2p}\right)$$
$$= \frac{n!}{(n-2P)!}\frac{1}{(-4)^P}\frac{1}{P!}\frac{(n-P-1)!}{(n-1)!}\prod_{p=0}^{P-1}a_{n-2p}$$
$$= \frac{n}{(-4)^P(n-P)}\binom{N-P}{P}a_na_{n-2}\dots a_{n-2P+2}$$

Et donc comme $a_n = 2^{n-1}$ et en simplifiant par $a_{n-2}a_{n-4}\dots a_{n-2P+2}$, on obtient :

$$\boxed{\forall\, P\leqslant \frac{n}{2},\qquad a_{n-2P} = (-1)^P 2^{n-2P-1}\frac{n}{n-P}\binom{N-P}{P}}$$

C. Arithmétique des polynômes de Tchebychev

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n = 0$.

1. **Piste de recherche...**

   Pour calculer le PGCD, ce que l'on sait faire, c'est appliquer l'algorithme d'Euclide donc les division euclidiennes.

   Est-ce que la relation donnée ne nous aiderait pas ?

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$, avec $\deg T_n = n < n+1 = \deg T_{n+1}$,

   Donc par unicité de la division euclidienne, le reste de la division de T_{n+2} par T_{n+1} est T_n.

   Et donc, d'après l'algorithme d'Euclide : $T_{n+2} \wedge T_{n+1} = T_{n+1} \wedge T_n$.

   Par conséquent, la suite $(T_{n+2} \wedge T_{n+1})_n$ est une suite constante, elle vaut $T_1 \wedge T_0 = 1$

   $$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} \wedge T_n = 1.}$$

2. **Piste de recherche...**

   La seconde méthode pour trouver un dénominateur polynomial commun consiste à exploiter les racines :

   Si $P|Q$, alors toutes les racines de P sont des racines de Q.

   On a donc $T_n \wedge T_m = \displaystyle\prod_{a \ |\ T_n(a)=0, T_m(a)=0} (X-a)$.

   Or en B.5., nous avons fait la liste des racines de T_n.

   Commençons donc par une rappel :

   T_n admet n racines réelles distinctes : les $y_k = \cos\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

   (a) **Remarques !**

   On démontre en deux temps : $T_\delta|T_m$ et $T_\delta|T_n$, donc T_δ est un diviseur de T_n et de T_m.

   Pour cela on démontre que toutes les racines de T_δ sont des racines de T_n et T_m.

   Puis on démontre, réciproquement, que T_δ est le plus grand :

   Là, on montre que toutes les racines communes de T_n et T_m sont des racines de T_δ

   - Les racines de T_δ sont exactement les nombres $\cos\left(\dfrac{2k+1}{2\delta}\pi\right)$ pour $k \in [\![0, \delta-1]\!]$.

   En multipliant par $\frac{n_1}{n_1}$, on a donc :

   $\cos\left(\dfrac{(2k+1)n_1}{2n_1\delta}\pi\right) = \cos\left(\dfrac{(2k+1)n_1}{2n}\pi\right)$ pour $k \in [\![0, \delta-1]\!]$ est une racine de T_δ.

   Or $0 \leqslant (2k+1)n_1 = 2kn_1 + n_1 \leqslant [2(\delta-1)+1)n_1 + n_1] = (2\delta-1)n_1 + n_1 = 2\delta n_1 = 2n$.

   En outre comme n_1 est impair, $(2k+1)n_1$ est également impair (produit de deux impairs),

   Et donc il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $(2k+1)n_1 = 2K+1$, avec $2K+1 \leqslant 2n$, donc $K \leqslant n - \frac{1}{2}$,

   c'est-à-dire que $K \leqslant n-1$, puisque c'est un nombre entier.

   Donc la racine de T_δ : $\cos\left(\frac{(2k+1)n_1}{2n_1\delta}\pi\right) = \cos\left(\frac{2K+1}{2n}\pi\right)$ est également une racine de T_n.

   On montre de même que toutes les racines de T_δ sont des racines de T_m.

   - Réciproquement, T_n et T_m admettent une racines commune y,

   si et seulement si il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$, $h \in [\![0, m-1]\!]$ tel que $\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) = \cos\left(\frac{2h+1}{2m}\pi\right)$.

   si et seulement si il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$, $h \in [\![0, m-1]\!]$ tel que $\frac{2k+1}{2n} = \frac{2h+1}{2m}$.

   Avec la simplification par 2δ, on a donc :

   T_n et T_m admettent une racines commune y,

   si et seulement si il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$, $h \in [\![0, m-1]\!]$ tel que $\frac{2k+1}{n_1} = \frac{2h+1}{m_1}$.

   Sous cette hypothèse :

   $(2k+1)m_1 = (2h+1)n_1$, d'après le lemme de Gauss ($n_1 \wedge m_1 = 1$) : $m_1|2h+1$.

   Donc il existe M tel que $(2h+1) = Mm_1$, et donc $(2k+1)m_1 = Mm_1n_1$,

   puis en simplifiant par m_1 : $(2k+1) = Mn_1$ et finalement la racine commune est $\cos\left(\frac{M}{2\delta}\pi\right)$.

   Or $Mm_1 = 2h+1$ est un nombre impair, donc M est nécessairement impair.

   Et par ailleurs, $\frac{M}{2\delta} = \frac{2h+1}{2m} < 1$, donc $M < 2\delta$.

   Finalement $\cos\left(\frac{M}{2\delta}\pi\right)$ est également racine de T_δ.

   $$\boxed{T_\delta \text{ est un PGCD de } T_n \text{ et } T_m.}$$

(b)

Piste de recherche...

Sur le même élan, montrer que deux polynômes sont premiers entre eux, c'est montrer qu'ils n'ont pas de racine en commun...

Supposons que m_1 est pair (le raisonnement est identique pour n_1 pair).
Supposons que T_n et T_m admettent une racine commune.
Avec le même raisonnement (et notations) que précédemment,
on a à nouveau $(2k+1)m_1 = (2h+1)n_1$ et donc nécessairement n_1 est également pair.
On a une contradiction car on aurait $2|m_1 \wedge n_1 \dots$
Donc T_n et T_m n'ont pas de racine en commun :

$$\boxed{\text{Si l'un des deux entiers } m_1 \text{ ou } n_1 \text{ est pair, alors } T_n \wedge T_m = 1.}$$

(c) Notons $n_2 = v_2(n)$, la valuation en base 2 de n et $m_2 = v_2(m)$, la valuation en base 2 de m.
— Si $n_2 \neq m_2$, alors $v_2(n \wedge m) = \min(n_2, m_2)$
et donc l'un des termes $\frac{n}{n\wedge m}$ ou $\frac{m}{n\wedge m}$ est pair.
Ainsi $T_n \wedge T_m = 1$
— Si $n_2 = m_2$, alors $v_2(n \wedge m) = n_2 = m_2$
et donc les deux termes $\frac{n}{n\wedge m}$ et $\frac{m}{n\wedge m}$ sont impairs.
Ainsi $T_n \wedge T_m = T_{n\wedge m}$

$$\boxed{\text{On peut résumer : } T_n \wedge T_m = \begin{cases} T_{n\wedge m} & \text{si } v_2(n) = v_2(m) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}}$$

D. Question sur les $\cos\theta$ rationnels

Il est bien connu que $\cos\frac{\pi}{3} \in \mathbb{Q}$. L'objet de cette est de chercher si $\frac{1}{3}$ est le seul rationnel r de $]0, \frac{1}{2}[$ tel que $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$.
Soit $r \in \mathbb{Q} \cap]0, \frac{1}{2}[$. On suppose que $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$ et que l'écriture irréductible de r est $\frac{p}{q}$.

1. (a) Si $q < 3$, on a :
— ou bien $q = 1$ et donc $r = p > \frac{1}{2}$, c'est impossible
— ou bien $q = 2$ et donc $r = \frac{p}{2} \geqslant \frac{1}{2}$, c'est impossible.

$$\boxed{\text{Donc } q \geqslant 3.}$$

Remarques !

Le but de cette question est de réduire le nombre de cas. On sait que parmi les nombres premiers, 2 joue un rôle particulier...

(b) $p \wedge q = 1$, donc il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $up + vq = 1$, donc en divisant par q : $ur + v = \frac{1}{q}$.
Par conséquent,

$$\cos\frac{\pi}{q} = \cos(ur\pi + v\pi) = (-1)^v \cos(ur\pi) = (-1)^v \cos(|u|r\pi) = (-1)^v T_{|u|}(\cos(r\pi))$$

car cos est une fonction paire et en appliquant la définition de T_n.
Mais d'après $B.4.$, $T_{|u|} \in \mathbb{Z}[X]$ et ainsi, comme $\cos r\pi \in \mathbb{Q}$, on a donc

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{q} \in \mathbb{Q}}$$

Remarques !

Par la suite on exploitera souvent : $T_m(\cos\frac{\pi}{q}) = \cos(m\frac{\pi}{q})$ pour simplifier la fraction, selon les facteurs envisagés pour q

2. Si q est un multiple de 4, on a $q = 4p$,

$$T_p(\cos\frac{\pi}{q}) = \cos(p\frac{\pi}{q}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Or pour les mêmes raisons que dans la question précédente, $T_p(\cos\frac{\pi}{q}) \in \mathbb{Q}$.
On a donc une contradiction : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, donc

$$\boxed{q \text{ n'est pas un multiple de 4.}}$$

Donc $v_2(q) \leqslant 1$ et donc :

$$\boxed{\text{Il existe un entier impair } \geqslant 3\text{, noté } h \text{ tel que } q = h \text{ (cas } v_2(p) = 0) \text{ ou } q = 2h \text{ (cas } v_2(p) = 1).}$$

3. $q = h$.

Piste de recherche...
Suivons les indications, car cette question n'est pas facile et fait le lien entre les différentes parties.
On notera $[P]_k$ le coefficient associé à X^k pour le polynôme P

Nous savons que $T_h(\cos\frac{\pi}{h}) = \cos(h\frac{\pi}{h}) = \cos(\pi) = -1$.
Donc $\cos\frac{\pi}{h}$ est une racine du polynôme $R_h = T_h + 1$, polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré h.
D'après la partie A, si $\cos\frac{\pi}{h} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ (décomposition irréductible), alors :
— $a|[R_h]_h = [T_h]_h = 2^{h-1}$ donc $a = 2^s$ (avec $s < h$).
— et $b|[R_h]_0 = [T_h]_0 - 1 = -1$ car h est impair donc T_h impair, donc pour tout m, $[T_h]_{2m} = 0$.
et par conséquent $b|1$, donc $b = 1$.
Finalement $\cos\dfrac{\pi}{h} = \dfrac{1}{2^s} \leqslant \dfrac{1}{2}$, si $s \geqslant 1$.
Or $h \geqslant 3$, donc par décroissance de cos, $\cos\dfrac{\pi}{h} \geqslant \cos\dfrac{\pi}{3} = d\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{La seule solution possible est donc } \cos\frac{\pi}{h} = \frac{1}{2} \text{ et } h = 3}$$

4. Si $q = 2h$, alors $\cos\frac{\pi}{h} = T_2(\cos\frac{\pi}{2h}) = T_2(\cos\frac{\pi}{q})$ est rationnel ($T_2 \in \mathbb{Z}[X]$ et $\cos\frac{\pi}{q} \in \mathbb{Q}$).
Et donc d'après la question précédente : $h = 3$, et donc nécessairement $q = 6$.
Mais pourtant : $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$.

$$\boxed{\text{Il n'y a pas de solution de la forme } \tfrac{\pi}{2h} \text{ avec } h \text{ impair}}$$

5. D'après l'étude précédente, si r de $]0, \frac{1}{2}[$ vérifie $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$, alors $r = \frac{p}{3}$.
Comme $r \in]0, \frac{1}{2}[$, nécessairement $p = 1$.
La réciproque est vrai : le nombre $\cos\frac{\pi}{3} \in \mathbb{Q}$, donc

$$\boxed{\text{Le seul rationnel } r \text{ de }]0, \tfrac{1}{2}[\text{ tels que } \cos(r\pi) \in \mathbb{Q} \text{ est } r = \tfrac{\pi}{3}}$$