Devoir à la maison n°6

Problème

A. Relation sur les polynômes à coefficients entiers

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on suppose que $\deg(P) = n$ ($n \geqslant 1$) et on note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
On suppose également que P est à coefficients entiers, c'est-à-dire : pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $a_i \in \mathbb{Z}$.
Enfin, on fait également l'hypothèse que $a_0 \neq 0$ (on sait que $a_n \neq 0$).
Soit $r = \frac{p}{q}$, une racine rationnelle de P (écrite ici sous forme irréductible), montrer que :

$$p|a_0 \quad \text{et} \quad q|a_n$$

B. Polynômes de Tchebychev

1. Construction de la famille de polynômes.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que
   $$\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(nx) = T_n(\cos x)$$
   (b) Exprimer T_0, T_1, T_2, T_3 et T_4.
   (c) Que valent $T_n(0)$, $T_n(1)$, $T_n(-1)$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que
   $$T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n = 0$$
3. Pour $n \neq 0$, déterminer le degré de T_n et son coefficient dominant. Quelle est la parité de T_n ?
4. Montrer que tous les coefficients de T_n sont des entiers relatifs.
5. On suppose $n \geqslant 1$, montrer que T_n admet n racines réelles distinctes. Les énoncer
6. On suppose $n \geqslant 2$, montrer que T_n' admet $(n-1)$ racines réelles distinctes.
7. Montrer que T_n vérifie la relation différentielle : $n^2 T_n - XT_n' + (1 - X^2)T_n'' = 0$
   (On pourra considérer la fonction $x \mapsto T_n(\cos x)$)
8. (**) En utilisant la relation précédente, exprimer les coefficients de T_n (on écrira $T_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$).
   On commencera par montrer que : $\forall\ h \leqslant n$, $a_{h-2} = \dfrac{h(h-1)}{(h-2-n)(h-2+n)} a_h$,
   puis on cherchera une relation entre a_{n-2p} *et* a_n, *enfin on exprimera* a_{n-2p} *à l'aide de* $\frac{n}{n-p}\binom{p}{n-p}$.

C. Arithmétique des polynômes de Tchebychev

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n = 0$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $T_{n+1} \wedge T_n = 1$.
2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On note $\delta = m \wedge n$ et m_1, n_1 tels que $m = \delta m_1$, $n = \delta n_1$.
   (a) Montrer que si m_1 et n_1 sont impairs, alors T_δ est un PGCD de T_n et T_m.
   (b) Montrer que si l'un des deux entiers m_1 ou n_1 est pair, alors $T_n \wedge T_m = 1$.
   (c) Que vaut finalement $T_n \wedge T_m$?

D. Question sur les $\cos\theta$ rationnels

Il est bien connu que $\cos \frac{\pi}{3} \in \mathbb{Q}$. L'objet de cette est de chercher si $\frac{1}{3}$ est le seul rationnel r de $]0, \frac{1}{2}[$ tel que $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$.
Soit $r \in \mathbb{Q} \cap]0, \frac{1}{2}[$. On suppose que $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$ et que l'écriture irréductible de r est $\frac{p}{q}$.

1. (a) Montrer que $q \geqslant 3$.
   (b) Montrer que $\cos \frac{\pi}{q} \in \mathbb{Q}$.
   On pourra utiliser la relation de Bézout vérifiée par (p, q) et B.4.
2. Montrer que q n'est pas un multiple de 4 (on admet que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
   En déduire qu'il existe un entier impair, noté $h \geqslant 3$ tel que $q = h$ ou $q = 2h$.
3. On suppose que $q = h$. Montrer que $h = 3$.
   On pourra exploiter le polynôme $T_h + 1$ et le résultat de la partie A.
4. On suppose que $q = 2h$. Montrer que $\cos \frac{\pi}{h} \in \mathbb{Q}$. Est-ce possible ?
5. Conclure : quels sont les rationnels r de $]0, \frac{1}{2}[$ tels que $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$?