

Devoir à la maison n°5 CORRECTION

Problème 1

A. Préliminaire

1. $h \mapsto \varphi_{x,n}$ (on insiste sur le fait que la variable est h) est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall h \in \mathbb{R}, \varphi'_{x,n}(h) = (n+1) \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{x+h}{n+1}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Comme $y \mapsto (1+y)^n$ est croissante :

$$\varphi'_{x,n}(h) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+h}{n+1} \leq \frac{x}{n} \Leftrightarrow nx + nh \leq nx + x \Leftrightarrow h \leq \frac{x}{n}$$

Ainsi, $\varphi_{x,n}$ est décroissante sur $] -\infty, \frac{x}{n}[$ et croissante sur $]\frac{x}{n}, +\infty[$

Donc, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{x,n}(h) \geq \varphi_{x,n}\left(\frac{x}{n}\right) = \left(1 + \frac{x + \frac{x}{n}}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} = 0$$

Par conséquent, Ainsi pour tout $h \in \mathbb{R}$ (donc pour $h \geq -1$), $\varphi(h) \geq 0$.

2. En particulier en $h = 0$, $\varphi_{x,n}(h) \geq 0$, ce qui conduit à

$$\forall x \geq -n, \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

3. Soit $x \in [-n, n]$, considérons $y = -x$, on a donc également $y \in [-n, n]$ et en particulier $y \geq -n$.

D'après la question précédente : $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{y}{n+1}\right)^{n+1}$.

Ce qui implique (tous les termes sont positifs) :

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^{-n} \geq \left(1 + \frac{y}{n+1}\right)^{-(n+1)} \Rightarrow \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \geq \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{-(n+1)}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier l'inégalité du centre :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} &\leq \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{-(n+1)} \Leftrightarrow \left(\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\left(1 - \frac{x}{n+1}\right)\right)^{(n+1)} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{x^2}{(n+1)^2}\right)^{(n+1)} \leq 1 \end{aligned}$$

ce qui est vrai. On a donc démontré :

$$\forall x \in [-n, n], \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \leq \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{-(n+1)} \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

B. Définition de $e(x)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

1. $x \in \mathbb{R}$. Notons $n_0 = \lfloor |x| \rfloor + 1$. Alors $x \in [-n_0, n_0]$.

Et donc pour tout $n \geq n_0$, $x \in [-n, n]$ et d'après la question précédente : $u_n(x) \leq u_{n+1}(x)$.

et toujours avec la question précédente : $u_n(x) \leq M = \left(1 - \frac{x}{n_0}\right)^{-n_0}$, indépendant de n .

Donc à partir d'un certain rang, $(u_n(x))_{n \geq n_0}$ est croissante et majorée.

Donc $(u_n(x))_{n \geq n_0}$ est convergente, donc $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

On notera désormais $e(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$.

2. Pour $n \geq n_0$, $u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$, donc

$$e(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \geq u_{n_0}(x) > 0$$

Et $u_n(0) = 1^n = 1$, donc

$$e(0) = \lim_n 1 = 1.$$

C. Dérivabilité de la fonction e

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

— On sait que pour tout $h \in [-1, +\infty[$ $\varphi_{x,n}(h) \geq 0$,

$$\text{donc } u_{n+1}(x+h) = \left(1 + \frac{x+h}{n+1}\right)^{n+1} \geq (1+h) \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = (1+h) \times u_n(x)$$

En faisant tendre n vers l'infini :

$$\forall h \in [-1, +\infty[, (1+h)e(x) \leq e(x+h)$$

— Soit $h \in]-1, 1[$,

en prenant $h' = -h \in]-1, 1[$ et $x' = x+h$, appliqué la relation précédente :

$$(1+h')e(x') \leq e(x'+h') \implies (1-h)e(x+h) \leq e(x+h-h) = e(x)$$

— Comme $(1+h)e(x) \leq e(x+h)$, on a donc $e(x+h) - e(x) - he(x) \geq 0$.

Puis, comme $(1-h)e(x+h) \leq e(x)$, en additionnant $-e(x) + he(x) - he(x) + h^2e(x)$, on a :

$$(1-h)e(x+h) - (1-h)e(x) - h(1-h)e(x) \leq h^2e(x)$$

$$\text{Et en divisant par } 1-h > 0 : e(x+h) - e(x) - he(x) \leq \frac{h^2}{1-h}e(x).$$

On a donc

$$\forall h \in]-1, 1[, \quad 0 \leq e(x+h) - e(x) - he(x) \leq \frac{h^2}{1-h}e(x)$$

2. D'après la dernière inégalité, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e(x) \leq \frac{e(x+h) - e(x)}{h} \leq \left(\frac{h}{1-h} + 1\right) e(x) = \frac{1}{1-h}e(x)$$

Donc, par encadrement : $\frac{e(x+h)-e(x)}{h}$ admet une limite pour $h \rightarrow 0$, elle vaut $e(x)$.

$$\text{Donc } e \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } e' = e, \text{ i.e. } e \text{ solution de l'équation différentielle } y' - y = 0$$

3. On note $(0, x)$, l'intervalle $[0, x]$ ou $[x, 0]$ selon que $x > 0$ ou $x < 0$.

Comme e vérifie $e' = e$, on montre par récurrence que e est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e^{(k)} = e$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } \varphi : (0, x) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto -e(x) + \sum_{k=0}^n e(x-t) \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} M \\ = -e(x) + e(x-t) + \sum_{k=1}^n e(x-t) \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} M \text{ tel que } \varphi(x) = 0 \text{ (c'est possible : } \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \neq 0). \end{aligned}$$

φ est dérivable sur $(0, x)$, et $\varphi(0) = -e(x) + e(x-0) + 0 = 0$ et $\varphi(x) = 0$.

On peut appliquer le théorème de Rolle :

$$\exists c_x \in (0, x) \quad \varphi'(c_x) = 0$$

Or, comme la dérivée de $t \mapsto e(x-t)$ est $t \mapsto -e'(x-t) = -e(x-t)$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= 0 - e(x-t) + \sum_{k=1}^n (-e(x-t)) \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=1}^n e(x-t) \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{t^n}{n!} M \\ &= e(x-t) \left(-1 + \sum_{k=1}^n \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{t^k}{k!} \right) + \frac{t^n}{n!} M = e(x-t) \left(-1 + \frac{t^0}{0!} - \frac{t^n}{n!} \right) + \frac{t^n}{n!} M \end{aligned}$$

On a donc $\varphi'(c_x) = 0 = (-e(x-c_x) + M) \frac{c_x^n}{n!}$.

Et comme $c_x \neq 0$, on a donc $M = e(x-c_x)$.

Notons $d_x = x - c_x \in (0, x)$.

$$\exists d_x \in [x, 0] \text{ ou } [0, x], \quad e(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} e(d_x)$$

D. Propriétés algébriques de e

1. Soit $y \in \mathbb{R}$.

Notons $\psi_y : x \mapsto e(-x)e(x+y)$, alors par composition ψ_y est dérivable.

$$\begin{aligned}\text{Et pour tout } x \in \mathbb{R}, \psi'_y(x) &= -e'(-x)e(x+y) + e(-x)e'(x+y) \\ &= -e(-x)e(x+y) + e(-x)e(x+y) = 0.\end{aligned}$$

Ainsi ψ_y est constante et $\psi_y(0) = e(0)e(y) = e(y)$.

$\text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, e(-x)e(x+y) = e(y).$

2. Ainsi, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, en posant $y = a + b$ et $x = -a$:

$$e(a)e(b) = e(-x)e(x+y) = e(y) = e(a+b)$$

Donc

$e \text{ induit un morphisme du groupe } (\mathbb{R}, +) \text{ vers le groupe } (\mathbb{R}_+^*, \times).$

Problème 2

On fixe dans cet exercice deux groupes $(G, \cdot)$ et $(G', \top)$. On considère H un sous-groupe de G et $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

Pour $x \in G$, on note $xH = \{xh, h \in H\}$ et $Hx = \{hx, h \in H\}$.

A. Autour du théorème de Lagrange

Pour x et y dans G , on note $x \equiv_H y$ si et seulement si il existe $h \in H$ tel que $x = yh$.

1. Pour tout $x \in G$, $x \equiv_H x$ avec $h = e \in H$. Donc $\equiv_H$ est réflexive. Pour tout $x, y \in G$, $x = yh \Leftrightarrow y = xh^{-1}$.

Comme H est un groupe, $h \in H \Leftrightarrow h^{-1} \in H$.

Et finalement $x \equiv_H y$ si et seulement si $y \equiv_H x$, donc $\equiv_H$ est symétrique.

Pour tout $x, y, z \in G$, $x = yh$ et $y = zh' \Leftrightarrow x = z \cdot (h'h)$.

Et comme H est groupe, $h, h' \in G \Leftrightarrow hh' \in G$.

Ainsi $\equiv_H$ est transitive.

$\equiv_H \text{ est une relation d'équivalence sur } G$

Soit $x \in G$.

$$x \equiv_H y \Leftrightarrow y \equiv_H x \Leftrightarrow \exists h \in H, y = xh \Leftrightarrow y \in xH$$

$\text{Donc l'ensemble des classes d'équivalence est } \mathcal{C}_H = \{xH, x \in G\}$

On suppose maintenant que G est fini et on note $|G| = \text{card}(G)$, son ordre ou cardinal.

2. Pour tout $\mathcal{O} \in \mathcal{C}_H$, $\exists x \in G$ tel que $\mathcal{O} = xH$.

Donc $\pi_H : G \rightarrow \mathcal{C}_H, x \mapsto xH$ est surjective.

$\text{Ainsi comme } G \text{ est fini, il en est de même de } \mathcal{C}_H. \text{ Plus précisément : } \text{card}(\mathcal{C}_H) \leq \text{card}(G).$

Pour tout $x \in G$, xH est un sous-ensemble de G de cardinal égal à $|H|$.

En effet, si $xh = xh'$,

alors comme x est inversible, en multipliant par x^{-1} $h = h'$.

Donc tous les éléments xh de l'ensemble xH sont distincts,

il y en a autant que d'éléments de H .

Les ensembles xH sont disjoints (ou égaux),

En effet, si $xH \cap x'H \neq \{0\}$, il existe $y \in xH$ et $y \in x'H$.

Donc $x \equiv_H y, x' \equiv_H y$, donc par transitivité $x \equiv_H x'$.

Et ainsi $x'H \subset xH$ et réciproquement $xH \subset x'H$.

Par conséquent, $xH = x'H$.

Enfin, tout élément $y \in G$ est au moins dans yH , alors que pour tout $x \in G$, $xH \subset G$.
 Bilan : en notant, $k = \text{card}(\mathcal{C}_H) \in \mathbb{N}$, il existe $x_1, x_2, \dots, x_k \in G$ tel que

$$G = \bigcup_{i=1}^k x_i H \implies |G| = \sum_{i=1}^k \text{card}(x_i H) \quad (\text{réunion disjointe})$$

$$\implies |G| = \sum_{i=1}^k |H| = |H| \sum_{i=1}^k 1 = |H| \times \text{card}(\mathcal{C}_H)$$

$|G| = |H| \times \text{card}(\mathcal{C}_H)$. Le théorème de Lagrange s'en déduit immédiatement

3. On suppose ici que $H = \text{Ker } f = \{a \in G \mid f(a) = 0\}$.
 Soit $y \in G'$, supposons qu'il existe $x_0 \in G$ tel que $f(x_0) = y$.
 Alors

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff f(x) = f(x_0) \iff f(x) \top' (f(x_0))^{-1} = f(x) \top' f(x_0^{-1}) = e' \\ &\iff f(x \top x_0^{-1}) = e' \quad \text{par propriété de morphisme} \\ &\iff x \top x_0^{-1} \in H \iff \exists h \in H, x = x_0 \top h \iff x \in x_0 H \end{aligned}$$

Par conséquent, par disjonction de cas :

$f^{-1}(\{y\})$ est l'ensemble vide ou un élément de $\mathcal{C}_H$.

D'après 2., comme $H = \text{Ker } f$ est un sous-groupe de G , on a donc $|G| = |H| \times \text{card}(\mathcal{C}_H)$.
 Par ailleurs,

$$f^{-1}\{y\} \neq \emptyset \iff \exists x \in G, y = f(x) \iff y \in \text{Im } f$$

On a donc : $\forall y \in \text{Im } f, \exists \mathcal{O} \in \mathcal{C}_H$ tel que $f^{-1}(\{y\}) = \mathcal{O}$.

Enfin, pour tout élément $\mathcal{O}$ de $\mathcal{C}_H$, il existe $x \in G$ tel que $\mathcal{O} = xH$,

donc en prenant $y = f(x)$, $x \in f^{-1}(\{y\})$ et donc il existe $y \in \text{Im } f$ tel que $\mathcal{O} = f^{-1}(\{y\})$.

On a donc : $\forall \mathcal{O} \in \mathcal{C}_H, \exists y \in \text{Im } f$, tel que $\mathcal{O} = f^{-1}(\{y\})$.

Autrement écrit, il existe une bijection entre $\text{Im } f$ et $\mathcal{C}_H$, donc $\text{Im } f = \text{card}(\mathcal{C}_H)$.

On peut alors affirmer

$$|G| = |\text{Ker } f| \times |\text{Im } f|$$

B. Sous-groupes distingués

On dit que H est un sous-groupe distingué de G si, pour tout $x \in G$, et tout $h \in H$, $xhx^{-1} \in H$.

1. H est distingué

$$\begin{aligned} &\iff \text{pour tout } x \in G, \text{ et tout } h \in H, xhx^{-1} \in H \\ &\iff \text{pour tout } x \in G, \text{ et tout } h \in H, \exists \bar{h} \in H \text{ tel que } xhx^{-1} = \bar{h} \\ &\iff \text{pour tout } x \in G, \text{ et tout } h \in H, \exists \bar{h} \in H \text{ tel que } xh = \bar{h}x. \\ &\iff \text{pour tout } x \in G, \text{ et tout } h \in H, xh \in Hx. \\ &\iff \text{pour tout } x \in G, xH \subset Hx. \end{aligned}$$

En fait on a donc démontré :

H est un sous-groupe distingué de G si et seulement si : $\forall x \in G, xH \subset Hx$.

Supposons que ces hypothèses sont vérifiées.

En prenant $y = x^{-1}$, on a donc $yH \subset Hy$, puis pour tout $h \in H$, $\exists \bar{h}$ tel que $yh = \bar{h}y$.

Donc pour tout $h \in H$, $\exists \bar{h}$ tel que $hx = x(yh)x = x(\bar{h}y)x = x\bar{h}$.

Et par conséquent $Hx \subset xH$.

Finalement

H est un sous-groupe distingué de G si et seulement si : $\forall x \in G, xH = Hx$.

2. Soit $x \in G$, par propriétés des morphismes :

$$\forall h \in \text{Ker } f, f(xhx^{-1}) = f(x) \top f(h) \top f(x^{-1}) = f(x) \top e' \top (f(x))^{-1} = e'$$

Donc $\forall x \in G, \forall h \in \text{Ker } f, xhx^{-1} \in \text{Ker } f$. Autrement écrit :

$\text{Ker } f$ est un sous-groupe distingué de G .

3. Il faut évidemment que G ne soit pas commutatif.

On considère par exemple $G = \mathcal{S}_4$, le groupe des permutations de $\mathbb{N}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$.

Un sous-groupe de G est $H = \{id, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$ où $\sigma : (1, 2, 3, 4) \mapsto (2, 3, 4, 1)$, permutation circulaire.

Soient $\tau : (1, 2, 3, 4) \mapsto (2, 1, 3, 4)$. Alors $\tau^{-1} = \tau$.

Avec $h = \sigma^2 : (1, 2, 3, 4) \mapsto (3, 4, 1, 2)$, on a :

$$\tau \circ h \circ \tau^{-1}(1, 2, 3, 4) = \tau \circ h(2, 1, 3, 4) = \tau(3, 4, 2, 1) = (4, 3, 2, 1)$$

Ainsi $\tau \circ h \circ \tau^{-1} \notin H$ Donc

H n'est pas distingué

C. Groupe quotient

On suppose désormais (jusqu'à la fin du problème) que H est un sous-groupe distingué de G . Si A et B sont deux parties de G , on note $A \star B = \{ab, (a, b) \in A \times B\}$.

1. Soient $x, y \in G$.

$$\forall (a, b) \in xH \times yH, \exists h_1, h_2 \in H, a = xh_1, b = yh_2 \quad \text{et} \quad ab = xh_1yh_2$$

Or $Hy = yH$, car H est distingué, donc

$$\forall (a, b) \in xH \times yH, \exists h_1, h_2, h_3 \in H, a = xh_1, b = yh_2 \quad \text{et} \quad ab = xh_1yh_2 = xyh_3h_2 \in (xy)H$$

On a la première inclusion $(xH) \star (yH) \subset (xy)H$.

Réciproquement,

$$\forall c \in (xy)H, \exists h \in H, c = xyh = (xe)(yh) \in (xH) \star (yH)$$

car $e \in H$. On a la seconde inclusion $(xy)H \subset (xH) \star (yH)$

Donc par double inclusion

$$\text{pour tout } (x, y) \in G^2, (xH) \star (yH) = (xy)H.$$

2. L'application $\star$ est donc une application interne bien définie.

L'élément neutre de $\star$ est H :

$$\forall x \in G, (xH) \star H = \{xh_1h_2 \mid h_1, h_2 \in H\} = \{xh' \mid h' \in H\} = xH$$

Soit $xH \in \mathcal{C}_H$. Alors

$$x^{-1}H \star xH = \{x^{-1}h_1xh_2 \mid h_1, h_2 \in H\} = \{h_3h_2 \mid h_3, h_2 \in H\} = H$$

En effet H est distingué donc $x^{-1}h_1x \in H$.

De même, comme $xh_1x^{-1} \in H$, pour tout $h_1 \in H$, on a $xH \star x^{-1}H = H$.

Par conséquent, tout élément xH de $\mathcal{C}_H$ admet un inverse pour $\star : x^{-1}H$

Enfin, si $xH, yH, zH \in \mathcal{C}_H$,

$$\begin{aligned} (xH \star yH) \star zH &= \{(xh_1yh_2)zh_3 \mid h_1, h_2, h_3 \in H\} = \{xh_1yh_2zh_3 \mid h_1, h_2, h_3 \in H\} \\ &= \{xh_1(yh_2zh_3) \mid h_1, h_2, h_3 \in H\} = xH(\star yH \star zH) \end{aligned}$$

car G est un groupe donc associatif.

Toutes les propriétés sont vérifiées : $(\mathcal{C}_H, \star)$ est un groupe.

3. On note $\pi : G \rightarrow \mathcal{C}_H$ l'application définie par $\pi(x) = xH$.

Soient $x, y \in G$,

$$\pi(x) \star \pi(y^{-1}) = xHy^{-1}H = x(Hy^{-1})H = x(y^{-1}H)H = xy^{-1}H = \pi(xy^{-1})$$

car H est distingué.

π est bien un morphisme de groupes

Le noyau de π est $\text{Ker } \pi = \{x \mid \pi(x) = H\} = H$

Alors que

L'image de π est $\text{Im } \pi = \mathcal{C}_H$, tout entier

D. Propriété universelle du groupe quotient

1. Supposons qu'il existe un morphisme de groupes $g : \mathcal{C}_H \rightarrow G'$ tel que $f = g \circ \pi$.

Soit $h \in H$.

Alors $f(h) = g(\pi(h)) = g(H) = e_{G'}$, donc $h \in \text{Ker } f$.

Donc $H \subset \text{Ker } f$

2. On suppose que $H \subset \text{Ker } f$.

Si $f = g \circ \pi$, alors nécessairement, g doit vérifier :

pour tout $x \in G$, $g : xH \mapsto f(x)$.

Donc l'unicité est assurée, l'existence est plus subtile :

il faut vérifier que si $xH = x'H$, alors $g(x) = g(x')$, i.e. $f(x) = f(x')$.

Soient donc $x, x' \in G$ tel que $xH = x'H$.

Donc, comme $x' \in x'H = xH$, il existe $h \in H$ tel que $x' = xh$.

Ainsi, $f(x') = f(x \cdot h) = f(x) \top f(h) = f(x) e_{G'}$, car f est un morphisme et $h \in H \subset \text{Ker } f$.

Et par conséquent : $f(x) = f(x')$.

Donc g est également bien définie.

Bilan : si $H \subset \text{Ker } f$, il existe un unique morphisme de groupes $g : \mathcal{C}_H \rightarrow G'$ tel que $f = g \circ \pi$.

3. Avec les hypothèses précédentes, :

— Supposons que g est surjective,

π étant surjective (par définition de $\mathcal{C}_H$), alors par composition $f = g \circ \pi$ est surjective.

Réciproquement si f est surjective,

pour tout $y \in G'$, $\exists x \in G$ tel que $f(x) = y$ et donc $y = g(xH)$.

pour tout $y \in G'$, $\exists H' \in \mathcal{C}_H$ tel que $y = g(H')$.

Donc g est surjective.

Bilan : g est surjective si et seulement si f est surjectif.

— Supposons que g soit injective.

Soit $x \in \text{Ker } f$, alors $f(x) = e_{G'} = g(\pi(x))$.

Donc $\pi(x) \in \text{Ker } g$. Or g injective, donc $\text{Ker } g = e_{\mathcal{C}_H}$.

Par conséquent, $x \in H$. Ainsi $\text{Ker } f \subset H$.

L'inclusion réciproque est vraie par hypothèse, donc $H = \text{Ker } f$.

Réciproquement, si $H = \text{Ker } f$,

Soient $xH, yH \in \mathcal{C}_H$, tel que $g(xH) = g(yH)$.

Donc $g(\pi(x)) = g(\pi(y))$ et donc $f(x) = f(y)$, ainsi $f(xy^{-1}) = f(x) \top f(y)^{-1} = e_{G'}$.

Ainsi $xy^{-1} \in \text{Ker } f = H$, donc $xH = yH$. Et g est injective.

Bilan : g est injective si et seulement si $\text{Ker } f = H$.