

# **Annexes**



# Suite de variable aléatoire.

## Convergence (HP)

### Résumé -

Totalement hors-programme (sauf la loi faible des grands nombres, au programme de seconde année, mais sans le vocabulaire bien adapté), on peut considérer cette partie comme une application des deux chapitres précédents.

Ce qui unit les différents résultats ici, est la notion de suite de variables aléatoires. Et en particulier, la question de la convergence associée.

Plusieurs modes de convergence sont assez naturels, nous en proposons trois ici.

En seconde année, les différents modes de convergence de suites de fonctions sont également un morceau important. On peut faire un parallèle entre ces deux parties.

C'est aussi l'occasion de revenir sur un résultat parachuté en terminale : le théorème de Moivre-Laplace, conséquence d'un sommet des mathématiques : le théorème limite central, mais qui nécessite, à notre avis de passer par un certain nombre d'étapes intermédiaires (définition, vocabulaire, démonstration...), pour vraiment comprendre ce que l'on manipule.

Quelques vidéos :

- Maths en tête : Alexandre Morgan - La dynastie des Bernoulli / Maths C qui ? #10 - <https://www.youtube.com/watch?v=jWut-6jBl3U>
- Sur le Chemin des Maths - Histoire des Mathématiques 03 : Abraham de Moivre de la loi binomiale à la loi normale - <https://www.youtube.com/watch?v=uLbPKe3LT28>
- Statoscope - Convergence en loi vs convergence en probabilité - [https://www.youtube.com/watch?v=9O1ves\\_L2eM](https://www.youtube.com/watch?v=9O1ves_L2eM)

### Sommaire

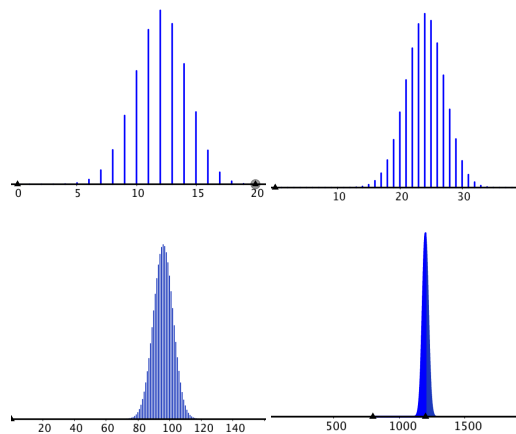
<b>1. Problèmes</b>	<b>841</b>
<b>2. Suite de variable aléatoire</b>	<b>842</b>
2.1. Suite de variables aléatoires	842
2.2. Exemples de convergence de variable aléatoire	843
<b>3. Différents modes de convergence</b>	<b>844</b>
3.1. convergence presque sûre	844
3.2. Convergence en probabilité	846
3.3. Lien entre ces deux convergences de variables aléatoires	847
3.4. Convergence en loi	848
<b>4. Loi (faible) des grands nombres et estimateurs</b>	<b>850</b>
4.1. Lois des grands nombres	850
4.2. Estimateurs	851
<b>5. Théorème limite central</b>	<b>852</b>

5.1.	Rappels sur la loi normale . . . . .	852
5.2.	Enoncé . . . . .	853
5.3.	Intervalle de confiance . . . . .	853
6.	<b>Bilan</b> . . . . .	<b>854</b>

## 1. Problèmes

### ? Problème A1 - $\frac{S_n}{n} \rightarrow ?$

On a fait la représentation pour  $p = 0,6$  et  $n = 20$ ,  $n = 40$ ,  $n = 160$  et  $n = 2000$  :



L'expérience montre que  $M_n$  devrait tendre vers  $p$ , ce qu'illustre le resserrement du pic.

Qu'en penser?

### ? Problème A2 - Convergence (en loi)

En point d'orgue du programme de mathématique en terminale, figure le théorème de Moivre-Laplace.

Quel est sa signification? Et comment se démontre-t-il?

Il s'agit d'une limite pour des variables aléatoires. Que signifie qu'une suite de variables aléatoires convergent?

### ? Problème A3 - Estimateur

Quel rapport entre l'espérance mathématique et l'estimateur d'une expérience?

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une même expérience, quels sont les résultats qu'on obtient? Comment faire le lien entre

- la probabilité d'une variable aléatoire, souvent choisie comme modèle selon les symétries de l'expérience,
- son espérance mathématique
- la moyenne expérimentale des résultats obtenus, lors de la répétition un grand nombre de fois de l'expérience associée?

## 2. Suite de variable aléatoire

### 2.1. Suite de variables aléatoires

La définition suivante est un rappel :

#### Définition - Indépendance pour une suite de v.a.

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathbf{P})$ .

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes si, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes.

#### Heuristique - Cas classique

Très souvent,  $n$  représente le temps.

On répète un certain nombre de fois une même expérience élémentaire. On note  $X_k$ , le résultat d'une certaine mesure sur l'expérience  $k$ .

On obtient ainsi une suite de variable aléatoire.

Très souvent, les expériences répétées sont indépendantes. On a alors une suite  $(X_k)$  de variable aléatoire indépendante, identiquement distribué (notée « v.a.i.i.d. » dans la littérature probabiliste).

C'est le cas par exemple lorsqu'on répète une même expérience en science physique. Le résultat est d'une certaine façon une variable aléatoire (même si son espérance est très précise...)

#### Remarque - Cas classique (2). $\Omega$ infini (dénombrable)

Il n'est pas rare que  $\Omega$  soit en fait infini, même si pour tout  $n$ ,  $X_n$  est définie sur  $\Omega_n$ , un ensemble fini.

On aurait alors  $\Omega_n = \pi_n(\Omega)$ , où pour  $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega$ ,  $\pi_n((\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ .

C'est hors programme de première année, mais pas de seconde année (donc au programme des concours).

### 2.2. Exemples de convergence de variable aléatoire

#### Remarque - Différents modes de convergence

Une des difficultés est qu'il existe des modes de convergence variés pour les variables aléatoires. Ils sont plus ou moins « forts » ... Pour aborder ces différentes notions, nous allons considérer une famille d'exemple.

#### Exemple - Variable de Bernoulli répétée

#### Heuristique - Convergence de variable aléatoire

Comment interpréter ce « devrait tendre » :

- Interprétation déterministe : pour toute réalisation  $\omega$  du hasard, on a  $M_n(\omega) \rightarrow p$ . Ceci est clairement faux. Dans  $\Omega$ , on a par exemple  $\omega$  tel que  $X_i(\omega) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^i)$  (une fois sur 2  $X$  vaut 0 ou 1).
- Interprétation forte : avec une probabilité égale à 1, la suite  $M_n(\omega) \rightarrow p$ .

$$\mathbf{P}(\{\omega \mid M_n(\omega) \rightarrow p\}) = 1$$

Il s'agit de la convergence presque sûre que nous verrons plus loin. Elle conduit à la loi forte des grands nombres.

— Interprétation faible : l'ensemble des moyennes qui reste écartées de  $p$  de plus de  $\epsilon$  (quelconque) tend vers 0.

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbf{P}(\{\omega \mid |M_n(\omega) - p| > \epsilon\}) \longrightarrow 0$$

Il s'agit de la convergence en probabilité que nous verrons plus loin.  
Elle conduit à la loi faible des grands nombres.

**Remarque - On notera l'interversion des  $\epsilon$  (et plus) entre les convergences p.s. et en probabilité**

Pour une convergence presque sûre, on a :

$$\mathbf{P}(\{\omega \mid \forall \epsilon, \exists N_\epsilon(\omega) \mid \forall n \geq N_\epsilon(\omega), |M_n(\omega) - p| < \epsilon\}) = 1$$

ou en passant au complémentaire :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{P}(\{\omega \mid \forall \epsilon, \exists N_\epsilon(\omega) \text{ tq } \forall n \geq N_\epsilon(\omega), |M_n(\omega) - p| < \epsilon\}) \\ &= \mathbf{P}(\{\omega \mid \exists \epsilon > 0 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, \exists N > n \text{ tq } |M_N(\omega) - p| > \epsilon\}) \end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire avec des suites extraites :

$$\mathbf{P}(\{\omega \mid \exists \epsilon > 0, \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, |M_{\varphi(n)}(\omega) - p| > \epsilon\}) = 0$$

Pour une convergence en probabilité, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \quad u_n(\epsilon) := \mathbf{P}(\{\omega \mid |M_n(\omega) - p| > \epsilon\}) \longrightarrow 0$$

$$\forall \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists N_\alpha \text{ tq } \forall n \geq N_\alpha, |u_n(\epsilon)| \leq \alpha$$

**Heuristique - Convergence de loi (de var) (« convergence en loi »)**

On peut s'intéresser à plus que la limite de  $M_n$ . En effet, on peut s'intéresser aux fluctuations autour de  $p$ . L'échelle de fluctuations de  $M_n$  autour de sa valeur est de l'ordre de l'écart-type :  $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X_i)}{\sqrt{n}}$ .

Pour comparer ces  $M_n$ , on s'intéresse donc à sa version centrée réduite :  $M_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}$ .

On ne peut pas espérer une convergence de variable, car les fluctuations restent importantes : de l'ordre de l'unité.

Mais on peut espérer une estimation de la répartition, ou encore une loi (limite) de probabilité de la variable aléatoire de répartition.

On a donc besoin d'une nouvelle notion de convergence : la convergence en loi. Le théorème clé est alors le théorème limite centrale.

### 3. Différents modes de convergence

On considère dans cette section des variables aléatoires réelles  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  et  $X$ , toutes définies sur un même espace de probabilité.

#### 3.1. convergence presque sûre

La première convergence dérive d'une convergence d'événements

**Pour aller plus loin - Convergence naturelle simple**

Evidemment la convergence la plus naturelle, mais également trop rare pour être rencontrée est donnée par :

$$\forall \omega, X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$$

**Définition - convergence presque sûre**

La suite  $(X_n)$  converge presque sûrement vers  $X$  si

$$\mathbf{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = \mathbf{P}(\{\omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

On note alors  $X_n \xrightarrow{ps} X$ .

Dans une remarque précédente, on a vu que l'étude de la convergence par suite extraite pourrait être intéressante.

**Définition - Infiniment souvent**

Soit  $\omega \in \Omega$ ,  $\epsilon > 0$  et une suite  $Y_n$  de v.a.

On dit que  $|Y_n(\omega)| > \epsilon$  infiniment souvent,

si il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow \nearrow$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $|Y_{\varphi(n)}(\omega)| > \epsilon$ .

si  $\{n \in \mathbb{N} \mid |Y_n(\omega)| > \epsilon\}$  n'est pas borné.

L'événement associé se note :  $\{|Y_n| > \epsilon \text{ i.s.}\}$

**Proposition - Événement équivalent**

Pour tout  $\omega \in \Omega$ , et tout  $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$|Y_n(\omega)| > \epsilon \text{ i.s.} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n \text{ tel que } |Y_p(\omega)| > \epsilon$$

Ainsi :

$$\{\omega \in \Omega \mid |Y_n(\omega)| > \epsilon \text{ i.s.}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left( \bigcup_{p \geq n} \{\omega \mid |Y_p(\omega)| > \epsilon\} \right)$$

**Démonstration****Heuristique - Réunion décroissante. Passage à la limite**

Si on note  $A_n$ , l'événement  $\bigcup_{p \geq n} \{\omega \mid |Y_p(\omega)| > \epsilon\}$ .

Alors  $\omega \in A_{n+1} \Rightarrow \exists p \geq n+1 (\geq n)$  tel que  $|Y_p(\omega)| > \epsilon \Rightarrow \omega \in A_n$ .

Donc  $A_{n+1} \subset A_n$ , i.e. la suite  $(A_n)$  est décroissante.

Donc pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\bigcap_{n=1}^N A_n = A_N$ . Pour passer à la limite, on utilise le théorème de convergence décroissante :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_N)$$

**Proposition - Critère équivalent à la convergence presque sûre**

La suite  $(X_n)$  converge presque sûrement vers  $X$

si et seulement si  $\forall \epsilon > 0, \mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon, \text{infiniment souvent}) = 0$

si et seulement si  $\forall \epsilon > 0, \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\exists n \geq N \mid |X_n - X| > \epsilon) = 0$ .

**Démonstration**

**✂ Savoir faire - Démontrer une convergence presque sûre**

On exploite souvent le lemme de Borel-Cantelli.  
En effet, il donne un argument de convergence infiniment souvent d'une probabilité

**◆ Pour aller plus loin - Réciproque?**

Est-ce que la réciproque est vraie : si  $\mathbf{P}(A_n, \text{i.s.}) = 0$ , alors  $\sum_{n \geq n_0} \mathbf{P}(A_n)$  converge?

On a une condition suffisante : la suite  $(A_p)$  est une suite d'événements indépendants. On étudie les événements contraires

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\bigcup_{p \geq N} A_p\right) &= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{p \geq N} \overline{A_p}\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{p \geq N} \overline{A_p}\right) \\ &= 1 - \prod_{p \geq N} \mathbf{P}(\overline{A_p}) \end{aligned}$$

Puis on compose par le ln, comme on compare série et produit infini

**Théorème - Borel-Cantelli**

Soit  $(A_n)$  une suite d'événements.

Si  $\sum_{n \geq n_0} \mathbf{P}(A_n)$  converge, alors  $\mathbf{P}(A_n, \text{i.s.}) := \mathbf{P}(\{\omega \mid \omega \in A_n \text{ i.s.}\}) = 0$

**Démonstration**



L'exercice suivant donne une application directe.

#### Exercice

Soit  $(X_i)$  une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuée admettant un moment d'ordre 4.

On note  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ .

En exploitant l'inégalité de Markov pour  $\mathbf{P}((S_n - p)^4 > \epsilon^4)$ , puis le lemme de Borel-Cantelli, montrer que  $S_n$  converge presque sûrement vers  $p = \mathbf{E}(X_i)$

### 3.2. Convergence en probabilité

#### Définition - Convergence en probabilité

La suite  $(X_n)$  converge en probabilité vers  $X$  si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

On note alors  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ .

#### ✂ Savoir faire - Démontrer la convergence en probabilité

Très fréquemment, on emploie les inégalités de Markov ou de Bienaymé-Tchebychev pour démontrer qu'une suite de variable aléatoire converge en probabilité vers une constante.

#### Proposition - Stabilité

Si  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$  et  $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$ , respectivement  $X_n \xrightarrow{ps} X$  et  $Y_n \xrightarrow{ps} Y$ .

Alors pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \alpha X + \beta Y$  resp. :  $\xrightarrow{ps} \alpha X + \beta Y$ .

Si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue alors  $g(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} g(X)$  resp. :  $g(X_n) \xrightarrow{ps} g(X)$

#### ⚡ Pour aller plus loin - Lien entre convergence

Si  $(X_n)$  converge presque sûrement vers  $X$ ,  
alors  $(X_n)$  converge en probabilité vers  $X$ .

Si  $(X_n)$  converge en probabilité vers  $X$ ,  
alors il existe  $\varphi \nearrow \infty$ ,  $(X_{\varphi(n)})$  converge presque sûrement vers  $X$ .

La linéarité est assez simple à démontrer.

La composition par une fonction continue est plus compliquée... On l'admet. (On pourrait utiliser l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert...).

### 3.3. Lien entre ces deux convergences de variables aléatoires

Commençons par analyser un exemple.

🔍 Analyse - Une suite de variable aléatoire qui converge en probabilité mais pas presque sûrement.

**Proposition - Implication des convergences**

Si  $(X_n) \xrightarrow{ps} X$ , alors  $(X_n) \xrightarrow{P} X$ .

**⚠ Attention - Réciproque fausse**

La réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple vu en analyse

**Démonstration**

Toutefois, il y a presque équivalence ;

**Proposition - Condition suffisante pour l'implication réciproque**

Si  $(X_n) \xrightarrow{P} X$ ,

alors on peut extraire de  $X_n$  une sous-suite convergent presque sûrement vers  $X$ . Autrement écrit :

$$\exists \varphi \nearrow \nearrow \mid (X_{\varphi(n)}) \xrightarrow{ps} X$$

On ne fait pas la démonstration.

**3.4. Convergence en loi**

Comme son nom l'indique, la convergence en loi indique que la suite des lois de  $X_n$  converge vers la loi de  $X$ .

L'objet n'est plus directement la variable aléatoire...

**Définition - Convergence en loi (variable discrète)**

On note  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X_n(\Omega) \cup X(\Omega)$ .

La suite  $(X_n)$  **converge en loi** vers  $X$  si

$$\forall x \in E, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = x) = \mathbf{P}(X = x)$$

Si  $x \notin X_n(\Omega)$ , on note  $\mathbf{P}(X_n = x) = 0$  et de même si  $x \notin X(\Omega)$ , on note  $\mathbf{P}(X = x) = 0$   
 On note alors  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .

**Remarque - Cas des variables continues**

Lorsque  $X(\Omega)$  n'est pas dénombrable, mais un ensemble compact dans  $\mathbb{R}$  (comme en terminale), on ne calcule pas  $\mathbf{P}(X = x)$ , celle-ci est toujours nul. Le calcul qui joue le rôle équivalent est donnée par la fonction de répartition :

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Ainsi le calcul d'espérance de  $X$  est  $\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$  au lieu de  $\sum_{k \in \mathbb{N}} k \mathbf{P}(X = k)$ .

Et de même pour la définition de la convergence en loi :

**Définition - Convergence en loi (variable continue)**

On note  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X_n(\Omega) \cup X(\Omega)$ .

La suite  $(X_n)$  **converge en loi** vers  $X$  si

$$\forall x \in E \text{ (non discontinuité)}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n \leq x) = \mathbf{P}(X \leq x)$$

Il s'agit de la convergence simple des fonctions de répartition. On note alors  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .

**Pour aller plus loin - Notation**

On note avec une double flèche la convergence ici pour souligner qu'il ne s'agit pas tout à fait des mêmes objets que pour les convergences en probabilité ou presque sûr

**Attention - Pas de structure algébrique**

Considérons  $X$  et  $Y$  indépendantes qui suivent la même loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ .

Considérons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = X$  et  $Y_n = n - X$ .

Alors  $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  et  $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

Donc la convergence en loi de  $\lim_{\mathcal{L}} (X_n) + \lim_{\mathcal{L}} (Y_n) \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, p)$ .

Alors que  $X_n + Y_n = n$  alors donc  $\lim_{\mathcal{L}} (X_n + Y_n) \hookrightarrow n$ .

**Proposition - Stabilité**

Si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue alors  $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$

**Proposition - Convergence en probabilité implique la convergence en loi**

Supposons que la suite  $(X_n)$  converge en probabilité vers  $X$ .

Alors  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$

On fait la démonstration dans le cas discret.

**Démonstration**

Un exemple très classique :

**Proposition - Approximation poissonnienne**

Notons  $X_n$  une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre  $(n, \frac{\lambda}{n})$ .

Alors  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ , où  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , c'est-à-dire :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

**Démonstration**

## 4. Loi (faible) des grands nombres et estimateurs

### 4.1. Lois des grands nombres

**Théorème - Loi faible des grands nombres**

Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires indépendantes de même espérance  $m$  et variance  $\sigma^2$ .

Alors la suite  $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  converge en probabilité vers la variable constante égale à  $m$

Exercice

Ecrire ce résultat avec des  $\epsilon$

**Démonstration**

La loi forte des grands nombres existe (Kolmogorov) avec quasiment aucune hypothèse supplémentaire (mais avec une démonstration plus costaud!).

## 4.2. Estimateurs

### ↗ Heuristique - Faire la moyenne

Ce théorème est essentiel. Il affirme que si on fait une moyenne des résultats obtenus en répétant une même expérience aléatoire (des mesures après une répétition d'une même expérience), alors celle-ci va converger vers l'espérance de la loi.

Une autre application est la suivante. On réalise un très grand nombre de simulations informatiques (avec Python), on fait la moyenne des résultats, et on obtient un résultat mathématique précis. C'est la philosophie des méthodes dites de Monte-Carlo

### Histoire - La loi des grands nombres et l'histoire des probabilités

On pourrait faire un cours de probabilité en suivant le fil de l'histoire et comment les mathématiciens ont, depuis Jacques Bernoulli, eu comme unique mission d'alléger les hypothèses de ce théorème ou de le rendre plus fort

Voilà enfin démontrer la raison pour laquelle nous calculons les moyennes des élèves... Mais il peut y avoir d'autres estimateurs.

### ↗ Heuristique - Contexte

On considère un phénomène aléatoire et on s'intéresse à une variable aléatoire réelle  $X$  qui lui est liée, dont on suppose que la loi de probabilité n'est pas complètement spécifiée et appartient à une famille de lois dépendant d'un paramètre  $\theta$  décrivant un sous-ensemble  $\Theta \in \mathbb{R}$ . Le paramètre  $\theta$  est une quantité inconnue, fixée dans toute l'étude, que l'on cherche à déterminer ou pour laquelle on cherche une information partielle.

Le problème de l'estimation consiste alors à estimer la vraie valeur du paramètre  $\theta$  (ou de  $g(\theta)$  -fonction à valeurs réelles du paramètre  $\theta$ ), à partir d'un échantillon de données  $x_1, \dots, x_n$  obtenues en observant  $n$  fois le phénomène. Cette fonction du paramètre représentera en général une valeur caractéristique de la loi inconnue comme son espérance, sa variance, son étendue...

### Définition - Estimateur de $g(\theta)$

Un estimateur de  $g(\theta)$  est une variable aléatoire de la forme  $T_n = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ .

La réalisation  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  de l'estimateur  $T_n$  est l'estimation de  $g(\theta)$ . Cette estimation ne dépend que de l'échantillon  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  observé.

### Exemple - Moyenne

### Définition - Biais et estimateur sans biais

Si pour tout  $\theta \in \Theta$ , l'estimateur  $T_n$  admet une espérance, on appelle **biais de  $T_n$  en  $g(\theta)$**  le réel

$$b_\theta(T_n) = \mathbf{E}_\theta(T_n) - g(\theta)$$

L'estimateur  $T_n$  de  $g(\theta)$  est dit estimateur sans biais si pour tout  $\theta \in \Theta$ ,  $\mathbf{E}_\theta(T_n) = g(\theta)$ .

**Définition - Estimateur convergent**

Une suite d'estimateurs  $(T_n)_{n \geq 1}$  de  $g(\theta)$  est convergente si pour tout  $\theta$ , la suite  $(T_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers  $g(\theta)$ .  
Par abus de langage on dit rapidement que l'estimateur est convergent.

**Exercice**

On considère une suite  $(X_i)$  de variables aléatoires indépendantes qui suivent toute la même loi de Benoulli de paramètre  $p$ .

Et l'on cherche un estimateur de la variance  $V$  de cette loi.

1. On considère  $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ .

Montrer que  $M_n$  est un estimateur sans biais de  $p$ .

Est-il convergent ?

2. On considère  $V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - M_n)^2$ .

$V_n$  est-il un estimateur sans biais de  $V$  ? Sinon calculer biais.

Est-il convergent ?

3. On considère  $W_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - M_n)^2$ .

$W_n$  est-il un estimateur sans biais de  $V$  ? Sinon calculer le biais.

**5. Théorème limite central****5.1. Rappels sur la loi normale**

On a besoin de quelques rappels de terminale sur la loi normale : Lorsque  $X(\Omega)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , nous devons penser autrement les lois de probabilité. On exploite les fonctions de répartition et non les lois ; la notion de densité devient alors importante.

**Définition - Variable aléatoire à densité**

Une variable aléatoire continue  $X$  est définie à partir d'une densité  $f$  vérifiant :

—  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

—  $f$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$

—  $\lim_{x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty} \int_x^y f(t) dt = 1$ . Ce nombre est notée  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ .

On a alors

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \mathbf{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b f(t) dt$$

Par ailleurs, si « les intégrales suivantes sont convergentes » (i.e. les limites existent) :

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \quad \mathbf{E}(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f(t) dt \quad \mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$$

**Exemple - Loi exponentielle**

Un exemple classique de loi à densité :

**Définition - Loi normale**

Pour tout  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$ , la fonction

$$f_{\mu, \sigma^2} : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

est une fonction de densité.

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  qui admet pour densité  $f_{\mu, \sigma^2}$  suit une loi normale (ou gaussienne ou Laplace-Gauss).

On note  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

On a alors  $\mathbf{E}(X) = \mu$  et  $\mathbf{Var}(X) = \sigma^2$

**Remarque - Convergence en loi pour les variables à densité**

Nous venons de l'écrire : pour des variables à densité, on exploite plus les lois mais les fonctions de répartition.

La convergence en loi s'écrit donc autrement dans ce cas là

**Définition - Convergence en loi**

On suppose  $X(\Omega)$  et  $X_n(\Omega) \subset \mathbb{R}$ .

La suite  $(X_n)$  **converge en loi** vers  $X$  (à densité) si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n \leq x) = \mathbf{P}(X \leq x)$$

**5.2. Enoncé**

Il est très général, il est plus large que la loi des grands nombres mais ne donne une convergence « qu'en loi »

**Proposition - Théorème central limite**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant une espérance  $m$  et une variance  $\sigma^2$  non nulle.

Notons  $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  et  $\overline{X}_n^* = \sqrt{n} \left( \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma} \right)$ , variable aléatoire centrée et réduite.

Alors  $(\overline{X}_n^*)$  converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

$$X_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0; 1)$$

Nous n'en ferons pas de démonstration. Il nous manque quelques outils... Insistons : ce résultat est indépendant de la loi suivie par  $X_n$ !

On peut par contre l'appliquer afin d'obtenir :

**Théorème - Théorème de De Moivre-Laplace**

Soit  $p \in ]0, 1[$  et  $S_n$  une suite de variables aléatoires telles que  $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

Alors pour tout réel  $x$ ,

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

## Démonstration

## 5.3. Intervalle de confiance

## Heuristique - Fluctuations autour d'une valeur estimée

L'estimateur théorique, basée ensuite sur des mesures, donne une estimation d'un paramètre  $g(\theta)$ . Mais parfois, on souhaite plutôt une connaissance des fluctuations autour de la valeur limite. La convergence en loi joue un peu ce rôle comparée à la convergence en probabilité.

On peut donc espérer élargir la notion d'estimateur à l'aide du théorème limite central ou le théorème de De Moivre-Laplace si l'on se concentre sur des variables de Bernoulli.

C'est la notion d'intervalle de confiance qui joue ce rôle

On notera que l'intervalle de confiance est **une variable aléatoire**, c'est ce qui le différencie de l'intervalle de fluctuation (aux bornes fixées).

Le principe est le suivant :

**Définition - Intervalle de confiance**

Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires indépendants de même loi admettant un moment d'ordre 2. Notons  $m = \mathbf{E}(X_1)$  et  $\sigma^2 = \mathbf{Var}(X_1)$ .

$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  est un estimateur de  $m$ .

Soit  $\alpha > 0$ , un risque. L'intervalle de confiance au risque  $\alpha$  est défini comme

$$I_n(\omega) = \left[ M_n - \frac{\epsilon \sigma}{\sqrt{n}}, M_n + \frac{\epsilon \sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

où  $\epsilon$  est définie par  $\mathbf{P}(|N| > \epsilon) = \alpha$ , avec  $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$

**Remarque -  $\epsilon$  ?**

$\mathbf{P}(|N| > \epsilon) = 1 - \int_{-\epsilon}^{\epsilon} n(t) dt = 1 - 2 \int_0^{\epsilon} n(t) dt$ , car  $n$  est paire.

Donc  $\mathbf{P}(|N| > \epsilon) = \alpha \iff N(\epsilon) = \frac{1-\alpha}{2} \iff \epsilon = N^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$

où  $N$  est la primitive de  $n$ , strictement croissante (car  $n > 0$ ) et continue donc bijective

**Proposition - Encadrement de  $m$** 

Avec les hypothèses de la définition, on a

$$\mathbf{P}(m \in I_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} n(t) dt = 1 - \alpha$$



**Démonstration**

Pour des exercices, voir le cours de terminale.

**6. Bilan****Synthèse**

- ↪ La convergence simple des suites de fonctions  $(X_n)$  n'est pas satisfaisante (trop exigeante) pour l'étude des suites de variables aléatoires. Il suffit de se contenter de convergence sur des parties de  $\Omega$  de mesure égale à 1, donc des convergence presque sûre. Voir une convergence en probabilité. Ces convergences ne sont pas sans lien.  
On associe à ces convergences les convergentes fortes (p.s.) ou faibles (en  $\mathbf{P}$ ). Par exemple les lois des grands nombres ou la convergence (faible) d'estimateurs..
- ↪ On peut aussi s'intéresser aux lois des variables aléatoire et voir si ces fonctions convergent. Cela donne une convergence en loi, en réalité indépendante des variables d'une certaine façon. Une application classique est le théorème central limite dont une des conséquences est le théorème de Moivre-Laplace vu (trop rapidement) en terminale.

**Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre**

- Savoir-faire - Démontrer une convergence presque sûre
- Savoir-faire - Démontrer une convergence en probabilité

**Notations**

Notations	Définitions	Propriétés	Remarques
$i.s.$	$\omega$ fixé. On a la propriété $\mathcal{P}(X_n(\omega))$ infiniment souvent si $\{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{P}(X_n(\omega))\}$ n'est pas borné	Equivalent à $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow$ tel $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(X_{\varphi(n)}(\omega))$	$\{\omega \mid \mathcal{P}(X_n(\omega)) \text{ i.s.}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} \{\omega \mid \mathcal{P}(X_p(\omega))\}$ .
$(X_n) \xrightarrow{p.s.} X$	La suite de v.a. $(X_n)$ converge presque sûrement vers $X$	$\mathbf{P}(\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X) = 1$	
$(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} X$	La suite de v.a. $(X_n)$ converge en probabilité vers $X$	$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}( X_n - X  \geq \epsilon) = 0$	$(X_n) \xrightarrow{p.s.} X \Rightarrow (X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ . On exploite souvent l'inégalité de B.T.
$(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$	La suite de v.a. $(X_n)$ converge en loi vers $X$	(Cas au plus dénombrable) : $\forall x \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = x) = \mathbf{P}(X = x)$	Utilisation pour l'approximation poissonnienne ou le TCL.

**Retour sur les problèmes**

- A.18** Ici on a une convergence faible, comme un estimateur. C'est (au moins) la loi faible des grands nombres. Mais la loi forte peut également s'appliquer.
- A.19** Gros morceau du cours hors-programme. Si les démonstrations ont échappées au lecteur, on espère au moins que les notions ont été comprises en profondeur!
- A.20** Même réponse qu'à la question précédente.

