

Fonctions holomorphes

Résumé -

Dans ce complément hors-programme de CPGE, nous étudions les fonctions dérivables de la variable complexe. On qualifie ces fonctions d'holomorphes (« de forme entière »). Nous verrons d'abord que ces fonctions sont nombreuses (toutes nos fonctions usuelles sont holomorphes sur un ouvert plus ou moins grand) et qu'elles possèdent une certaine rigidité (conformes), cela leur donne des propriétés nouvelles : elles sont nécessairement analytiques et donc de classe \mathcal{C}^∞ , elles vérifient le principe harmonique...

Pour obtenir ces relations, nous exploiterons l'intégration sur un chemin complexe. Nous devons faire un détour par les intégrales curvilignes (et en bonus, le théorème de Green-Riemann). Nous serons armés avec les formules intégrales de Cauchy pour faire les démonstrations, dont le prolongement analytique (en gros : deux fonctions holomorphes sur un (petit) ouvert sont égales sur toute la composante connexe) et une méthode superpuissante pour calculer des intégrales immondes : le théorème de résidus.

Un chaîne youtube d'analyse complexe - <https://www.youtube.com/playlist?list=PLErC88eFpes2gkbeh-RAIqoQ5vYrwUBz>

Sommaire

1. Problèmes	858
2. Holomorphie = Dérivation complexe	859
2.1. Fonctions holomorphes	859
2.2. Stabilité et premiers exemples	860
2.3. Condition de Cauchy-Riemann	861
2.4. Fonction analytique e(s)t fonction holomorphe	862
3. Chemins dans le plan complexe et intégrale curviligne	864
3.1. Arc du plan	864
3.2. Intégration le long d'un chemin	865
3.3. Longueur d'une courbe et majoration	866
4. Théorème(s) de Cauchy	867
4.1. Indice de Cauchy	867
4.2. Lemme de Goursat et holomorphie	869
4.3. Petit détour : Formule de Green-Riemann	873
5. Théorème des résidus	874
5.1. Principe du théorème des résidus	874
5.2. Calculer les résidus	876
5.3. Applications (aux calculs d'intégrales immondes et sommes effrayantes)	876
6. Prolongement analytique	879

6.1.	Zéros d'une fonction holomorphe	879
6.2.	Prolongement analytique	881
6.3.	Fonctions à singularités. Vers les surfaces de Riemann	881
7.	Bilan	882

1. Problèmes

? Problème A4 - Division par un nombre complexe et passage à la limite

Les fonctions de plusieurs ne sont pas dérivables car la division par un

vecteur n'a pas de sens : $\frac{f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x})}{\vec{h}}$ ne signifie rien. . .

En revanche, la division par un nombre complexe a bien une signification. Que dire des fonctions \mathbb{C} -dérivable?

Et si on note $F(x, y) = f(x + iy)$, que signifie pour $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ le fait que $\frac{\partial f}{\partial z}$ existe?

? Problème A5 - Intégration complexe

Si la dérivation complexe semble avoir un sens facilement accessible :

$\lim_{|a| \rightarrow 0} \frac{f(z+a) - f(z)}{a}$, qu'en est-il de son opération réciproque.

Que signifie $\int_{\Gamma} f(z) dz$ pour $f : \cup \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et Γ , un chemin dans le plan

complexe ou encore $\iint_K f(x + iy) dx dy$ pour K une partie de \mathbb{C} ?

? Problème A6 - Théorème de D'Alembert-Gauss

Le corps \mathbb{C} a été créé comme l'extension de \mathbb{R} afin que tous les polynômes à coefficients entiers ou réels de degré n aient exactement n racines (certaines pouvant être multiples).

Comment démontrer ce résultat? Les fonctions holomorphes aident-elles pour faire cette démonstration?

? Problème A7 - Extension de \ln

Pourquoi la fonction \exp s'étend sans difficulté sur \mathbb{C} : $\exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$?

Et que se passe-t-il pour sa fonction réciproque $\ln z$? Est-elle bien définie, ou pourquoi ne l'est-elle pas?

Et à quoi « ressemble » la représentation graphique associée à \ln ?

? Problème A8 - Fonction Γ

La fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est central en mathématiques. En particulier, elle interpole la factorielle (précisément : $\Gamma(n+1) = n!$), elle semble définie sur \mathbb{R}_+^* entier où elle est de classe \mathcal{C}^∞ .

Peut-elle être prolongée sur \mathbb{C} , de manière unique?

| Même question pour $\zeta : s \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$?

2. Holomorphie = Dérivation complexe

2.1. Fonctions holomorphes

Remarque - Division par un nombre complexe : possible

Pour les fonctions de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, il n'est pas possible d'étudier la limite $\frac{f(u+h) - f(u)}{h}$, pour h vecteur de \mathbb{R}^n tendant vers 0. En effet, cela nécessiterait de donner un sens à la division par un vecteur.

En revanche, \mathbb{C} étant un corps, il est possible d'effectuer $\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ et de regarder la limite pour $h \rightarrow 0 (h \in \mathbb{C})$.

Définition - Fonctions holomorphes en un point (nombre complexe)

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction de la variable complexe (et à valeurs dans \mathbb{C}).

Soit U un ouvert de \mathbb{C} (i.e. $\forall z \in U, \exists \rho > 0$ tel que $|z - z_0| < \rho \Rightarrow z \in U$).

On dit que f est \mathbb{C} -dérivable ou (plutôt) holomorphe en $z_0 \in U$ si $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ admet une limite (dans \mathbb{C}) pour $z \xrightarrow{z \in U} z_0$.

Autrement écrit, on a les équivalences :

- f est holomorphe en z_0 de dérivée égale à $f'(z_0)$
- $\forall \epsilon > 0, \exists \rho > 0$ tel que $|z - z_0| < \rho \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon$.
- $\exists \epsilon : U \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in U, f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \times (z - z_0) + (z - z_0)\epsilon(z)$ avec $\epsilon(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$.

Définition - Fonction holomorphe sur un ouvert

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction de la variable complexe (et à valeurs dans \mathbb{C}).

Soit U un ouvert de \mathbb{C} .

On dit que f est holomorphe sur U , si f est holomorphe en tout point z_0 de U .

On pourra noter $\mathcal{H}(U)$, l'ensemble des fonctions holomorphes définies sur l'ouvert U .

Pour aller plus loin - Connexe

Dans la pratique, il sera souvent nécessaire de nous restreindre à des ouverts qui sont connexes (parfois on se contentera de convexe).

Exemple - Fonction puissance entière

Exercice

Si $n \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$, montrer que $f_n : z \mapsto z^n$ est également holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

2.2. Stabilité et premiers exemples

Comme l'application de passage à la limite est linéaire, on retrouve les mêmes résultats que pour les fonctions dérivables (sur \mathbb{R})

Proposition - Stabilité

Soit f et g holomorphe sur un ouvert U de \mathbb{C} . Alors :

- Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$, $af + bg$ est holomorphe sur U et
 $\forall z \in U, (\lambda f + \mu g)'(z) = \lambda f'(z) + \mu g'(z)$.
- $f \times g$ est holomorphe sur U et
 $\forall z \in U, (f \times g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.
- si g ne s'annule pas sur U , $\frac{f}{g}$ est holomorphe sur U et
 $\forall z \in U, \left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$.

On démontre les deux premiers résultats

Démonstration**Exercice**

Démontrer le dernier résultat

Comme les puissances entières sont holomorphes, par combinaison linéaire :

◆ Pour aller plus loin - Fonction analytique

On sait décrire parfaitement les fonctions holomorphes. Il s'agit des fonctions analytiques, i.e. des séries localement entière (ou polynôme de degré infini). Comme nous le verrons plus loin

Corollaire - Polynômes (et fractions rationnelles)

Les fonctions polynomiales : $p : z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k$ sont holomorphes sur \mathbb{C} et

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{C}, p'(z) = \sum_{k=0}^n k a_k z^{k-1} = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1} = \sum_{h=0}^{n-1} (h+1) a_{h+1} z^h.$$

Les fractions rationnelles sont holomorphes sur tout ouvert de \mathbb{C} ne contenant aucun pôle de la fraction.

La fonction dérivée associée est « comme on l'imagine ».

Une fonction holomorphe sur \mathbb{C} , en entier, est qualifiée de fonction entière.
Une fonction polynomiale est donc une fonction entière.

2.3. Condition de Cauchy-Riemann

Remarque - Bijection $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$

Il existe un isomorphisme (canonique/ naturelle) entre \mathbb{R}^2 et $\mathbb{C} : (x, y) \mapsto x + iy$.

On peut donc considérer $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\underbrace{\operatorname{Re}(f(x + iy))}_{P(x,y)}; \underbrace{\operatorname{Im}(f(x + iy))}_{Q(x,y)})$.

Est-ce équivalent de dire que f est holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0$ ou F est différentiable en (x_0, y_0) ?

On conserve, pour la suite, les notations de la remarque

Proposition - Condition de Cauchy-Riemann

f est holomorphe en z_0 ssi F est différentiable en (x_0, y_0) avec

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Savoir faire - Montrer l'holomorphie (ou non) avec $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto f(x + iy)$

On notera l'équivalence entre le système de la proposition et :

$$\left[\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \right] + i \left[\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + i \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \right] = 0.$$

Ce qui est encore équivalent à $\frac{\partial H}{\partial x} + i \frac{\partial H}{\partial y} = 0_{\mathbb{C}}$, pour $H : (x, y) \mapsto f(x + iy)$

(i.e. $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$)

Démonstration

Application - $z \mapsto e^z$ est holomorphe

Application - $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphe

Heuristique - Du plan tangent à la similitude (locale)

Le fait que F soit différentiable nous dit, géométriquement, que P et Q sont comparables chacun à un plan au voisinage de tout (x_0, y_0) , ou bien que P et Q admettent un plan tangent en (x_0, y_0) .

Qu'ajoute l'information sur les relations de Cauchy-Riemann pour les fonctions holomorphes?

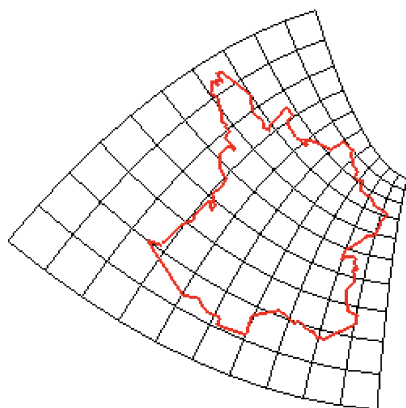
Les vecteurs normaux au plan $(\nabla P$ et $\nabla Q)$ sont orthogonaux : $\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$.

Ainsi la matrice jacobienne est une matrice orthogonale (à condition de la normalisée par la racine carrée de son déterminant) du plan, il s'agit donc d'une rotation.

Une fonction holomorphe est localement la composée d'une rotation et d'une homothétie (normalisation) : c'est une similitude.

Représentation - Application conforme

Une application conforme conserve les angles localement. L'image de la carte de la France par une application conforme donne quelque chose de reconnaissable.



Remarque - Application conforme

On a vu en début d'année, qu'une similitude conserve les angles; i.e. si s est une similitude :

$$\arg\left(\frac{s(d) - s(c)}{s(b) - s(a)}\right) = \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) = \arg\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}\right)$$

on rappelle que $s : z \mapsto z_0 + re^{i\theta}(z - z_0)$. Donc les similitudes conservent les angles (souvent on prend $A = C$, ici). Une telle application est dite application conforme.

Une fonction holomorphe est donc (localement) une application conforme : elle conserve les formes des petites figures (mais pas les longueurs)

2.4. Fonction analytique e(s)t fonction holomorphe

Un mot sur les séries de fonctions (de référence)

Définition - Séries entières. Rayon de convergence

On appelle série entière les fonctions de la forme $S : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ où

$(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une suite de complexe.

On pose $R_S = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée}\}$, appelé rayon de conver-

gence de la série (entière).

On énonce une série de propriétés pour les séries entières, elles seront démontrées en seconde année.

Proposition - Régularité d'une série entière

La fonction $S_{\mathbb{R}}$ est définie, continue et de classe \mathcal{C}^{∞} sur le « disque » ouvert $] -R, R[$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in] -R, R[, S^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k x^{k-n} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(h+n)!}{h!} a_{h+n} x^h.$$

Heuristique - Idées de démonstration

1. D'abord, notons que pour $|x| > R$ la série diverge grossièrement. $\mathcal{D}_{S_{\mathbb{R}}} \subset] -R, R[$.
Si $|x| < R$, alors avec $\rho \in]|x|, R[$, on a $|a_n x^n| \leq a_n \rho^n \times \left| \frac{|x|}{\rho} \right|^n \leq M \left| \frac{|x|}{\rho} \right|^n$. Et la série entière est **normalement** convergente. Tout se passera bien : continuité, dérivabilité... Ce qui se passe en R et $-R$ dépend de chaque série considérée. On peut tout avoir.
2. On calcule la dérivée, comme limite de la série des dérivées. C'est une nouvelle série entière.
3. On trouve pour $S'_{\mathbb{R}}$, le même rayon de convergence (petite manipulation).
Et on continue ainsi pour toutes les dérivées!

De la même façon, on a le théorème suivant (qui ne sera pas démontré...):

Proposition - Série entière et fonctions holomorphes

La fonction S est définie, continue, holomorphe et de classe \mathcal{C}^{∞} (dérivation complexe) sur le disque ouvert $\mathcal{D}(0, R_S) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_S\}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathcal{D}(0, R_S), S^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k z^{k-n} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(h+n)!}{h!} a_{h+n} z^h.$$

Définition - Fonction analytique

On dit que $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique sur l'ouvert U si pour tout $z_0 \in U$, il existe $R > 0$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$\forall z \in \mathcal{D}(z_0, R), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

(Il s'agit du disque ouvert de \mathbb{C} centré en z_0 et de rayon R .)

Si f est analytique sur U , alors f est holomorphe sur U

On reviendra en fin de chapitre sur les propriétés analytiques (prolongement...) des fonctions holomorphes. C'est l'un des pierres précieuses des fonctions holomorphes. En attendant, mais sans pouvoir faire démonstration, on énonce le théorème suivant, dont la connaissance est importante à ce stade du chapitre :

Théorème - Holomorphie et analyticité

Si f est holomorphe sur un ouvert U , alors f est analytique sur U .

Ainsi, pour tout $z_0 \in U$, il existe $R > 0$ et (a_n) tel que $\forall z \in \mathcal{D}(z_0, R)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Et on a, pour tout $r \in]0, R[$:

$$a_n = \frac{1}{2r^{n+1}i\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-i(n+1)\theta} d\theta = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

⚠ Attention - Dépendance des (a_n) par rapport à z_0

- ⚡ On rappelle que chaque z_0 définit un rayon distinct et une suite (a_n) propre.
- ⚡ On aurait du noter $(a_n(z_0))_n$.

3. Chemins dans le plan complexe et intégrale curviligne

3.1. Arc du plan

On commence par beaucoup de vocabulaire dont le sens géométrique ne devrait pas échapper au lecteur.

Définition - Arc du plan complexe ou chemin

Soit $[a, b]$ un compact de \mathbb{R} et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, **continue**.

L'image du compact $[a, b]$ de \mathbb{R} par γ est appelé arc de \mathbb{C} , noté Γ , γ est alors appelé (une) paramétrisation de Γ .

On dit que l'arc est fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

On dit que l'arc est simple si γ est injectif (i.e. $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ dès que $s \neq t \in]a, b[$).

Si γ est de classe \mathcal{C}^1 , on dit que γ est un chemin. Un chemin fermé est parfois qualifié de lacet.

⚡ Pour aller plus loin - Chemins continument différentiable

Pour les chemins, le cours devrait se limiter aux applications γ dérivables par morceaux.

Nous simplifions ici le cours en ne prenant que des chemins de classe \mathcal{C}^1 . En revanche, nous couperons nos intégrales curvilignes en morceaux si l'on rencontre des coupures naturelles de chemin

⚠ Attention - Tolérance

- ⚡ Parfois on appelle chemin, à la fois la paramétrisation de la courbe et sa représentation géométrique.
- ⚡ Le contexte est en règle générale suffisant pour faire la distinction.
- ⚡ Mais cette tolérance peut créer une confusion pour le débutant; on essaiera de bien s'en garder.

🛑 Remarque - Interprétation des contiions γ de classe \mathcal{C}^1 et $\gamma'(t) \neq 0$

La paramétrisation γ s'appelle parfois le mobile (comme un point mobile qui se déplace). A chaque instant t il laisse sa trace sur la courbe. Le fait que γ soit dérivable signifie que le mobile a une vitesse. $\gamma'(t) \neq 0$ signifie qu'elle ne s'annule pas et comme le déplacement du mobile est continue, cela implique qu'il ne revient pas en arrière.

🌿 Exemple - Paramétrisation du cercle unité**Proposition - Paramétrisation à partir de $[0, 1]$**

Soit Γ un chemin de \mathbb{C} .

Alors il existe une paramétrisation γ de Γ , à partir du compact $[0, 1]$.

Démonstration

Définition - Chemins équivalents

Soient $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ deux chemins.

Si il existe une bijection $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$, de classe \mathcal{C}^1 et croissante telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$, alors on dit que les chemins sont équivalents.

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Exercice

intégrale curviligne

3.2. Intégration le long d'un chemin

🔍 **Analyse - Intégration d'une fonction holomorphe le long d'un chemin dans \mathbb{C}**

La définition suivante, reste vraie pour des fonctions f non nécessairement holomorphe.

Définition - Intégration curviligne le long d'un chemin

Soit U un ouvert de \mathbb{C} . Soient $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, un chemin.

On définit l'intégrale de g sur le chemin Γ :

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = \int_a^b g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Le résultat ne dépend pas du choix du paramétrage γ du chemin Γ .

Le résultat qui suit sera très souvent exploité!

📌 **Application** - $\oint_{\Gamma} z^n dz$, pour $n \in \mathbb{Z}$

Reste à démontrer l'indépendance du choix du paramétrage.

Démonstration

Proposition - Intégrale curviligne d'une dérivée


Soit f une fonction holomorphe sur U et $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, un chemin.

Alors $\int_{\Gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Démonstration

Corollaire - Intégrale d'une dérivée sur un chemin fermé

Si Γ est un chemin fermé et que f est la dérivée d'une fonction holomorphe, alors $\oint_{\Gamma} f = 0$.

 **Savoir faire - Démontrer qu'une fonction n'est pas la dérivée d'une fonction holomorphe**

Si l'intégrale d'une fonction f sur un chemin fermé n'est pas nulle, alors, elle ne peut être la dérivée d'une fonction holomorphe.

 **Exemple - z^{-1}**

Exercice

Après l'intégration, plusieurs ont eu en colle : calculer $\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2a \cos t + 1) dt$.

Voici une nouvelle question : interpréter en terme de intégrale curviligne le calcul

3.3. Longueur d'une courbe et majoration

 **Analyse - Longueur d'un chemin dans \mathbb{C}**

 **Pour aller plus loin - Invariance et homotopie (marge)**

Une homotopie est une déformation continue entre deux applications, notamment entre les chemins à extrémités fixées et en particulier les lacets. Cette notion topologique permet de définir des invariants algébriques utilisés pour classifier les applications continues entre espaces topologiques dans le cadre de la topologie algébrique.

Proposition - Longueur d'un chemin de \mathbb{C}

La longueur d'un chemin Γ de \mathbb{C} paramétré par γ (de classe \mathcal{C}^1) est donné par

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

indépendant du choix de γ .

📌 Application - Périmètre d'une ellipse**Proposition - Inégalité des accroissements finis**

Soit Γ un chemin paramétré par γ de classe \mathcal{C}^1 .
Alors, pour toute fonction f holomorphe sur U contenant Γ ,

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{\Gamma} |f| \times \ell(\Gamma)$$

Démonstration

4. Théorème(s) de Cauchy

4.1. Indice de Cauchy

Définition - Indice (de Cauchy) d'un chemin par rapport à un point z_0

Soient Γ un chemin fermé de \mathbb{C} , de paramétrisation γ .
On note U , le complémentaire de Γ dans \mathbb{C} . Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.
On appelle indice de Γ (ou Γ) par rapport à z_0 , le nombre.

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Remarque - Autre nom

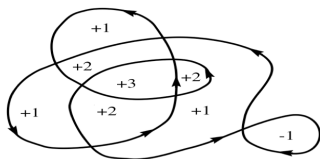
On parle parfois de l'indice de z_0 par rapport à Γ (ou γ).

Exemple - $\Gamma = \cup$, le cercle unité et $z_0 \in \mathbb{C}$

Représentation - Indice d'un point

Il s'agit du nombre de tour que la boucle effectue autour d'un point.

Cela est géométriquement facilement visible, même sans calcul :



Avec les mêmes notations

Proposition - Valeur de l'indice

$\text{Ind}_\Gamma(z_0)$ est à valeurs entières et constant sur chaque composante connexe de U et il est nul sur la composante connexe non bornée de U .

Démonstration

4.2. Lemme de Goursat et holomorphie

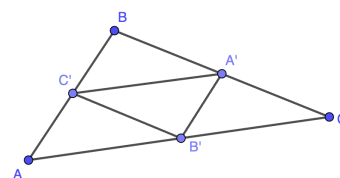
Proposition - Lemme de Goursat

Soit Δ un triangle (fermé) de U ouvert de C . Soit f une fonction holomorphe sur U .

Alors $\oint_{\Delta} f(z) dz = 0$

Démonstration

✳ Représentation - Décomposition du triangle



 **Remarque - Allègement des hypothèses**

En fait, on peut considérer que f est holomorphe sur $U \setminus \{p\}$ où p est un point quelconque de Δ .

Mais la démonstration est plus compliquée.

Proposition - Dérivabilité

Soit U un ouvert, étoilé (i.e. : $\exists A \in U$ tel que $\forall M \in U, [AM] \subset U$).

On suppose que f est holomorphe sur U , alors f admet une primitive sur U .

Démonstration

On a le corollaire suivant, puisque $f = F'$:

Théorème - Première formule de Cauchy

Si U est un ouvert étoile, ou donc un ouvert convexe voire un ouvert simplement connexe. Si f est holomorphe sur U et Γ est un chemin fermé ou lacet de U :

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$$


 **Remarque - Hypothèses du théorème**

Sur les points de non-holomorphie de f (dont on parlera plus loin), le théorème indique qu'il n'y a aucun point singulier de f à l'intérieur de Γ .

Théorème - Formule intégrale de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U simplement connexe. Soit $z_0 \in U$ et Γ un chemin fermé ne contenant pas z_0 . Alors

$$f(z_0) \times \text{Ind}_{\Gamma}(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

 **Pour aller plus loin - Fonction harmonique**

Les applications qui vérifie la propriété de la moyenne sur la boule sont des fonctions harmoniques (vérifiant également $\Delta f = 0$ (lire Laplacien de f)). Elles sont très importantes en physique où elles sont associées à tout type de phénomènes ondulatoires.

Démonstration

 **Application - Interprétation nouvelle de** $\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$

 **Analyse - Accès à** $f^{(n)}(z_0)$

On retrouve une partie d'un résultat énoncé plus haut.
Il faudrait ajouter que cela permet de voir comme une fonction analytique.

Théorème - Formule intégrale de Cauchy d'ordre n

Soient f est holomorphe sur U , et $z_0 \in U$.

Soit $r > 0$, tel que $\Gamma = \{z_0 + re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi[] \subset U$, alors f est infiniment dérivable en z_0 et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{n!}{2r^n \pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

Démonstration

4.3. Petit détour : Formule de Green-Riemann

Voici un théorème qui sort du cadre des fonctions holomorphes, mais il permet d'avoir une nouvelle vision sur le théorème de Cauchy. Il fait aussi le lien avec le calcul vectoriel dont on abuse en physique en seconde année... La force du théorème suivant : il permet de passer à des intégrales sur une surfaces (flux) à une intégrale sur le bord (circulation)...

Théorème - Théorème de Green-Riemann

Soient $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ des fonction \mathbb{R}^2 -différentiables et K un compact suffisamment régulier, de frontière Γ . Alors

$$\oint_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Remarque - Explication des termes

L'intégrable double, de droite, est une intégrale d'une variable du plan. On peut l'interpréter simplement en deux intégrations selon les deux variables x et y qui la composent (c'est ce qui est fait pour la pseudo-démonstration). Mais cela est trop restrictif (cf le calcul de flux en physique).

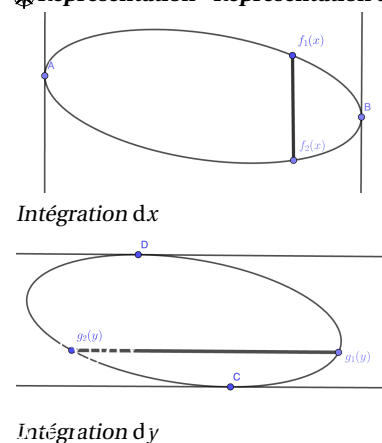
L'intégrable de droite et une double intégrale curviligne, on regarde en fonction de x et de y , séparément.

Il s'agit plus d'un éclairage que d'une démonstration. Par exemple le compact considéré sera considéré sans trou et avec une frontière biunivoque (à chaque y , correspond deux et seulement deux x sur Γ ; de même pour chaque x - excepté les quatre points de rebroussement).

Démonstration

◆ **Pour aller plus loin - Théorème de Stokes**
 La formule de Stokes est le nom générique donné à toutes les formules du type $\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$ qui dit que l'intégrale sur une surface est égale à la différence de la variation d'une certaine primitive.
 C'est le cas de la formule de Newton, ou des plus fameuses formule de Stokes ou formule d'Ostrograski vu en cours de physique de spé.

Représentation - Représentation de K



Application - (Première) formule de Cauchy

 **Remarque - Interprétation et formule d'Ampère**

Peut-être avez-vous rencontré le théorème d'Ampère : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} d\vec{\ell} = \iint_S \vec{j} d\vec{S}$ ou sa version différentielle $\text{rot} \vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H}$.

Le premier terme s'appelle la circulation du champ vectoriel \vec{H} sur le contour \mathcal{C} . Il s'agit d'une l'intégrale d'un produit scalaire, donc du type $(P, Q) \cdot (dx, dy)$, ce qui donne le premier terme de la formule de Green-Riemman.

On a alors pour le second terme un produit vectoriel (dimension 3) ou un déterminant (dimension 2) : $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \frac{\partial}{\partial y} & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ pour l'intégration sur une surface (appelé un flux, par les physiciens).

5. Théorème des résidus

5.1. Principe du théorème des résidus

 **Heuristique - Une idée pour calculer $\int_{\Gamma} f(z) dz$, directement**

Si on reprend la formule précédente, on voit que pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\frac{n!}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$,


donne accès à $f^{(n)}(z_0)$.

Et par ailleurs, ce nombre $f^{(n)}(z_0)$, ce trouve dans le développement de Taylor (série entière) $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k$.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k$$

Mais, ce que l'on rencontre souvent c'est plutôt : $\int_{\Gamma} f(z) dz$, comme si $n = -1$, dans le calcul précédent.

N'aurait-on pas : $\int_{\Gamma} f(z) dz = \text{Ind}_{\Gamma}(z_0) f^{(-1)}(z_0)$?

 **Pour aller plus loin - Développement de Laurent**

Le développement considéré ici s'appelle le développement de Laurent, il s'étend normalement sur un ouvert u de U contenant z_0 , f étant holomorphe sur $u \setminus \{z\}$.

Définition - Résidu de f en z_0

On appelle résidu de f au point z_0 de \mathbb{C} , noté $\text{Res}(f, z_0)$, le coefficient devant $(z-z_0)^{-1}$ dans le développement asymptotique de f au voisinage de z_0 .

 **Exemple - Fraction** $F(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^4 - z^3 - z + 1}$

↗ **Heuristique - Extension : des polynômes aux fractions rationnelles. Des séries entières, au séries de Laurent.**

En première partie, nous avons vu que les fonctions holomorphes sont la bonne façon de voir les séries entières, extension degré infini des polynômes.
 Or les polynômes connaissent une autre extension intéressante (anneau → corps) : les fractions rationnelles, avec la notion de pôles et de degré négatif. Les séries de Laurent sont localement (autour des pôles ou des points normaux) les extensions naturelles de fractions rationnelles. Il est important que les pôles soient isolés.
 Quant aux fonctions holomorphes avec des pôles, elles sont appelées : fonctions méromorphes. Les pôles sont isolés.

Théorème - Résidus

Soit f une fonction holomorphe sur U , un ouvert étoilé, présentant des singularités en des points isolés de $S = \{s_1, \dots, s_m\} \subset U$.
 Soit Γ un chemin fermé tracé dans U , ne rencontrant pas S . Alors

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{i=1}^m \text{Ind}_{\Gamma}(s_i) \times \text{Res}(f, s_i)$$

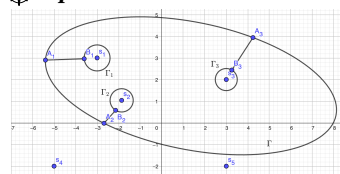
◆ **Pour aller plus loin - Zéros isolés**

Nous verrons plus loin (classification des zéros) que si f n'est pas nulle, alors ses zéros sont isolés et au plus dénombrables.
 On reviendra sur ce résultat profond d'analyticité avec le théorème de prolongement analytique.

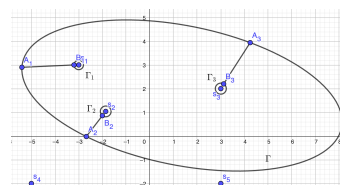
Ce théorème a de multiples applications que nous verrons plus loin.
 Plutôt qu'une démonstration complète, nous nous contenterons d'un dessin animé comment ...

Démonstration

✳ **Représentation - Théorème des résidus**



Décomposition de Γ , sans singularité.



Avec $n \rightarrow +\infty$.

5.2. Calculer les résidus

On admet :

Proposition - Linéarité du résidu
 Si f et g sont méromorphes et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
 $\text{Res}(\lambda f + \mu g, a) = \lambda \text{Res}(f, a) + \mu \text{Res}(g, a).$

La méthode du calcul connue pour les pôles de fractions s'adaptent aux fonctions holomorphes plus compliquées :

✂ Savoir faire - Calculer les résidus de f en a

Plusieurs méthode :

1. On exploite un développement asymptotique de f au voisinage de a .
2. Si f a en a un pôle d'ordre 1 : $\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z).$
3. Si f a en a un pôle d'ordre n : $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} ((z - a)^n f(z)).$
4. Si h possède en a une racine d'ordre 1 : $\text{Res}\left(\frac{g}{h}, a\right) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$

🔴 Remarque - Explication du second résultat

Supposons que $f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{(z-a)^k} + g(z)$ où a n'est pas pôle de g . On cherche α_1 .

En multipliant par $(z-a)^n$, on trouve :

$$(z-a)^n f(z) = \sum_{k=1}^n \alpha_k (z-a)^{n-k} + (z-a)^n g(z) \text{ puis}$$

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} ((z-a)^n f(z)) = (n-1)! \alpha_1 + 0 + \dots + 0 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (z-a)^{n-k} g^{(n-k)}(z).$$

Exercice

Que vaut $\text{Res}\left(\frac{\cos t}{t}, 0\right)$?

5.3. Applications (aux calculs d'intégrales immondes et sommes effrayantes)

Le principe est (presque) toujours le même : on prolonge l'intégrande en une fonction holomorphe sur une partie \mathbb{C} . Puis on calcul ses résidus.

🔍 Pour aller plus loin - Calculer des sommes par les résidus

On peut aussi exploiter le théorème des résidus pour évaluer quelques sommes du type

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus S} f(n) \text{ ou } \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus S} (-1)^n f(n). \text{ Voir la page}$$

Théorème des résidus de Wikipedia.

🔧 **Savoir faire - Intégrale de premier type**

Il s'agit de calculer $I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$ où R est une fraction rationnelle ayant un nombre fini de pôles : s_j et donc aucun n'appartient à $\mathbb{U} = \mathcal{C}(0, 1)$, le cercle unité.

Alors $I = 2i\pi \sum_{|s_j| < 1} \text{Res}(f, s_j)$ où $f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$.

🍃 **Exemple** - $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \sin x}$ avec $a > 1$.

🔧 **Savoir faire - Intégrale de deuxième type**

Il s'agit de calculer $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

On suppose que cette intégrale est convergente, ce qui impose nécessairement que $zf(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$.

En considérant le « demi-cercle » de diamètre l'axe des réels et la partie positive (resp. négative), on trouve :

$$I = 2i\pi \sum_{\text{Im}(s_j) > 0} \text{Res}(f, s_j) = -2i\pi \sum_{\text{Im}(s_j) < 0} \text{Res}(f, s_j).$$

🍃 **Exemple** - $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}$ avec $a > 0$.

Pour le dernier savoir-faire, on fera attention au moment du calcul du résidu que la fonction $z \mapsto f(z)e^{iaz}$ n'est pas, en règle générale, une fraction rationnelle.

Savoir faire - Intégrale de troisième type

Il s'agit de calculer $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax} dx$.


On suppose que cette intégrale est convergente, ce qui impose nécessairement que $zf(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$. On suppose également que $S \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (pas de points singuliers (pôles) réels).

En considérant le « demi-cercle » de diamètre l'axe des réels et la partie positive (resp. négative), on trouve :

$$I = 2i\pi \sum_{\text{Im}(s_j) > 0} \text{Res}(f e^{ia \cdot}, s_j) \text{ si } a > 0.$$

$$I = -2i\pi \sum_{\text{Im}(s_j) < 0} \text{Res}(f e^{ia \cdot}, s_j) \text{ si } a < 0 \text{ (resp.)}.$$

Souvent on exploite ce savoir-faire à une recherche de cos ou sin au numérateur (en prenant la partie réelle ou imaginaire).

 **Exemple** - $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(bx) dx}{x^2 + a^2}$ avec $a, b > 0$.

6. Prolongement analytique

6.1. Zéros d'une fonction holomorphe

Avant d'étudier le théorème de résidus, nous avons rencontré les fonctions méromorphes. Il s'agit de fonctions holomorphes sauf en un nombre fini de points de \mathbb{C} . L'étude des pôles et l'étude des racines d'une fonction holomorphe sont certainement intéressants.

STOP **Remarque - Rappels topologique 1 : points d'accumulation et points isolés**

On rappelle qu'un point adhérent est la limite d'une suite de points d'un ensemble.

Les points d'accumulation a sont des points adhérents par une suite de points de A , tous différents du point limite.

$\exists (a_n) \in (A \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$ telle que $(a_n) \rightarrow a$.

Ou encore : $\forall \epsilon > 0, \exists a_\epsilon \in A$ tel que $0 < |a - a_\epsilon| < \epsilon$.

Les points isolés sont des points qui ne sont pas des points d'accumulation

$\exists \epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \cap A = \{x\}$.

STOP **Remarque - Rappels topologique 2 : parties connexes**

On a vu que E est connexe (dans \mathbb{R}), si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux sous-ensembles séparés non vides.

On n'a pas $E = A \cup B$ avec $\overline{A} \cap B = \emptyset$ et $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Une méthode pour démontrer que E est connexe (par arcs) consiste à montrer que pour tout $a, b \in E$, il existe $\varphi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ continue avec $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$.

Une autre méthode consiste souvent à faire un raisonnement par l'absurde et à travailler à partir du nombre x_0 qui est obtenu comme borne supérieure d'un ensemble A (à inventer) et élément de B ou bien élément de A et borne inférieure de B . A partir de ce x_0 , trouver une contradiction.

🔍 Analyse - Factorisation par $(z - a)^m$

Notons $Z_f = \{a \in U \mid f(a) = 0\}$, l'ensemble des zéros de f .
Puisque f est holomorphe en a , elle est développable en série entière autour de a

Définition - Ordre des zéros de f

Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} et f une fonction holomorphe définie sur U .

Soit $a \in Z_f$.

- Ou bien : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$ Dans ce cas il existe V voisinage de a tel que $\forall x \in V \setminus \{a\}, f(x) = 0$.
- Ou bien : il existe $m(a) \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \mathcal{H}$ tel que $g(a) \neq 0$ et $\forall z \in U$, $f(z) = g(z)(z - a)^{m(a)}$.

Le nombre $m(a)$ s'appelle l'ordre du zéro de f au point a .

Dans ce cas il existe V voisinage de a tel que $\forall x \in V \setminus \{a\}, f(x) \neq 0$.

Proposition - Zéros isolés

Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} . Soit f holomorphe sur U .

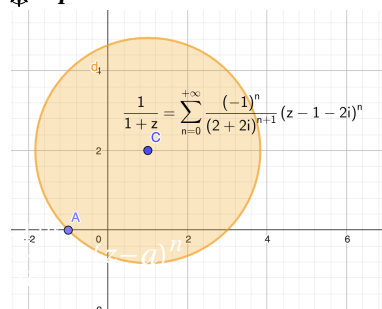
S'il existe $a \in Z_f$, d'ordre infini, alors f est identiquement nulle sur U .

Démonstration

6.2. Prolongement analytique

🔍 Analyse - L'application $z \mapsto \frac{1}{1+z}$

✳️ Représentation - DES en $1+2i$



Proposition - Prolongement analytique

Soient f et g deux fonctions holomorphes ou analytiques.
 Soit U un ouvert connexe contenant \mathcal{D}_f et \mathcal{D}_g .
 Si $\{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$ admet un point d'accumulation, alors $f = g$ sur U entier.

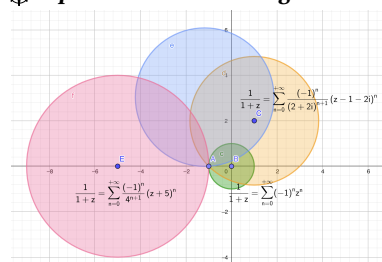
🔴 Remarque - Domaine d'égalité

On exploite ce théorème souvent sur $U = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ directement (à condition que cet ensemble soit (ouvert et) connexe).

Démonstration

🔗 Application - $z \mapsto \frac{1}{1+z}$

✳️ Représentation - Prolongement analytique



🌿 Exemple - $z \mapsto e^{-1/z^2}$

6.3. Fonctions à singularités. Vers les surfaces de Riemann

On termine par un preview de la saison 2.

🔗 Heuristique - Tourner autour d'un pôle

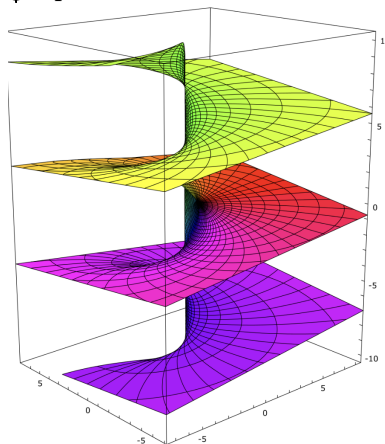
Lorsqu'on fait le tour autour de 0 de la fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z}$, on retrouve la même série entière.

La fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z}$ est univariée.

Il n'en est pas de même de son intégrale : $\int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z}$

🔍 Analyse - $z \mapsto \ln z$

🌟 Représentation - $z \mapsto \ln(z)$



Riemann propose un concept pour dépasser cette limite, a priori.

Définition - Surface de Riemann

Une surface de Riemann est un espace topologique séparé X , admettant un atlas modelé sur le plan complexe \mathbb{C} dont les applications de changement de cartes sont des applications biholomorphes.

Autrement dit X admet un recouvrement par des ouverts U_i homéomorphes à des ouverts de \mathbb{C} ; ces cartes dites holomorphes $f_i : U_i \rightarrow V_i$ sont telles que les fonctions de changement de cartes $f_i \circ f_j^{-1}$ soient des fonctions holomorphes entre ouverts de \mathbb{C} .

En fait, en géométrie différentielle et géométrie analytique complexe, une surface de Riemann est une variété complexe de dimension 1. Vivement la prochaine saison!

7. Bilan

Synthèse

- ↪ Une fonction holomorphe sur un ouvert U est une fonction dérivable en tout $z_0 \in U$, de la variable complexe. Cette forme de dérivation est plus exigeante que la dérivation à deux variables : localement la transformation n'est pas simplement affine, elle est conforme (similitude). Il existe de nombreuses fonctions holomorphes (toutes nos fonctions usuelles, entre autres).
- ↪ Cette rigidité donne aux fonctions de la variable complexe une propriété impensable pour les fonctions réelles : si elles sont une fois dérivable (holomorphe) alors elles sont infiniment dérivable, et même analytique. Cela signifie qu'en tout point de U , la fonction holomorphe est comparable à une série entière (centrée en ce point) de rayon > 0 .
- ↪ Pour montrer ce résultat important, il a d'abord fallu faire un détour par les intégrales curvilignes, i.e. les intégrales sur des chemins (lignes) de \mathbb{C} . Là, une foule de théorèmes, tous plus ou moins dûs à Cauchy s'observent : ils lient les intégrales de chemin d'une fonction aux valeurs aux extrémités de la primitive (comme toute intégrale) mais également aux nombres de points singuliers (pôles) de la fonction intégrée à l'intérieur du chemin d'intégration (indice d'un point par rapport à une courbe fermée). En découle des tas de théorèmes comme le principe du maximum que nous verrons en TD.
- ↪ Une première application a été le théorème de résidus qui permet, lorsqu'on le maîtrise bien de calculer les valeurs exactes d'intégrales difficiles voire de sommes infinies immondes.
- ↪ Une seconde application est celui du recollement par prolongement analytique sur un convexe. En fait, les zéros d'une fonction holomorphe sont soit isolés soit dense. Ou encore : il n'existe qu'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus E$ (où E est au plus dénombrable) connaissant la valeur de toutes les dérivées en un point.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Savoir-faire - Montrer l'holomorphic (ou non) avec $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto f(x + iy)$
- Savoir-faire - Démontrer qu'une fonction n'est pas la dérivée d'une fonction holomorphe
- Savoir-faire - Calculer les résidus de f en a
- Savoir-faire - Intégrale de premier type (Résidus)
- Savoir-faire - Intégrale de deuxième type (Résidus)
- Savoir-faire - Intégrale de troisième type (Résidus)

Notations

Notations	Définitions	Propriétés	Remarques
$\mathcal{H}(U)$	Ensemble des fonctions holomorphe définies sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$	$\forall z_0 \in U \quad f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + (z - z_0)\epsilon(z)$ où $A \in \mathbb{C}$ (similitude) et $\epsilon(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$	$(\mathcal{H}(U), +, \cdot)$ est une algèbre
$\int_{\Gamma} g(z)dz$	Intégrale curviligne de g le long de Γ	Si $\Gamma = \text{Im}(\gamma)$ avec $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, de classe \mathcal{C}^1 sans point stationnaire : $\int_{\Gamma} g(z)dz = \int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t)dt$	Ce nombre est indépendant du choix de γ .
$\text{Ind}_{\Gamma}(z_0)$	Indice de Γ par rapport à z_0	$\text{Ind}_{\Gamma}(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} \in \mathbb{Z}$	Il indique le nombre de tour (sens direct) de Γ autour de z_0
$\text{Res}(f, z_0)$	Résidu de f en z_0	Le coefficient devant $(z - z_0)^{-1}$ dans le DAS de f au voisinage de z_0	Si z_0 est pôle d'ordre n , $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z))$

Retour sur les problèmes

- A.4 C'est l'enjeu de ce cours
- A.5 Intégration curviligne (sur une ligne ou un chemin), ou bien intégration sur une surface comme pour le théorème de Green-Riemann
- A.6 Si P ne s'annule pas alors $\frac{1}{P}$ est holomorphe et vérifie donc le principe de maximum, . Voir TD
- A.7 Question avancée dans la partie sur le prolongement analytique.
- A.8 Oui, la relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ permet de définir pour $z \in \mathbb{R}^-$ et $z \notin \mathbb{Z}$, $\Gamma(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)\cdots(z+\lfloor z \rfloor)} \Gamma(z + \lceil z \rceil)$, il n'y a qu'une fonction holomorphe qui égale avec Γ sur le connexe \mathbb{R}_+^* .

