



⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## 1. Quelques problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

## 2. Equation polynomiale et algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## 1. Quelques problèmes

### 1.1. Problèmes

### 1.2. Vocabulaires et contextes

## 2. Equation polynomiale et algèbre

### 2.1. Révolution 1 : Viète

### 2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## **Problème** Kwarizmi

Résoudre, comme El Kwarizmi, l'équation  $x^2 + 10x = 39$  en exploitant que des méthodes géométriques (calcul d'aire, nombres positifs. . .)

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## **Problème** Kwarizmi

Résoudre, comme El Kwarizmi, l'équation  $x^2 + 10x = 39$  en exploitant que des méthodes géométriques (calcul d'aire, nombres positifs. . .)

## **Problème** Mauvais vers italiens

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## Problème Kwarizmi

Résoudre, comme El Kwarizmi, l'équation  $x^2 + 10x = 39$  en exploitant que des méthodes géométriques (calcul d'aire, nombres positifs. . .)

## Problème Mauvais vers italiens

## Problème Tartaglia et Cardan

Trouver toutes les solutions de l'équation  $x^3 + 6x = 20$ .

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

**Problème** Polynôme de degré 2 et représentation graphique

Représenter la courbe d'équation  $y = ax^2 + bx + c$ .

On fera la différence entre  $a > 0$  et  $a < 0$ . On notera en particulier les coordonnées du sommet.

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

**Problème** Polynôme de degré 2 et représentation graphique

Représenter la courbe d'équation  $y = ax^2 + bx + c$ .

On fera la différence entre  $a > 0$  et  $a < 0$ . On notera en particulier les coordonnées du sommet.

**Problème** Chercher à côté...

Si  $f(x_0) = 0,001$ , comment trouver une racine de  $f$  ?

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes



⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

**Problème** Polynôme de degré 2 et représentation graphique

Représenter la courbe d'équation  $y = ax^2 + bx + c$ .

On fera la différence entre  $a > 0$  et  $a < 0$ . On notera en particulier les coordonnées du sommet.

**Problème** Chercher à côté...

Si  $f(x_0) = 0,001$ , comment trouver une racine de  $f$  ?

**Problème** Formule de Taylor et développement limité

Soit  $f : x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , polynomiale de degré  $n$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , exprimer  $f^{(k)}(0)$  en fonction des nombres  $(a_i)$  qui définissent la fonction polynomiale.

$f^{(k)}(0)$  est la valeur en 0 de la  $k^{\text{e}}$  dérivée de la fonction  $f$ .

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## 1. Quelques problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

## 2. Equation polynomiale et algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Résoudre une équation

Principe : On appelle équation, une relation calculatoire avec des objets inconnues i.e. à expliciter, définies à partir d'une ou plusieurs relation(s) calculatoire(s).

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Résoudre une équation

Principe : On appelle équation, une relation calculatoire avec des objets inconnues i.e. à expliciter, définies à partir d'une ou plusieurs relation(s) calculatoire(s).

## Définition - Résoudre une équation

Soit  $E$  un ensemble (souvent  $E = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}^p \dots$ , mais pas uniquement).

Soit une application  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  et  $b \in \mathbb{C}$ .

On dit qu'on résout l'équation  $f(x) = b$ , d'inconnue  $x \in E$ , lorsqu'on trouve tous les « nombres »  $x \in E$  tel que  $f(x) = b$ .

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Résoudre une équation

Principe : On appelle équation, une relation calculatoire avec des objets inconnues i.e. à expliciter, définies à partir d'une ou plusieurs relation(s) calculatoire(s).

## Définition - Résoudre une équation

Soit  $E$  un ensemble (souvent  $E = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}^p \dots$ , mais pas uniquement).

Soit une application  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  et  $b \in \mathbb{C}$ .

On dit qu'on résout l'équation  $f(x) = b$ , d'inconnue  $x \in E$ , lorsqu'on trouve tous les « nombres »  $x \in E$  tel que  $f(x) = b$ .

On parle d'antécédent de  $b$  par  $f$ .

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Résoudre une équation

Principe : On appelle équation, une relation calculatoire avec des objets inconnues i.e. à expliciter, définies à partir d'une ou plusieurs relation(s) calculatoire(s).

## Définition - Résoudre une équation

Soit  $E$  un ensemble (souvent  $E = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}^p \dots$ , mais pas uniquement).

Soit une application  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  et  $b \in \mathbb{C}$ .

On dit qu'on résout l'équation  $f(x) = b$ , d'inconnue  $x \in E$ , lorsqu'on trouve tous les « nombres »  $x \in E$  tel que  $f(x) = b$ .

On parle d'antécédent de  $b$  par  $f$ .

**Remarque** Il n'existe qu'une méthode infaillible pour résoudre une équation : Faire l'essai

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Résoudre une équation

Principe : On appelle équation, une relation calculatoire avec des objets inconnues i.e. à expliciter, définies à partir d'une ou plusieurs relation(s) calculatoire(s).

## Définition - Résoudre une équation

Soit  $E$  un ensemble (souvent  $E = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}^p \dots$ , mais pas uniquement).

Soit une application  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  et  $b \in \mathbb{C}$ .

On dit qu'on résout l'équation  $f(x) = b$ , d'inconnue  $x \in E$ , lorsqu'on trouve tous les « nombres »  $x \in E$  tel que  $f(x) = b$ .

On parle d'antécédent de  $b$  par  $f$ .

**Remarque** Il n'existe qu'une méthode infaillible pour résoudre une équation : Faire l'essai

Mais ! Pourquoi des équations polynomiales ?

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## 1. Quelques problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

## 2. Equation polynomiale et algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes



⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## Heuristique - Généralisation avec des lettres

FRANÇOIS VIÈTE a l'idée fondamentale d'écrire des lettres  $A, B, C, \dots X$  pour les inconnues et les données d'un problème (ie. les connus!) et de faire les calculs algébriques. Dès lors, aucun problème des anciens Grecs ne semble résister au schéma :

Problème *mêmes lettres* Problème *calculs*  
géométrique  $\longrightarrow$  algébrique  $\longrightarrow$  Solution

et Viète écrit en majuscules : « *NVLLVM NON PROBLEMA SOLVERE* ».

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## Définition - Fonction polynomiale (d'une variable)

On dit que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application polynomiale s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  (voire  $\mathbb{C}$ ) tels que :

pour tout réel  $x$ ,  $f(x)$  est obtenu par le calcul  $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ .

On note  $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ .

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## Définition - Fonction polynomiale (d'une variable)

On dit que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application polynomiale s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  (voire  $\mathbb{C}$ ) tels que :

pour tout réel  $x$ ,  $f(x)$  est obtenu par le calcul  $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ .

On note  $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ .

**Remarque** Un unique type de calcul, pour tout  $x$ .

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Saut historique

Cette définition s'étend au cas de plusieurs variables

## Définition - Polynôme de plusieurs variables

On appelle fonction polynomiale de  $p$  variables (abrégé ici en « polynôme de  $p$  variables ») une fonction de la forme :

$$f_p : (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto \sum_{(k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{N}^p} a_{k_1, k_2, \dots, k_p} \prod_{i=1}^p x_i^{k_i}$$

(nombre de termes fini)

où pour tout  $(k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{N}^p$ ,  $a_{k_1, k_2, \dots, k_p} \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ );

Il s'agit d'une C.L. finie de puissances entières des  $x_1, \dots, x_p$ .

La somme et le produit de deux fonctions polynomiale est une fonction polynomiale.

On appelle degré de  $f_p : \max\{k_1 + k_2 + \dots + k_p \mid a_{k_1, k_2, \dots, k_p} \neq 0\}$ .

Si  $f$  n'a qu'une variable,  $\deg(f) = \max\{n \in \mathbb{N}, \text{ tel que } a_n \neq 0\}$ .

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation polynomiale et algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Saut historique

Cette définition s'étend au cas de plusieurs variables

## Définition - Polynôme de plusieurs variables

On appelle fonction polynomiale de  $p$  variables (abrégé ici en « polynôme de  $p$  variables ») une fonction de la forme :

$$f_p : (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto \sum_{(k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{N}^p} a_{k_1, k_2, \dots, k_p} \prod_{i=1}^p x_i^{k_i}$$

(nombre de termes fini)

où pour tout  $(k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{N}^p$ ,  $a_{k_1, k_2, \dots, k_p} \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ );

Il s'agit d'une C.L. finie de puissances entières des  $x_1, \dots, x_p$ .

La somme et le produit de deux fonctions polynomiale est une fonction polynomiale.

On appelle degré de  $f_p : \max\{k_1 + k_2 + \dots + k_p \mid a_{k_1, k_2, \dots, k_p} \neq 0\}$ .

Si  $f$  n'a qu'une variable,  $\deg(f) = \max\{n \in \mathbb{N}, \text{ tel que } a_n \neq 0\}$ .

**Exemple**  $f : (x, y, z) \mapsto 3x^2y - 2xyz - xz^2$

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Vocabulaire

On donne un peu de vocabulaire et une notation bien pratique, même si historiquement cela s'est fait beaucoup plus tardivement. . .

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## 1. Quelques problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

## 2. Equation polynomiale et algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Vocabulaire

On donne un peu de vocabulaire et une notation bien pratique, même si historiquement cela s'est fait beaucoup plus tardivement. . .

**Analyse** Unicité d'écriture

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Vocabulaire

On donne un peu de vocabulaire et une notation bien pratique, même si historiquement cela s'est fait beaucoup plus tardivement. . .

## Analyse Unicité d'écriture

Ainsi, par contraposée : si deux écritures polynomiales donne une même fonction, c'est nécessairement la même écriture !

### Définition - Degré et $[f]_k$

Soit  $f$  une application polynomiale. Alors son écriture est unique. Ainsi, il existe un unique  $n \in \mathbb{N}$  et un unique  $(n + 1)$ -uplet de réels

$(a_0, a_1, \dots, a_n)$  tels que  $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ .

Le nombre entier  $n$  s'appelle le degré de la fonction polynomiale  $f$ .

$a_n x^n$  s'appelle le terme dominant de la fonction polynomiale  $f$ .

Et on aura pour habitude de noter  $[f]_k$ , le  $k$  coefficient  $a_k$  (devant  $x^k$ ) dans l'écriture de  $f$ .

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes



⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## 1. Quelques problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

## 2. Equation polynomiale et algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## Heuristique. Algèbre et géométrie

La motivation est ici GEOMETRIQUE. Une nouvelle façon de concevoir le problème est de maintenant lui donner un sens géométrique et en particulier de donner à  $\mathbb{R}$  le sens du continu (comme une droite) et à  $f(\mathbb{R})$  une déformation continue de  $\mathbb{R}$ .

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## Heuristique. Algèbre et géométrie

La motivation est ici GEOMETRIQUE. Une nouvelle façon de concevoir le problème est de maintenant lui donner un sens géométrique et en particulier de donner à  $\mathbb{R}$  le sens du continu (comme une droite) et à  $f(\mathbb{R})$  une déformation continue de  $\mathbb{R}$ .

En mathématique, l'apport principal de Descartes a consisté à donner une vision géométrique à l'algèbre et une approche calculatoire à la géométrie (de l'ordre de la précision du langage). C'est une véritable révolution.

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

## Définition - Graphe dans $\mathbb{R}^2$

Soit  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

On note  $\Gamma_H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = 0\}$ , une sous-partie de  $\mathbb{R}^2$ .

On dit que  $H(x, y) = 0$  est une équation du graphe  $\Gamma$ .

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Représentation graphique

## Définition - Graphe dans $\mathbb{R}^2$

Soit  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

On note  $\Gamma_H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = 0\}$ , une sous-partie de  $\mathbb{R}^2$ .

On dit que  $H(x, y) = 0$  est une équation du graphe  $\Gamma$ .

Sans condition supplémentaire sur  $H$ ,  $\Gamma$  peut être très variés.

**Exemple** Folium de Descartes

Courbe  $\mathcal{F}$  d'équation  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$  (cubique).

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Représentation graphique

## Définition - Graphe dans $\mathbb{R}^2$

Soit  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

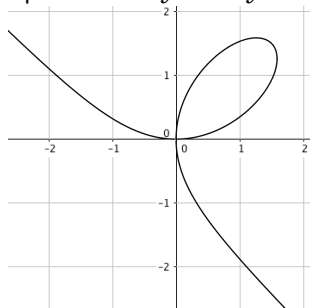
On note  $\Gamma_H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = 0\}$ , une sous-partie de  $\mathbb{R}^2$ .

On dit que  $H(x, y) = 0$  est une équation du graphe  $\Gamma$ .

Sans condition supplémentaire sur  $H$ ,  $\Gamma$  peut être très variés.

### Exemple Folium de Descartes

Courbe  $\mathcal{F}$  d'équation  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$  (cubique).



⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

## Définition - Exemple. Graphe d'une fonction

Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on appelle représentation graphique de  $f$  (ou graphe de  $f$ ), la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation  $y = f(x)$

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

## Définition - Exemple. Graphe d'une fonction

Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on appelle représentation graphique de  $f$  (ou graphe de  $f$ ), la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation  $y = f(x)$

Dans ce cas  $H : (x, y) \mapsto y - f(x)$ . Une telle courbe ne peut « revenir en arrière ». En effet, cela signifierait qu'un nombre  $x_0$  aurait deux images.



# Représentation des fonctions polynomiales

## Heuristique - Représentation

La représentation d'une fonction polynomiale  $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  est continue.

Cette fonction polynomiale est de degré  $n$ , donc admet au plus  $n$  racines (de l'équation polynomiale).

Par dérivation (que l'on expliquera plus loin), il y a également au plus  $n$  sens de variation différents. . .

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## 1. Quelques problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

## 2. Equation polynomiale et algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Représentation des fonctions polynomiales

## Heuristique - Représentation

La représentation d'une fonction polynomiale  $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  est continue.

Cette fonction polynomiale est de degré  $n$ , donc admet au plus  $n$  racines (de l'équation polynomiale).

Par dérivation (que l'on expliquera plus loin), il y a également au plus  $n$  sens de variation différents. . .

### Exercice

Donner l'exemple d'une fonction polynomiale de degré 4 n'ayant que deux sens de variations différentes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Représentation des fonctions polynomiales

## Heuristique - Représentation

La représentation d'une fonction polynomiale  $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  est continue.

Cette fonction polynomiale est de degré  $n$ , donc admet au plus  $n$  racines (de l'équation polynomiale).

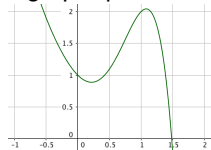
Par dérivation (que l'on expliquera plus loin), il y a également au plus  $n$  sens de variation différents. . .

### Exercice

Donner l'exemple d'une fonction polynomiale de degré 4 n'ayant que deux sens de variations différentes

### Exercice

Quel est le degré (minimal) de la fonction polynomiale dont la représentation graphique est donnée par :



⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## Proposition - Translation

La courbe  $\Gamma$  présente une invariance par translation de vecteur  $\vec{u} = T \vec{i}$ , si et seulement si,

on a l'équivalence :  $H(x, y) = 0 \iff H(x + 2T, y) = 0$

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Invariance géométrique par translation

## Proposition - Translation

La courbe  $\Gamma$  présente une invariance par translation de vecteur  $\vec{u} = T \vec{i}$ , si et seulement si,

$$\text{on a l'équivalence : } H(x, y) = 0 \iff H(x + 2T, y) = 0$$

**Remarque** Qui sont  $x$  et  $y$  ?

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Invariance géométrique par translation

## Proposition - Translation

La courbe  $\Gamma$  présente une invariance par translation de vecteur  $\vec{u} = T \vec{i}$ , si et seulement si,

$$\text{on a l'équivalence : } H(x, y) = 0 \iff H(x + 2T, y) = 0$$

**Remarque** Qui sont  $x$  et  $y$  ?

**Exemple** Graphe d'une fonction

# Invariance géométrique par symétrie axiale

## **Analyse** Symétrie axiale, centrale

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## Analyse Symétrie axiale, centrale

### Proposition - Symétrie axiale

La courbe  $\Gamma$  présente une symétrie axiale d'axe  $x = x_0$ , si et seulement si,

$$\text{on a l'équivalence : } H(x, y) = 0 \iff H(2x_0 - x, y) = 0$$

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes



⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## Analyse Symétrie axiale, centrale

### Proposition - Symétrie axiale

La courbe  $\Gamma$  présente une symétrie axiale d'axe  $x = x_0$ , si et seulement si,

$$\text{on a l'équivalence : } H(x, y) = 0 \iff H(2x_0 - x, y) = 0$$

### Exemple Graphe d'une fonction - symétrie axiale

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

Une symétrie centrale de centre  $M_0(x_0, y_0)$  est la composition d'une symétrie d'axe  $x = x_0$  et d'axe  $y = y_0$ .

## Proposition - Symétrie centrale

La courbe  $\Gamma$  présente une symétrie centrale de centre  $M(x_0, y_0)$ , si et seulement si, on a l'équivalence :

$$H(x, y) = 0 \iff H(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0$$

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Invariance géométrique par symétrie centrale

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

Une symétrie centrale de centre  $M_0(x_0, y_0)$  est la composition d'une symétrie d'axe  $x = x_0$  et d'axe  $y = y_0$ .

## Proposition - Symétrie centrale

La courbe  $\Gamma$  présente une symétrie centrale de centre  $M(x_0, y_0)$ , si et seulement si, on a l'équivalence :

$$H(x, y) = 0 \iff H(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0$$

**Exemple** Graphe d'une fonction - symétrie centrale

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Un astuce : démontrer par la géométrie ?

De manière générale, on ne démontre pas un résultat de calcul par une exploitation graphique, mais cela permet largement de vérifier une série de calculs.

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Un astuce : démontrer par la géométrie ?

De manière générale, on ne démontre pas un résultat de calcul par une exploitation graphique, mais cela permet largement de vérifier une série de calculs.

## Truc & Astuce pour le calcul. Transformer le résultat d'un calcul en une représentation visuelle

Depuis Descartes, l'algèbre et la géométrie sont totalement liés et il est possible de passer « du diable de l'algèbre à l'ange de la géométrie » (Hermann Weyl).

Il est donc important de savoir faire cette transformation : donner du sens géométrique à un calcul algébrique. On peut ainsi anticiper ou vérifier un résultat.

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

### 1. Quelques problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

### 2. Equation polynomiale et algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Un astuce : démontrer par la géométrie ?

De manière générale, on ne démontre pas un résultat de calcul par une exploitation graphique, mais cela permet largement de vérifier une série de calculs.

## Truc & Astuce pour le calcul. Transformer le résultat d'un calcul en une représentation visuelle

Depuis Descartes, l'algèbre et la géométrie sont totalement liés et il est possible de passer « du diable de l'algèbre à l'ange de la géométrie » (Hermann Weyl).

Il est donc important de savoir faire cette transformation : donner du sens géométrique à un calcul algébrique. On peut ainsi anticiper ou vérifier un résultat.

### Exercice

Montrer que le système 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$
 admet exactement deux solutions.

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Changement de registre

Le changement de registre ici est une force si on sait bien l'employer, mais aussi un gros problème pour les élèves bloqués dans leur registre.

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## 1. Quelques problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

## 2. Equation polynomiale et algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

## Changement de registre

Le changement de registre ici est une force si on sait bien l'employer, mais aussi un gros problème pour les élèves bloqués dans leur registre.

### Truc & Astuce pour le calcul. Avec des fonctions

Le calcul sur les fonctions est à l'intersection du calcul algébrique, du calcul graphique, du calcul différentiel et intégrale, du calcul de limites. . .

Les problèmes où interviennent ces fonctions sont aussi très variés, et il n'est pas rare de voir des changements de registre, d'un domaine à l'autre dans une même problème ! Il faut avoir un esprit bien souple. . .

C'est tout particulièrement le cas de l'étude des polynômes (où l'on bascule facilement d'un domaine à l'autre).

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes



⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Changement de registre

## Truc & Astuce pour le calcul. Avec des fonctions

Le calcul sur les fonctions est à l'intersection du calcul algébrique, du calcul graphique, du calcul différentiel et intégrale, du calcul de limites. . .

Les problèmes où interviennent ces fonctions sont aussi très variés, et il n'est pas rare de voir des changements de registre, d'un domaine à l'autre dans une même problème ! Il faut avoir un esprit bien souple. . .

C'est tout particulièrement le cas de l'étude des polynômes (où l'on bascule facilement d'un domaine à l'autre).

### Exercice

Démontrer que le polynôme  $x^3 + 3x - 1$  admet une unique racine sur  $\mathbb{R}$ .

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Polynômes

- ▶ Définitions : addition de produits de puissance ! Voir composition

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

### 1. Quelques problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

### 2. Equation polynomiale et algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Polynômes

- ▶ Définitions : addition de produits de puissance ! Voir composition

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

### 1. Quelques problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

### 2. Equation polynomiale et algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Polynômes

- ▶ Définitions : addition de produits de puissance ! Voir composition
- ▶ Polynôme de plusieurs variables.

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Polynômes

- ▶ Définitions : addition de produits de puissance ! Voire composition
- ▶ Polynôme de plusieurs variables.
- ▶ Développement et conservation. . .

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

- ▶ Transformer une équation en un dessin (et réciproquement)

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes



# Conclusion

## Objectifs

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

- ▶ Transformer une équation en un dessin (et réciproquement)
- ▶ Addition/Translation, symétrie...

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

- ▶ Transformer une équation en un dessin (et réciproquement)
- ▶ Addition/Translation, symétrie...
- ▶ Théorème des valeurs intermédiaires (On y reviendra)

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

- ▶ Transformer une équation en un dessin (et réciproquement)
- ▶ Addition/Translation, symétrie...
- ▶ Théorème des valeurs intermédiaires (On y reviendra)
- ▶ Lier variations de la représentation graphique et degré de la fonction polynomiale

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

### 1. Quelques problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

### 2. Equation polynomiale et algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

## Objectifs

⇒ Polynômes

⇒ Géométrie

1. Quelques  
problèmes

1.1. Problèmes

1.2. Vocabulaires et contextes

2. Equation  
polynomiale et  
algèbre

2.1. Révolution 1 : Viète

2.2. Révolution 2 : Descartes

## Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : Chap 1 : Equations polynomiales.  
3. Développement et factorisation
- ▶ Pour demain : exercices N°1, 9 & 13
- ▶ TD de jeudi :  
8h-10h (de AFFENE à GAZO) :  
18, 2, 5, 6, 8, 16, 23  
10h-12h (de HEYMES à ZAMUNER) :  
19, 3, 4, 7, 10, 17, 25