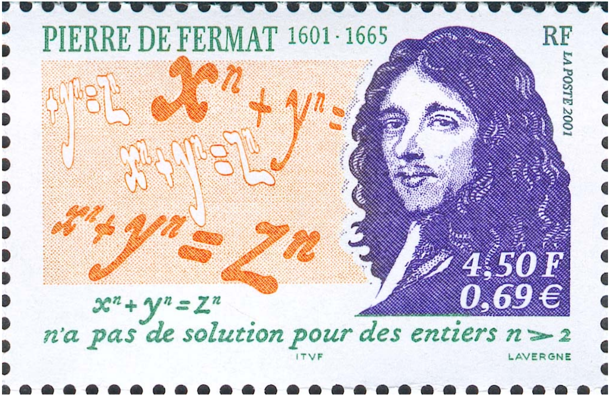

Leçon 3 - Equations polynomiales

6 septembre 2024

⇒ Méthode analytique

⇒ Méthode analytique

Idée

Heuristique. La meilleure solution

Si l'on veut résoudre un problème, dont on ne sait rien excepté ses réalisations pour certains réalisations des variables. Alors la solution naturelle consiste à faire des essais/erreurs.
Concrètement, pour résoudre $f = 0$, on prend une première valeur pour x. On essaye $f(x_1)$. Est-il égal à 0 ?
Si non, on essaye une autre valeur...

Idée

Heuristique. La meilleure solution

Si l'on veut résoudre un problème, dont on ne sait rien excepté ses réalisations pour certains réalisations des variables. Alors la solution naturelle consiste à faire des essais/erreurs.
Concrètement, pour résoudre $f = 0$, on prend une première valeur pour x. On essaye $f(x_1)$. Est-il égal à 0 ?
Si non, on essaye une autre valeur...

Est-il possible d'apprendre de nos essais/erreurs ?

Principe

Une méthode classique en ingénierie (mais aussi en biologie) est d'exploiter le retro-contrôle ou une retro-action positive.

Principe

Une méthode classique en ingénierie (mais aussi en biologie) est d'exploiter le retro-contrôle ou une retro-action positive.

Truc & Astuce - Exploiter le retro-contrôle

Réinjecter les résultats obtenus dans la formule initiale.
Mais si le résultat n'est pas juste, alors tout n'est pas perdu : il ne faut pas repartir de 0.
Et le second résultat ne doit pas être trop éloigné du premier résultat (plus grand si la fonction est croissante...).
Principe : on crée une suite (x_n) qui converge vers x, la vraie valeur que l'on cherche.
A chaque étape, on prend $x_{n+1} = x_n + y_n$, meilleure approximation de x que x_n, et donc y_n est une suite telle que :

- y_n est beaucoup plus petit que x_n, négligeable face à x_n
- $(y_n) \to 0$
- pour $k \in N$, $k \geqslant 2$, y_n^k est toujours beaucoup plus petit que y_n, négligeable face à y_n^k.

Exemple

Nous allons expliquer la méthode à partir d'un exercice.

Exemple

Nous allons expliquer la méthode à partir d'un exercice.

Exercice

On cherche à donner une valeur approchée de $\sqrt{8}$. Donner une valeur approchée (à deux chiffres), par rétro-contrôle

⇒ Méthode analytique

Méthode du dictionnaire

Analyse Principe

Méthode du dictionnaire

Analyse Principe

Définition - Algorithme de la sécante

Considérons la fonction polynomiale $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
On considère deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$, puis la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a,\ u_1 = b\ \forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{u_{n+1} - u_n}{f(u_{n+1}) - f(u_n)} f(u_{n+1})$$

La suite ainsi définie suit l'algorithme de la sécante

Méthode du dictionnaire

Analyse Principe

Définition - Algorithme de la sécante

Considérons la fonction polynomiale $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
On considère deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$, puis la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a, u_1 = b\ \forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{u_{n+1} - u_n}{f(u_{n+1}) - f(u_n)} f(u_{n+1})$$

La suite ainsi définie suit l'algorithme de la sécante

Sous certaines conditions, relativement robuste, la suite (u_n) converge vers une racine de f

⇒ Méthode analytique

Nombre dérivée

Analyse Quand 0 s'invite

Nombre dérivée

Analyse Quand 0 s'invite

Heuristique. Toute forme indéterminée $\frac{0}{0}$...

...peut se voir comme un calcul de dérivée, avec la formule de L'HOSPITAL.

Nombre dérivée

Analyse Quand 0 s'invite

Heuristique. Toute forme indéterminée $\frac{0}{0}$...

...peut se voir comme un calcul de dérivée, avec la formule de L'HOSPITAL.

Définition - Nombre dérivée

Soit f une fonction (polynomiale), on appelle dérivée de f en x_0, le nombre :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

On note ce nombre $f'(x_0)$, selon la notation d'Euler.

Dérivation de polynôme

Exemple Monôme et polynôme. Dérivation

Dérivation de polynôme

Exemple Monôme et polynôme. Dérivation

Analyse Méthode de la tangente

Algorithme de la tangente

Définition - Algorithme de la tangente

Considérons la fonction polynomiale $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
On considère deux nombres $a \in \mathbb{R}$, puis la suite (u_n) définie par :

$$v_0 = a, : \forall\ n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n - \frac{1}{f'(v_n)} f(v_n)$$

La suite ainsi définie suit l'algorithme de la tangente

Algorithme de la tangente

Définition - Algorithme de la tangente

Considérons la fonction polynomiale $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
On considère deux nombres $a \in \mathbb{R}$, puis la suite (u_n) définie par :

$$v_0 = a, : \forall\ n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n - \frac{1}{f'(v_n)} f(v_n)$$

La suite ainsi définie suit l'algorithme de la tangente

Sous certaines conditions, relativement robuste, la suite (v_n) converge vers une racine de f

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Méthodes analytiques

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Méthodes analytiques

- Retro-contrôle

Conclusion

Objectifs

⇒ Méthodes analytiques

- Retro-contrôle
- Encadrement : méthode de la sécante

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Méthodes analytiques

- Retro-contrôle
- Encadrement : méthode de la sécante
- Accélération : méthode de la tangente (Newton)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Méthodes analytiques

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours :
  chap 7. Sommes et produit
- Exercices N° 24 & 27