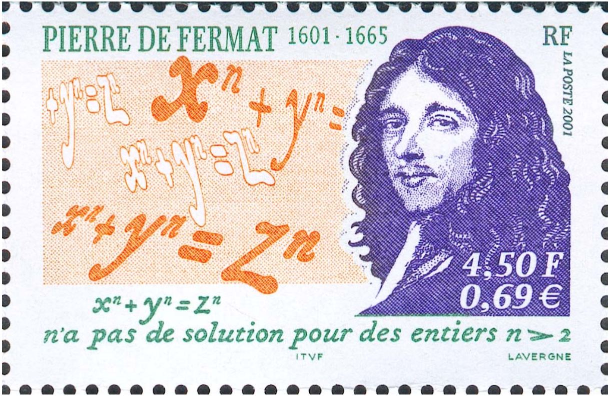


Leçon 7 - Trigonométrie

13 septembre 2024

⇒**Construction historique de la trigonométrie**

⇒ **Formule de Regiomontanus**

⇒Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

Problèmes

Problème - Fonctions définies sur des angles nulles et droits. Et plus loin ?

Problèmes

Problème - Fonctions définies sur des angles nulles et droits. Et plus loin ?

Problème - Unicité de mesures d'angles

Problèmes

Problème - Fonctions définies sur des angles nulles et droits. Et plus loin ?

Problème - Unicité de mesures d'angles

Problème - Relation entre les formules de trigonométrie

Problèmes

Problème - Fonctions définies sur des angles nulles et droits. Et plus loin ?

Problème - Unicité de mesures d'angles

Problème - Relation entre les formules de trigonométrie

Problème - Equation polynomiale et trigonométrie

Problèmes

Problème - Fonctions définies sur des angles nulles et droits. Et plus loin ?

Problème - Unicité de mesures d'angles

Problème - Relation entre les formules de trigonométrie

Problème - Equation polynomiale et trigonométrie

Problème - Fonction réciproque

⇒Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

Histoire des maths

Analyse Triangles rectangles semblables

Histoire des maths

Analyse Triangles rectangles semblables

Analyse Simplification : hypothènuse égale à 1

Histoire des maths

Analyse Triangles rectangles semblables

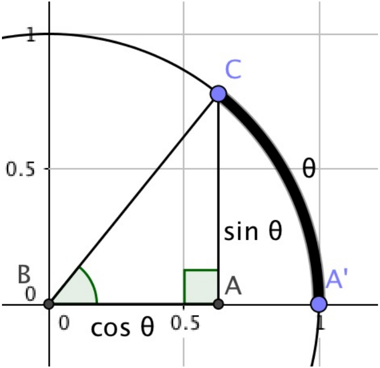
Analyse Simplification : hypothènuse égale à 1

Analyse Mesure naturelle d'angle

⇒Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

Représentation



Périodicité et symétrie

On a alors les résultats suivants (à savoir retrouver)

<u>Exercice</u>

Compléter les résultats suivants :

$$\sin(-\theta) = \qquad \cos(-\theta) = \qquad \sin(\theta+\pi) = \qquad \cos(\theta+\pi) =$$

$$\sin(\pi-\theta) = \qquad \cos(\pi-\theta) = \qquad \sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \qquad \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) =$$

Congruence

Définition - Congruence modulo α

Soient θ, θ' et α trois réels.
On dit que θ est congru à θ' modulo α
s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + k\alpha$ tel que

$$\theta \equiv \theta'[\alpha] \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} | \theta = \theta' + k\alpha$$

Congruence

Définition - Congruence modulo α

Soient θ, θ' et α trois réels.
On dit que θ est congru à θ' modulo α
s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + k\alpha$ tel que

$$\theta \equiv \theta'[\alpha] \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,|\, \theta = \theta' + k\alpha$$

Proposition - Propriétés des congruences

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a pour tout $(\theta, \theta', \theta'') \in \mathbb{R}^3$:

- $\theta \equiv \theta[\alpha]$ (reflexivité)
- $\theta \equiv \theta'[\alpha] \Rightarrow \theta' \equiv \theta[\alpha]$ (symétrie)
- $(\theta \equiv \theta'[\alpha]$ et $\theta' \equiv \theta''[\alpha]) \Rightarrow \theta \equiv \theta''[\alpha]$ (transitivité)

On dit que la congruence modulo α est une relation d'équivalence.

Congruence

Définition - Congruence modulo α

Soient θ, θ' et α trois réels.
On dit que θ est congru à θ' modulo α
s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + k\alpha$ tel que

$$\theta \equiv \theta'[\alpha] \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} | \theta = \theta' + k\alpha$$

Proposition - Propriétés des congruences

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a pour tout $(\theta, \theta', \theta'') \in \mathbb{R}^3$:

- $\theta \equiv \theta[\alpha]$ (reflexivité)
- $\theta \equiv \theta'[\alpha] \Rightarrow \theta' \equiv \theta[\alpha]$ (symétrie)
- $(\theta \equiv \theta'[\alpha]$ et $\theta' \equiv \theta''[\alpha]) \Rightarrow \theta \equiv \theta''[\alpha]$ (transitivité)

On dit que la congruence modulo α est une relation d'équivalence.

Démonstration

Savoir-faire

Savoir-faire. Cas d'égalité de sinus ou de cosinus

Pour tout $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\sin\theta = \sin\theta' \iff$$

$$\cos\theta = \cos\theta' \iff$$

Savoir-faire

Savoir-faire. Cas d'égalité de sinus ou de cosinus

Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\sin\theta = \sin\theta' \Longleftrightarrow$$

$$\cos\theta = \cos\theta' \Longleftrightarrow$$

Démonstration

⇒Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

Définition

Définition - Tangente d'un angle

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. On appelle *tangente* de θ le réel, noté $\tan\theta$, défini par :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Définition

Définition - Tangente d'un angle

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. On appelle *tangente* de θ le réel, noté $\tan\theta$, défini par :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Remarque Fonction cotangente

Propriétés

Proposition - (Im)parité et périodicité

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. On a

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \tan(\pi+\theta) = \tan\theta \qquad \tan(\pi-\theta) = \tan\theta$$

Propriétés

Proposition - (Im)parité et périodicité

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. On a

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \tan(\pi+\theta) = \tan\theta \qquad \tan(\pi-\theta) = \tan\theta$$

Démonstration

Représentation

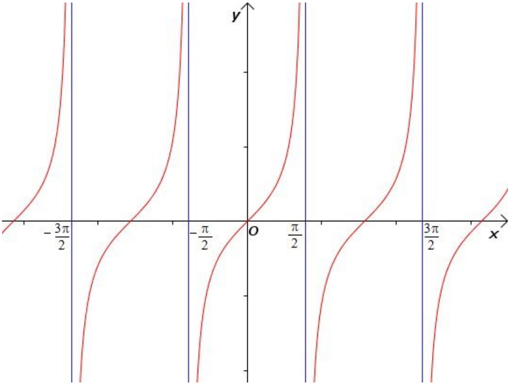
<u>Exercice</u>

Etudier et représenter la fonction $\tan$

Représentation

<u>Exercice</u>

Etudier et représenter la fonction $\tan$



Cas d'égalité

Proposition - Cas d'égalité de tangentes

Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\tan\theta = \tan\theta' \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[\pi]$$

⇒Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

A savoir ! ! !

Très important ! A connaître par coeur, absolument ! Il peut être bon d'avoir un moyen mnémotechnique auprès de soi. . .

Proposition. Formules fondamentales

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \text{ où } \cos^2\theta = (\cos\theta)^2$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Piste pour retenir. . .

Trucs et astuces. Exploiter les symétries du calcul

Une piste pour retrouver la formule $\cos(a+b)$.
Nous savons qu'il existe une relation, mais laquelle. Notons $\varphi(a,b)=\cos(a+b)$.
La relation doit vérifier :

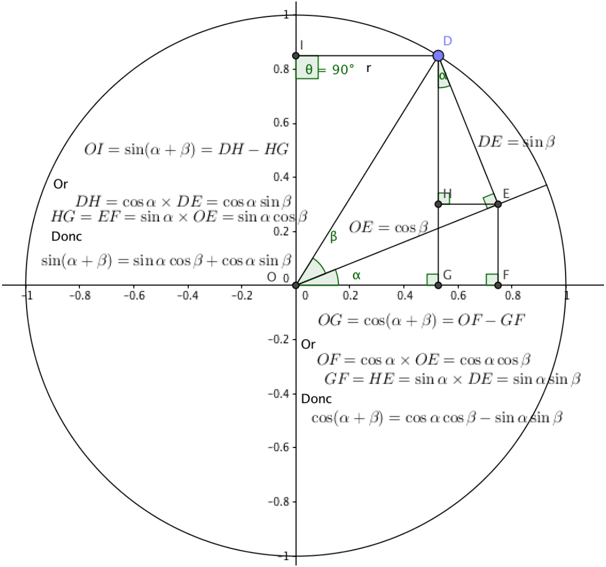
- $\varphi(b,a)=\varphi(a,b)$, cela ne peut donc pas être $\varphi(a,b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$.
- $\varphi(-a,-b)=\varphi(a,b)$, cela ne peut donc pas être $\varphi(a,b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$.
- $\varphi(a,-a)=\cos(0)=1$, cela ne peut donc pas être $\varphi(a,b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$, dans ce cas $\varphi(a,-a)=\cos^2 a-\sin^2 a\neq 1$ (pour la plupart des a)

Démonstration

Démonstration

Démonstration

Démonstration



Autre démonstration

<u>Exercice</u>

On peut aussi exploiter les équations différentielles.

On note $f : x \mapsto \cos(a+x)$. Montrer que f est solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} y''+y & = & 0 \\ y(0) & = & \cos a \\ y'(0) & = & -\sin(a) \end{cases}$.

En déduire une expression de f.

Autre démonstration

Exercice

On peut aussi exploiter les équations différentielles.

On note $f : x \mapsto \cos(a+x)$. Montrer que f est solution du problème de Cauchy : $\left\{\begin{array}{rcl} y''+y & = & 0 \\ y(0) & = & \cos a \\ y'(0) & = & -\sin(a) \end{array}\right.$.

En déduire une expression de f.

Nouveau moyen mnemotechnique

Trucs et astuces. Combinaison linéaire en $\cos x$ et $\sin x$

$x \mapsto \cos(a+x)$ est une fonction, combinaison linéaire de $\cos x$ et $\sin x$.

Il existe A, B indépendant de x tel que $\cos(a+x) = A\cos x + B\sin x$.

En particulier pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$: $\cos a = A \times 1 + B \times 0$ et $\cos(a+\frac{\pi}{2}) = -\sin a = A \times 0 + B \times 1$.

Donc pour tout $a, x \in \mathbb{R}$: $\cos(a+x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x$.

Autre démonstration

Exercice

On peut aussi exploiter les équations différentielles.

On note $f : x \mapsto \cos(a+x)$. Montrer que f est solution du problème de Cauchy : $\left\{\begin{array}{rcl} y''+y & = & 0 \\ y(0) & = & \cos a \\ y'(0) & = & -\sin(a) \end{array}\right.$.

En déduire une expression de f.

Nouveau moyen mnemotechnique

Trucs et astuces. Combinaison linéaire en $\cos x$ et $\sin x$

$x \mapsto \sin(a+x)$ est une fonction, combinaison linéaire de $\cos x$ et $\sin x$.

Il existe C, D indépendant de x tel que $\sin(a+x) = C\cos x + D\sin x$.

En particulier pour $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$: $\sin a = C\times 1 + D\times 0$ et $\sin(a+\frac{\pi}{2}) = \cos a = C\times 0 + D\times 1$.

Donc pour tout $a, x \in \mathbb{R}$: $\sin(a+x) = \sin a\cos x + \cos a\sin x$.

Formules essentielles

Savoir les déduire ou les retrouver.

Proposition - Formules fondamentales (bis)

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \qquad = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Formules essentielles

Savoir les déduire ou les retrouver.

Proposition - Formules fondamentales (bis)

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \qquad = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Exercice

Démontrer ces formules

⇒**Construction historique de la trigonométrie**

⇒ **Formule de Regiomontanus**

Formules essentielles

Proposition - Transformation de produit en somme

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big)$$

Formules essentielles

Proposition - Transformation de produit en somme

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\big)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\big)$$

Exercice

Comment exploiter les symétries du calcul pour « deviner »les égalités

Formules essentielles

Proposition - Transformation de produit en somme

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big)$$

Exercice

Comment exploiter les symétries du calcul pour « deviner »les égalités

Exercice

Démontrer ces formules

Notation exponentielle

Remarque Notation exponentielle.
Avec les notations exponentielles, le résultats sera plus immédiat (on pourra le trouver dans le sens direct).
On notera en particulier les calculs parallèle sur le $\cos$ (partie réelle) et le $\sin$ (partie imaginaire)

Et toujours des propriétés

Proposition - Transformation de somme en produit

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Et toujours des propriétés

Proposition - Transformation de somme en produit

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

<u>Exercice</u>

Démontrer ces formules

Application

Attention. Remarque

Il n'y a pas de formule générale pour transformer $\cos p \pm \sin q$.
Sauf à exploiter $\sin q = \cos(\frac{\pi}{2} - q)\dots$

Application

Attention. Remarque

Il n'y a pas de formule générale pour transformer $\cos p \pm \sin q$.
Sauf à exploiter $\sin q = \cos(\frac{\pi}{2} - q)\dots$

Exemple Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos kt$ pour $t \in]0, \pi]$

On commencera par multiplier par $2\sin\frac{t}{2}$

⇒Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

Tangente de l'angle moitié

Proposition - Utilisation de la tangente de l'angle moitié

On note $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$. Alors :

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

Tangente de l'angle moitié

Proposition - Utilisation de la tangente de l'angle moitié

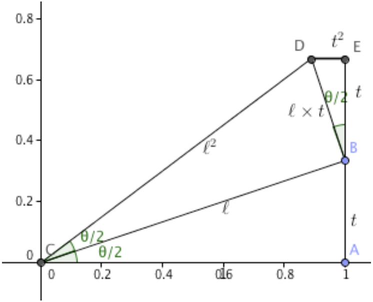
On note $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$. Alors :

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

Remarque Calcul intégral

Démonstration

Démonstration



Auto-contrôle et usage de e^{it}

Remarque Trucs pour ne pas écrire de bêtises...

Auto-contrôle et usage de e^{it}

Remarque Trucs pour ne pas écrire de bêtises...

<u>Exercice</u>

Exemple d'emploi des notations exponentielles.

Notons α l'argument du complexe $z = 1 + it$.

Calculer z^2, quel est l'argument du complexe z^2 ? En déduire les relations recherchées ?

Sauriez-vous en déduire l'expression de $\cos\theta$ en fonction de $r = \tan\frac{\theta}{3}$?

Transformation physicienne (changement de phase)

Savoir-faire. Méthode pour transformer $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\phi)$

On écrit $a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\right)$

Comme $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Avec $A = \sqrt{a^2+b^2}$:

$$a\cos t + b\sin t = A\left(\cos\phi\cos t + \sin\phi\sin t\right) = A\cos(t-\phi)$$

La fonction $s : t \mapsto a\cos t + b\sin t$ représente donc un signal sinusoïdal d'amplitude A de phase initiale $-\phi$(instant $t=0$) .

Transformation physicienne (changement de phase)

Savoir-faire. Méthode pour transformer $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\phi)$

On écrit $a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\right)$

Comme $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Avec $A = \sqrt{a^2+b^2}$:

$$a\cos t + b\sin t = A\Big(\cos\phi\cos t + \sin\phi\sin t\Big) = A\cos(t-\phi)$$

La fonction $s : t \mapsto a\cos t + b\sin t$ représente donc un signal sinusoïdal d'amplitude A de phase initiale $-\phi$(instant $t=0$) .

Exercice

Factoriser $\sin\theta + \cos\theta$, $\sqrt{3}\cos x - \sin x$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction historique de la trigonométrie

$\Rightarrow$ Formule de Regiomontanus

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction historique de la trigonométrie

- Définition bancale de $\sin$ et $\cos$ (à partir d'un triangle rectangle). Puis $\tan$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction historique de la trigonométrie

- Définition bancale de $\sin$ et $\cos$ (à partir d'un triangle rectangle). Puis $\tan$
- Définition naturelle de la mesure d'angle en radian

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

- Définition bancale de $\sin$ et $\cos$ (à partir d'un triangle rectangle). Puis $\tan$
- Définition naturelle de la mesure d'angle en radian
- Inégalité fondamentale : $\sin x \leqslant x \leqslant \frac{\sin x}{\cos x}$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction historique de la trigonométrie

- Définition bancale de $\sin$ et $\cos$ (à partir d'un triangle rectangle). Puis $\tan$
- Définition naturelle de la mesure d'angle en radian
- Inégalité fondamentale : $\sin x \leqslant x \leqslant \frac{\sin x}{\cos x}$
- Extension de $\cos$ et $\sin$ pour des angles non compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

- Définition bancale de $\sin$ et $\cos$ (à partir d'un triangle rectangle). Puis $\tan$
- Définition naturelle de la mesure d'angle en radian
- Inégalité fondamentale : $\sin x \leqslant x \leqslant \frac{\sin x}{\cos x}$
- Extension de $\cos$ et $\sin$ pour des angles non compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$
- Propriétés simples de symétrie et parité (à savoir retrouver)

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

- Base : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

- Base : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
- $\tan(a+b)$, $\cos 2\theta \ldots$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

- Base : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
- $\tan(a+b)$, $\cos 2\theta\dots$
- Connaitre l'usage de la tangente moitié : $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

- Base : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
- $\tan(a+b)$, $\cos 2\theta \ldots$
- Connaitre l'usage de la tangente moitié : $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$
- Savoir effectuer la transformation du physicien : $A\cos t + B\sin t = \sqrt{A^2+B^2}\cos(t-\varphi)\ldots$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 3
  4. Trigonométrie réciproque
- Exercice n° 29 & 30