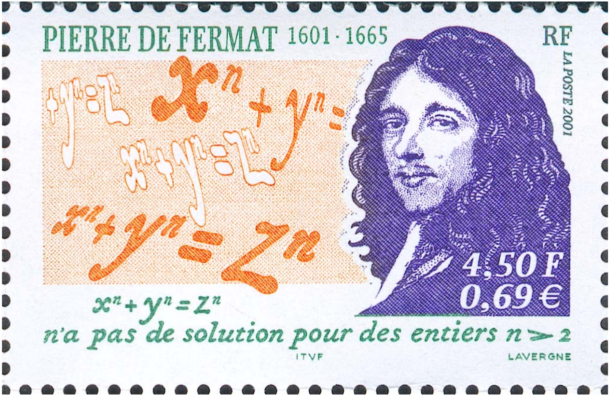

Leçon 8 - Trigonométrie

14 septembre 2024

$\Rightarrow$ **Etudier les fonctions réciproques de** $\cos$, $\sin$ **et** $\tan$

⇒ Etudier les fonctions réciproques de $\cos$, $\sin$ et $\tan$

Défintion

Définition - Arcsinus

Pour tout $x \in [-1, 1]$ il existe un unique $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vérifiant $x = \sin \theta$. Ce réel θ est appelé arcsinus de x et noté $\arcsin x$ On a donc :

$$\theta = \arcsin x \Leftrightarrow \left(\sin \theta = x \text{ et } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \right)$$

Défintion

Définition - Arcsinus

Pour tout $x \in [-1,1]$ il existe un unique $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vérifiant $x = \sin\theta$. Ce réel θ est appelé arcsinus de x et noté $\arcsin x$ On a donc :

$$\theta = \arcsin x \Leftrightarrow \left(\sin\theta = x \text{ et } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right)$$

Attention. Intervalle d'arrivée

De même qu'il a été choisi de prendre l'unique racine positive de a, lorsqu'on écrit $\sqrt{a}$ (et non $-\sqrt{a}$ qui vérifie également $(-\sqrt{a})^2 = a$) ; on choisit ici un résultat dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, il faut donc penser à ajouter un angle...

$$\sin\theta = x \Longleftrightarrow \theta \equiv \arcsin(x)[2\pi] \text{ ou } \theta \equiv \pi - \arcsin(x)[2\pi]$$

Valeurs remarquables

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$						

Valeurs remarquables

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Valeurs remarquables

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Exercice

Calculer $\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3}), \arcsin(\sin\frac{23\pi}{6})$.

Compositions

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et $\arcsin$

On a :

$$\forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \arcsin(\sin\theta) = \theta$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin x) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Compositions

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et $\arcsin$

On a :

$$\forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \arcsin(\sin \theta) = \theta$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin x) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Démonstration

⇒ Etudier les fonctions réciproques de $\cos$, $\sin$ et $\tan$

Définition

Définition - Arccosinus

Pour tout $x \in [-1,1]$ il existe un unique $\theta \in [0,\pi]$ vérifiant $x = \cos\theta$. Ce réel θ est appelé arccosinus de x et noté $\arccos x$

On a donc :

$$\theta = \arccos x \Leftrightarrow \left(\cos\theta = x \text{ et } \theta \in [0,\pi]\right)$$

Définition

Définition - Arccosinus

Pour tout $x \in [-1,1]$ il existe un unique $\theta \in [0,\pi]$ vérifiant $x = \cos\theta$. Ce réel θ est appelé arccosinus de x et noté $\arccos x$

On a donc :

$$\theta = \arccos x \Leftrightarrow \left(\cos\theta = x \text{ et } \theta \in [0,\pi]\right)$$

Attention. Intervalle d'arrivée

Comme précédemment :

$$\cos\theta = x \Longleftrightarrow \theta \equiv \arccos(x)[2\pi] \text{ ou } \theta \equiv -\arccos(x)[2\pi]$$

Valeurs remarquables

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$						

Valeurs remarquables

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Exercice Calculer $\arccos(\cos\frac{4\pi}{3}), \arccos(\cos\frac{25\pi}{6})$.

Composition

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et $\arccos$

On a :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \arccos(\cos\theta) = \theta$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos x) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Composition

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et arccos

On a :

$$\forall \theta \in [0,\pi], \quad \arccos(\cos\theta) = \theta$$

$$\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arccos x) = x$$

$$\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

Exercice

Faire la démonstration

$\Rightarrow$ **Etudier les fonctions réciproques de $\cos$, $\sin$ et $\tan$**

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométriques

3. Formules trigonométriques

4. Trigonométrie réciproque
   - 4.1. Arcsinus
   - 4.2. Arccosinus
   - 4.3. Arctangente

Définition

Définition - Arctangente

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant $x = \tan\theta$. Ce réel θ est appelé arctangente de x et noté $\arctan x$ On a donc :

$$\theta = \arctan x \Leftrightarrow \left(\tan\theta = x \text{ et } \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right)$$

Valeurs remarquables

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$				

Valeurs remarquables

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$

Composition

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et $\arctan$

On a :

$$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctan(\tan\theta) = \theta$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Composition

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et arctan

On a :

$$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \arctan(\tan\theta) = \theta$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Démonstration

Exploitation des nombres complexes

Proposition - Relation complexe

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\arg(1 + ix) = \arctan(x)$

Exploitation des nombres complexes

Proposition - Relation complexe

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\arg(1+ix) = \arctan(x)$

Démonstration

Exploitation des nombres complexes

Proposition - Relation complexe

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\arg(1 + ix) = \arctan(x)$

Démonstration

Remarque Aspect analytique

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Etudier les fonctions réciproques de $\cos$, $\sin$ et $\tan$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Etudier les fonctions réciproques de $\cos$, $\sin$ et $\tan$

- $\arcsin$. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Etudier les fonctions réciproques de $\cos$, $\sin$ et $\tan$

- $\arcsin$. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!
- $\arccos$. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[0, \frac{\pi}{2}]$!

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Etudier les fonctions réciproques de $\cos$, $\sin$ et $\tan$

- $\arcsin$. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!
- $\arccos$. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[0, \frac{\pi}{2}]$!
- Valeurs remarquables à connaître

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Etudier les fonctions réciproques de $\cos$, $\sin$ et $\tan$

- $\arcsin$. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!
- $\arccos$. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[0, \frac{\pi}{2}]$!
- Valeurs remarquables à connaître
- Quelques formules : $\cos(\arcsin(x)) = \dots$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Etudier les fonctions réciproques de $\cos$, $\sin$ et $\tan$

- $\arcsin$. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!
- $\arccos$. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[0, \frac{\pi}{2}]$!
- Valeurs remarquables à connaître
- Quelques formules : $\cos(\arcsin(x)) = \ldots$
- $\arctan$ est défini sur $\mathbb{R}$ entier mais à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Etudier les fonctions réciproques de $\cos$, $\sin$ et $\tan$

- $\arcsin$. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!
- $\arccos$. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[0, \frac{\pi}{2}]$!
- Valeurs remarquables à connaître
- Quelques formules : $\cos(\arcsin(x)) = \dots$
- $\arctan$ est défini sur $\mathbb{R}$ entier mais à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- Valeurs remarquables à connaître

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Etudier les fonctions réciproques de $\cos$, $\sin$ et $\tan$

- $\arcsin$. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!
- $\arccos$. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[0, \frac{\pi}{2}]$!
- Valeurs remarquables à connaître
- Quelques formules : $\cos(\arcsin(x)) = \dots$
- $\arctan$ est défini sur $\mathbb{R}$ entier mais à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- Valeurs remarquables à connaître
- Quelques formules : $\cos(\arctan(x)) = \dots$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Etudier les fonctions réciproques de $\cos$, $\sin$ et $\tan$

- $\arcsin$. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!
- $\arccos$. Attention, il faut restreindre l'intervalle d'étude : sur $[0, \frac{\pi}{2}]$!
- Valeurs remarquables à connaître
- Quelques formules : $\cos(\arcsin(x)) = \ldots$
- $\arctan$ est défini sur $\mathbb{R}$ entier mais à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- Valeurs remarquables à connaître
- Quelques formules : $\cos(\arctan(x)) = \ldots$
- On a $\arctan x = \arg(1 + ix)$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Etudier les fonctions réciproques de $\cos$, $\sin$ et $\tan$

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 10. Structure logique
- Exercice n° 39 & 40
- TD : 8h-10h : 34, 31a (T_n), 33b, 45, 41, 43
  10h-12h : 37, 31b (U_n), 33a, 38, 42, 45