

Leçon 9 - Structure logique



1. Cours mathématiques

- 1.1. L'énigme mathématique
- 1.2. Structure de cours

2. Quantificateurs et notations ensemblistes

- 2.1. Appartenance, éléments
- 2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble
- 2.3. Utilisation de quantificateurs
- 2.4. Parties d'un ensemble
- 2.5. Produit cartésien
- 2.6. Opérations sur les ensembles

Leçon 9 - Structure logique

ensemble et raisonnement

mathématiques

1.1. L'énigme mathématiqu

1.2. Stru

Quantificateurs notations

ensemblistes

.1. Appartenance, éléments

2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble

2.3. Utilisation de

antificateurs

Produit cartésien

5. Produit cartésier

2.6. Opérations sur le ensembles

1. Cours mathématiques

- 1.1. L'énigme mathématique
- 1.2. Structure de cours

2. Quantificateurs et notations ensemblistes

- 2.1. Appartenance, éléments
- 2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble
- 2.3. Utilisation de quantificateurs
- 2.4. Parties d'un ensemble
- 2.5. Produit cartésien
- 2.6. Opérations sur les ensembles

1 Causa

mathématiques

1.1. L'énigme mathématique

1.2. Structure de cours

notations

ensemblistes

1. Appartenance, éléments

'écrire un ensemble

2.3. Utilisation de

l. Parties d'un ensemble

. Produit cartésien

2.6. Opérations sur le ensembles

Problème

Problème - Déraisonnable efficacité des mathématiques

Leçon 9 - Structure logique

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

I. Cours

mathématiques

- 1.1. L'énigme mathématique
- 1.2. Structure de cou

notations

- 2 1 Annortananna álámanta
- 2.2. Différentes manières
- .3. Utilisation de
- 4 Davis d'un accepte
- . Produit cartésien
- 2.6. Opérations sur les ensembles

Problème

Problème - Déraisonnable efficacité des mathématiques

Problème - Un simple langage? Ou plus

Leçon 9 - Structure logique

ensemble et raisonnement

1. Cours

mathématiques

1.1. L'énigme mathématique

1.2. Structure d

2. Quantificateurs e

ensemblistes

2.1. Appartenance, éléments

2.2. Différentes manières

3. I Itilication da

3. Utilisation de

I. Parties d'un ensemble

5. Produit cartésien

i. Opérations sur le

1. Cours

mathematiques

1.1. L'énigme mathématique

1.1. Lenignie matriematiqu

1.2. Structure de c

notations

ensemblistes

2.1. Appartenance, éléments

2.2. Différentes manières

2.3. I Itilication da

.3. Utilisation de

Parties d'un ensemble

Produit cartésien

Produit cartésien

Opérations sur les ensembles

Problème - Déraisonnable efficacité des mathématiques

Problème - Un simple langage? Ou plus

Problème -Inspiration

1. Cours mathématiques

- 1.1. L'énigme mathématique
- 1.2. Structure de cours

2. Quantificateurs et notations ensemblistes

- 2.1. Appartenance, éléments
- 2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble
- 2.3. Utilisation de quantificateurs
- 2.4. Parties d'un ensemble
- 2.5. Produit cartésien
- 2.6. Opérations sur les ensembles

1. Cours

mamemanques

1.2. Structure de cou

Quantificateur notations

ensemblistes

.1. Appartenance, éléments

2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble

2.3. Utilisation de

I. Parties d'un ensemble

. Produit cartésien

2.6. Opérations sur les ensembles

Construction

Analyse - Formalisation

Leçon 9 - Structure logique

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

Cours mathémati

1.2. Structure de cours

Quantificateur notations

ensemblistes

- Appartenance, elements
 Différentes manières
- l'écrire un ensemble
- 2.3. Utilisation de
- 4. Parties d'un ensemble
- Produit cartésier
- 2.6. Opérations sur les ensembles

Construction

Analyse - Formalisation

1. Quelques axiomes

Leçon 9 - Structure logique

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

- 1. Cours
- mathématique
- 1.1. L'énigme mathématique
- 1.2. Structure de cours
- notations
- 2.1. Appartenance, éléments
- 2.2. Différentes manières
- 2.3. Utilisation de
- .4. Parties d'un ensemble
- . Produit cartésien
- 2.6. Opérations sur les ensembles

1.1 L'ániamo mathámaticus

1.2. Structure de cours

notations ensemblistes

2.1 Annartenance éléments

2.2. Différentes manières

2.3. Utilisation de

 Utilisation de iantificateurs

.4. Parties d'un ensemble

. Produit cartésien

2.6. Opérations sur le ensembles

- 1. Quelques axiomes
- 2. Idées, images mentales, heuristiques, mots

1.2. Structure de cours

notations

ensemblistes

2.1. Appartenance, éléments

2.2. Différentes manières

2.3. Utilisation de

.4. Parties d'un ensemble

i. Produit cartésien

2.6. Opérations sur le ensembles

- 1. Quelques axiomes
- 2. Idées, images mentales, heuristiques, mots
- 3. Formalisation (=légalisation) : définition

Cours mathématique

matnematiqu

1.1. Certigine mathematique

2. Quantificateurs e

ensembliste

- 1. Appartenance, éléments
- 2.2. Différentes manièr d'écrire un ensemble
- 2.3. Utilisation de
- 4. Parties d'un ensemble
- 5. Produit cartésie
- 2.6. Opérations sur le ensembles

- Quelques axiomes
- 2. Idées, images mentales, heuristiques, mots
- 3. Formalisation (=légalisation) : définition
- 4. Manipulations : théorèmes et propositions

mathématique

1.2. Structure de cours

2. Quantificateurs e

ensemblistes

2.1. Appartenance, éléments

2.2. Différentes manières

a ecrire un enserr 2.3. Utilisation de

2.3. Utilisation de puantificateurs

4. Parties d'un ensemble

. Produit cartésien

2.6. Opérations sur le ensembles

- Quelques axiomes
- 2. Idées, images mentales, heuristiques, mots
- 3. Formalisation (=légalisation) : définition
- 4. Manipulations : théorèmes et propositions
- Démonstrations

- 1. Quelques axiomes
- 2. Idées, images mentales, heuristiques, mots
- 3. Formalisation (=légalisation) : définition
- Manipulations : théorèmes et propositions
- Démonstrations
- 6. Manipulations: exercices, colles, devoirs...

Analyse - Formalisation

- 1. Quelques axiomes
- 2. Idées, images mentales, heuristiques, mots
- 3. Formalisation (=légalisation) : définition
- Manipulations : théorèmes et propositions
- Démonstrations
- 6. Manipulations: exercices, colles, devoirs...

Exercice Quelle proportion pour ces étapes au lycée?

1. Cours mathématiques

- 1.1. L'énigme mathématique
- 1.2. Structure de cours

Quantificateurs et notations ensemblistes.

- 2.1. Appartenance, éléments

- 2.4. Parties d'un ensemble

2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble

2.3. Utilisation de

.4. Parties d'un ensemble

Produit cartésier

2.6. Opérations sur les

Définition - Ensemble

Un ensemble est une "collection" d'objets appelés *éléments*. On introduit une relation particulière entre un élément x et un ensemble E, la *relation d'appartenance* :

 $x \in E$, ce qui se lit "x appartient à E" ou "x est un élément de E.

La négation de la relation d'appartenance s'écrit $x \notin E$, ce qui signifie que $x \in E$ est faux.

2.3. Utilisation d

2.4. Parties d'un ensembl

5. Produit cartésier

.6. Opérations sur les

Définition - Ensemble

Un ensemble est une "collection" d'objets appelés *éléments*. On introduit une relation particulière entre un élément x et un ensemble E, la *relation d'appartenance* :

 $x \in E$, ce qui se lit "x appartient à E" ou "x est un élément de E.

La négation de la relation d'appartenance s'écrit $x \notin E$, ce qui signifie que $x \in E$ est faux.

Proposition - Propriété essentielle

Un ensemble est défini dés que pour tout objet x, on **peut dire** si x est, ou n'est pas, un élément de cet ensemble.

2.2

ensemblistes

2.1. Appartenance, éléments

2.2. Différentes manières

l'écrire un ensemble

3. Utilisation de

4. Parties d'un ensemble

5. Produit cartésien

2.6. Opérations sur le ensembles

Définition - Formalisation

On formalise les idées et objets pour signifier un certain type d'appartenance par :

 $\forall x$, qui se lit « quel que soit x » ou pour « pour tout x »,

 $\exists x$ se lit « il existe x »,

 $\exists ! x$ se lit « il existe un unique x »,

2.1. Appartenance, éléments

Définition - Formalisation

On formalise les idées et objets pour signifier un certain type d'appartenance par :

, qui se lit « quel que soit x » ou pour « pour tout x »,

 $\exists x$ se lit « il existe x ».

 $\exists !x$ se lit « il existe un unique x »,

Exemple Notation et lecture

2. Quantificateurs et notations

ensemblistes

2.1. Appartenance, éléments

2.2. Différentes manière d'écrire un ensemble

2.3. Utilisation de

2.3. Utilisation de quantificateurs

l. Parties d'un ensemble

. Produit cartésien

2.6. Opérations sur le ensembles

Définition - Formalisation

On formalise les idées et objets pour signifier un certain type d'appartenance par :

 $\forall x$, qui se lit « quel que soit x » ou pour « pour tout x »,

 $\exists x$ se lit « il existe x »,

 $\exists ! x$ se lit « il existe un unique x »,

Exemple Notation et lecture

Exemple Ensembles classiques

On formalise les idées et objets pour signifier un certain type d'appartenance par :

 $\forall x$, qui se lit « quel que soit x » ou pour « pour tout x »,

 $\exists x$ se lit « il existe x ».

 $\exists ! x$ se lit « il existe un unique x »,

Exemple Notation et lecture

Exemple Ensembles classiques

Exercice Que pensez-vous de l'affirmation suivante?

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1 \text{ mais } \exists x \in \mathbb{C} \mid x^2 = -1$$

2.1. Appartenance, éléments

« Petite »règles

Remarque Convention de notation

Leçon 9 - Structure logique

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements

Cours mathématiques

- 1.1 l'éniame mathématic
- 1.2. Structure de cours

notations ensemblistes

- 2.1. Appartenance, éléments
- 2.2. Différentes manières
- 2.3. Utilisation de
- .4. Parties d'un ensemble
- 5. Produit cartésie
- 2.6. Opérations sur les

Remarque Convention de notation

Proposition - Règle de la théorie des ensembles

Quelques régles régissent les ensembles (dont certaines sont des axiomes de la théorie des ensembles) :

- régle n°1 : Deux ensembles qui ont les mêmes éléments sont égaux.
- régle n°2 : Il existe un ensemble qui n'admet aucun élément, soit

$$\exists E \mid \forall x, x \notin E$$

D'après la règle $n^{\circ}1$, cet ensemble est unique, on l'appelle ensemble vide et on le note \emptyset .

1. Cours mathématiques

- 1.1. L'énigme mathématique
- 1.2. Structure de cours

2. Quantificateurs et notations ensemblistes

- 2.1. Appartenance, éléments
- 2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble
- 2.3. Utilisation de quantificateurs
- 2.4. Parties d'un ensemble
- 2.5. Produit cartésien
- 2.6. Opérations sur les ensembles

1. Cours

mathématique

1.1. L'énigme mathématique

1.2. Structure de d

notations

nsemblistes

Appartenance, éléments

- 2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble
- 2.3. Utilisation de
 - I. Parties d'un ensemble
 - . Produit cartésien
- 2.6. Opérations sur les ensembles

1.1 L'éniame mathématique

1.2. Structure de cours

notations ensemblistes

2.1 Appartanance élémente

2.2. Différentes manières

2.3. Utilisation de

uantificateurs

5. Produit cartésien

6. Opérations sur les

Définition - Singleton, paire

Soit a un objet mathématique. L'ensemble dont a est l'unique élément s'appelle un singleton, on le note $\{a\}$.

Soient a et b deux objets distincts. L'ensemble dont ce sont les deux seuls éléments s'appelle la paire formée de a et b. On le note $\{a,b\}$

Définition - Singleton, paire

Soit α un objet mathématique. L'ensemble dont α est l'unique élément s'appelle un singleton, on le note $\{a\}$.

Soient a et b deux objets distincts. L'ensemble dont ce sont les deux seuls éléments s'appelle la paire formée de a et b. On le note $\{a,b\}$

D'aprés la régle n°1, $\{a,b\} = \{b,a\}$, qu'il ne faut pas confondre avec le couple (a,b).

Si a = b. $\{a, b\} = \{a\}$.

1.2. Structure de cours

2. Quantificateurs et notations

ensemblistes

2.1. Appartenance, elements
2.2. Différentes manières

d'écrire un ensemble

2.3. Utilisation de

4. Parties d'un ensemble

. Produit cartésien

.6. Opérations sur les

Définition - en extension

On dit que l'on définit un ensemble en extension lorsque l'on énumère ses éléments :

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Cette notation sous-entend que l'on sait interpréter les ...intermédiaires.

d'écrire un ensemble

2.3. Utilisation de

.4. Parties d'un ensemble

i. Produit cartésien

2.6. Opérations sur les ensembles

Définition - en extension

On dit que l'on définit un ensemble en extension lorsque l'on énumère ses éléments :

$$\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$$

Cette notation sous-entend que l'on sait interpréter les ...intermédiaires.

Exemple Ensemble défini en extension

quantificateurs

l. Parties d'un ensembl

. Produit cartésien

2.6. Opérations sur le ensembles

Définition - en extension

On dit que l'on définit un ensemble en extension lorsque l'on énumère ses éléments :

$$\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$$

Cette notation sous-entend que l'on sait interpréter les ...intermédiaires.

Exemple Ensemble défini en extension

Exercice

$$\{1,2,3,\ldots\} =$$
, $\{0,1,-1,2,-2,\ldots\} =$

.4. Parties d'un ensemble

i. Produit cartésien

2.6. Opérations sur le ensembles

Définition - en extension

On dit que l'on définit un ensemble en extension lorsque l'on énumère ses éléments :

$$\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$$

Cette notation sous-entend que l'on sait interpréter les ...intermédiaires.

Exemple Ensemble défini en extension

Exercice

$$\{1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}, \quad \{0,1,-1,2,-2,\ldots\} = \mathbb{Z}$$

uantificateurs

i. Parties d'un ensembl 5 Produit cartésien

i. Opérations sur les

Définition - en compréhension

On peut définir un ensemble en compréhension, c'est à dire par l'intermédiaire d'une propriété qui le caractérise : soit E un ensemble et P(x) une propriété dépendant d'un objet x de E, alors

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

est l'ensemble des x éléments de E tels que P(x) (sous-entendu "tels que P(x) soit vraie").

Définition - en compréhension

On peut définir un ensemble en compréhension, c'est à dire par l'intermédiaire d'une propriété qui le caractérise : soit E un ensemble et P(x) une propriété dépendant d'un objet x de E, alors

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

est l'ensemble des x éléments de E tels que P(x) (sous-entendu "tels que P(x) soit vraie").

Exercice

$${x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 = 0} =$$

$$\{x \in \mathbb{N} | x + 1 = 0\} =$$

$$\{x \in \mathbb{C} | x^2 + 1 = 0\} =$$

$$\{x\in\mathbb{Z}|x+1=0\}=$$

$${a^2 + 2 | a \in [1, 5]} =$$

4. Parties d'un ensemble

Produit cartésien

2.6. Opérations sur le ensembles

Définition - en compréhension

On peut définir un ensemble en compréhension, c'est à dire par l'intermédiaire d'une propriété qui le caractérise : soit E un ensemble et P(x) une propriété dépendant d'un objet x de E, alors

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

est l'ensemble des x éléments de E tels que P(x) (sous-entendu "tels que P(x) soit vraie").

Exercice

$$\{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$$

$$\{x\in \mathbb{N}|x+1=0\}=\emptyset$$

$${x \in \mathbb{C} | x^2 + 1 = 0} = {-i, i}$$

$${x \in \mathbb{Z} | x + 1 = 0} = {-1}$$

$$\{a^2 + 2 | a \in [1,5]\} = \{3,6,11,18,27\}$$

quantificateurs 2.4. Parties d'un ensemble

.5. Produit cartésien

.6. Opérations sur le

Définition - Intervalles de ℝ

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, a < b, on définit les *intervalles* de \mathbb{R} , ce sont les ensembles suivants :

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} \quad]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} \quad [a,b[,]a, \\]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\} \quad]-\infty,a[=\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \quad [b,+\infty[,]b,$$

Les intervalles du type [a,b], $]-\infty,a]$, $[b,+\infty[$ sont des intervalles fermés

Les intervalles du type $]a,b[,]-\infty,a[,]b,+\infty[$ sont des intervalles ouverts

Les intervalles du type [a,b[ou]a,b] sont dits semi-ouverts (ou semi-fermés)

[a,b] s'appelle un segment.

Exemples d'intervalle

Exemple Autres exemples

Leçon 9 - Structure logique

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

mathématiques

- 1.1. L'éniame mathématiq
- 1.2. Structure de cours

notations

- 21 Annartananna álámanta
- 2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble
- .3. Utilisation de
- 4. Parties d'un ensemble
- 5. Produit cartésie
- 2.6. Opérations sur les

Exemples d'intervalle

Exemple Autres exemples

Savoir-faire. Montrer que I est un intervalle de $\mathbb R$

Il suffit de montrer que pour tout $a,b\in I$,

 $[a,b] := \{t \in \mathbb{R} \mid a \le t \le b\} \subset I$

Leçon 9 - Structure logique

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements

- 1. Cours
- mainemaiiques
- 1.1. Lenignie matriematiqu
- 2. Quantificateurs et
- ensemblistes
- 2.1. Appartenance, éléments
- 2.2. Différentes manières
- 2.3. Utilisation de
- .4. Parties d'un ensemble
- . Produit cartésien
- 2.6. Opérations sur les

Exemple Autres exemples

Savoir-faire. Montrer que I est un intervalle de $\mathbb R$

Il suffit de montrer que pour tout $a, b \in I$,

 $[a,b] := \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq t \leq b\} \subset I$

Exercice

Montrer que $J = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x + e^x \le 10\}$ est un intervalle.

1. Cours mathématiques

- 1.1. L'énigme mathématique
- 1.2. Structure de cours

2. Quantificateurs et notations ensemblistes

- 2.1. Appartenance, éléments
- 2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble

2.3. Utilisation de quantificateurs

- 2.4. Parties d'un ensemble
- 2.5. Produit cartésien
- 2.6. Opérations sur les ensembles

1. Cours

mathématique

...aaromaaqaoo

1.2. Structure

Quantificateu notations

ensemblistes

Appartenance, éléments

..2. Différentes manières l'écrire un ensemble

2.3. Utilisation de

Parties d'un ensemble

Produit cartésie

 2.6. Opérations sur les ensembles

1.1. L'énigme mathématique

Quantificateurs et notations

ensemblistes

Appartenance, elements
 Différentes manières

2.3. Utilisation de

4. Parties d'un ensemble

5. Produit cartésie

6. Opérations sur les

Heuristique. Quantificateurs nécessaires

En mathématiques classiques, deux quantificateurs sont essentiels :

▶ ∀ , lu « pour tout » ou « quel que soit », pour désigner qu'une propriété a un certain degré d'universalité :
∀ x, 𝒫(x). La propriété 𝒫 est donc toujours vraie, puisque vraie pour tout point.

 $\forall \ x \in E, x \in F$. Tous les éléments de E sont dans F. Dans sa totalité : $E \subset F$.

► ∃ lu « il existe » est la négation du précédent.

Parties d'un ensemble

. Produit cartésien

.6. Opérations sur le

Heuristique. Quantificateurs nécessaires

En mathématiques classiques, deux quantificateurs sont essentiels :

▶ ∀ , lu « pour tout » ou « quel que soit », pour désigner qu'une propriété a un certain degré d'universalité :
∀ x, 𝒫(x). La propriété 𝒫 est donc toujours vraie, puisque vraie pour tout point.

 $\forall \ x \in E, x \in F$. Tous les éléments de E sont dans F. Dans sa totalité : $E \subset F$.

▶ ∃ lu « il existe » est la négation du précédent.

Remarque Existence ET unicité

Exemples de non commutativité

Analyse Non commutativité des connecteurs

Leçon 9 - Structure logique

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

Cours mathématiques

- natifornatiques
- 1.2. Structure de cours

notations

- 2.1. Appartenance, éléments
- 2.2. Différentes manières
- 2.3. Utilisation de
- Parties d'un ensemble
- 5. Produit cartésien
- 2.6. Opérations sur les ensembles

Exemples de non commutativité

Analyse Non commutativité des connecteurs **Exemple** Suite majorée, ou rien

Leçon 9 - Structure logique

ensemble et raisonnement

mathématiques

- 1.2. Structure de cours

notations

- 2.1 Annartananna álámanta
- 2.2. Différentes manières
- 2.3. Utilisation de
- Jantificateurs
- . C. Parties a un ensemble
- 2.6. Opérations sur les ensembles

Cours mothómaticu

mathématique

1.1. L'énigme mathématiqu

2. Quantificateurs et

nsemblistes

2.1. Appartenance, éléments

2.1. Appartenance, elements
2.2. Différentes manières

2.3. Utilisation de

.4. Parties d'un ensemble

. Produit cartésien

2.6. Opérations sur le ensembles

Analyse Non commutativité des connecteurs **Exemple** Suite majorée, ou rien

Exercice

On considère la suite de Fibonacci : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et $F_0 = F_1 = 1$.

Que pensez-vous des deux assertions suivantes :

- $\blacktriangleright \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \ \exists \ A,B \in \mathbb{R} \ \text{tels que} \ F_n = A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- $\blacktriangleright \ \exists \ A,B \in \mathbb{R} \ \text{tels que} \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \ F_n = A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

- 2.3 Utilisation de

Savoir-faire. Noter les dépendances

Si l'on écrit $\forall a, \exists b \dots$, le nombre b en second dépend grandement de a. On devrait noter b(a) ou b_a .

En revanche, si on écrit $\exists b$ tel que $\forall a \dots$, le nombre a ne dépend pas (plus particulièrement que les autres) de b. La notation a_b ou a(b) n'aurait pas d'intérêt.

De nombreux problèmes rencontrés en mathématiques en MPSI par les élèves reposent sur la non compréhension de cette (in)dépendance.

Une autre stratégie est de faire comme en Python, des indentations dans la démonstration. A chaque paramètre introduit, on fait apparaître un petit retrait dans l'écriture de la démonstration qui permet de voir comme ces paramètres dépendent mutuellement les uns des autres...

1. Cours mathématiques

- 1.1. L'énigme mathématique
- 1.2. Structure de cours

2. Quantificateurs et notations ensemblistes

- 2.1. Appartenance, éléments
- 2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble
- 2.3. Utilisation de quantificateurs

2.4. Parties d'un ensemble

- 2.5. Produit cartésien
- 2.6. Opérations sur les ensembles

1. Cours

mathématique

maniemanques

1.2. Structur

Quantificateu notations

ensemblistes

Appartenance, éléments

2.2. Différentes manières

3. Utilisation de

.3. Utilisation de uantificateurs

. Parties d'un ensemble

. Produit cartésien

2.6. Opérations sur le ensembles

1.1. L'énigme mathématiqu

2 Overstificate

notations ensemblistes

ensemblistes
2.1. Appartenance, éléments

2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble

3. Utilisation de

4. Parties d'un ensemble

5. Produit cartésien

2.6. Opérations sur le ensembles

Définition - Partie d'un ensemble (sous ensemble)

On dit qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E, ce que l'on note $F \subset E$, si tous les éléments de F sont éléments de E. On dit aussi que F est une partie ou un sous-ensemble de E.

On dit qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E, ce que l'on note $F \subset E$, si tous les éléments de F sont éléments de E. On dit aussi que F est une partie ou un sous-ensemble de E.

Savoir-faire. Montrer que $F \subset E$

Pour montrer que $F \subset E$, on démontre :

$$F \subset E \Leftrightarrow (\forall x, x \in F \Rightarrow x \in E).$$

4. Parties d'un ensemble

Produit cartésien

2.6. Opérations sur les

Proposition - Relation d'ordre

Quelques propriétés :

- $ightharpoonup \emptyset \subset E$ pour tout ensemble E
- $ightharpoonup E \subset E$ (l'inclusion est une relation réflexive)
- Si on a $E \subset F$ et $F \subset G$ alors on a aussi $E \subset G$ (l'inclusion est transitive)
- Si on a $E \subset F$ et $F \subset E$ alors E = F (l'inclusion est antisymétrique)

4. Parties d'un ensemble

. Produit cartésien

2.6. Opérations sur les ensembles

Proposition - Relation d'ordre

Quelques propriétés :

- \triangleright $\emptyset \subset E$ pour tout ensemble E
- $ightharpoonup E \subset E$ (l'inclusion est une relation réflexive)
- Si on a $E \subset F$ et $F \subset G$ alors on a aussi $E \subset G$ (l'inclusion est transitive)
- Si on a $E \subset F$ et $F \subset E$ alors E = F (l'inclusion est antisymétrique)

Savoir-faire. Prouver l'égalité de deux ensembles

La dernière propriété sert souvent à prouver l'égalité de deux ensembles.

Proposition - Relation d'ordre

Quelques propriétés :

- $ightharpoonup arphi \subset E$ pour tout ensemble E
- $ightharpoonup E \subset E$ (l'inclusion est une relation réflexive)
- Si on a $E \subset F$ et $F \subset G$ alors on a aussi $E \subset G$ (l'inclusion est transitive)
- Si on a $E \subset F$ et $F \subset E$ alors E = F (l'inclusion est antisymétrique)

Savoir-faire. Prouver l'égalité de deux ensembles

La dernière propriété sert souvent à prouver l'égalité de deux ensembles.

Exercice

A quelle condition a-t-on : $\{a\} \subset E$? $\{a,b\} \subset E$? $\{a\} \subset \{b\}$?

Ensemble des parties

Définition - Ensemble des partes de E

 $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E : $X \in \mathcal{P}(E)$ signifie donc à $X \subset E$.

Leçon 9 - Structure logique

ensemble et raisonnement

- Cours
 mathématic
- mathématique
- 1.1. L'énigme mathématiq
- 2. Quantificateurs et
- ensemblistes
- At Assets
- Appartenance, elements
 Différentes manières
- d'écrire un ensemble
- 2.3. Utilisation de
- 2.4. Parties d'un ensemble
 - 5. Produit cartésien
- 2.6. Opérations sur les ensembles

Ensemble des parties

Définition - Ensemble des partes de E

 $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E : $X \in \mathcal{P}(E)$ signifie donc à $X \subset E$.

Exemple Singleton...

Leçon 9 - Structure logique

⇒ Lien entre ensemble et raisonnement

- Cours
 mathématique
- mathématique
- 1.1. Lenigme mamemanqu
- 2. Quantificateurs et
 - ensemblistes
- ensemblistes
- 2.1. Appartenance, éléments 2.2 Différentes manières
- d'écrire un ensemble
- 2.3. Utilisation de
- 2.4. Parties d'un ensemble
 - Produit cartésien
- 2.6. Opérations sur les ensembles

1. Cours mathématiques

- 1.1. L'énigme mathématique
- 1.2. Structure de cours

2. Quantificateurs et notations ensemblistes

- 2.1. Appartenance, éléments
- 2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble
- 2.3. Utilisation de quantificateurs
- 2.4. Parties d'un ensemble

2.5. Produit cartésien

2.6. Opérations sur les ensembles

1. Cours

mathématique

1.1. L'énigme mathématique

1.2. Structure de d

Quantificateur notations

ensemblistes

- Appartenance, éléments
- 2.2. Différentes manières
- 2.3. Utilisation de
- 4. Parties d'un ensemble
- 5. Produit cartésier
- 2.6. Opérations sur le ensembles

Cours mathémat

1.1. L'énigme mathématique

1.2. Structure de cours

notations ensemblistes

2.1 Appartamenta álámenta

2.1. Appartenance, elements
2.2. Différentes manières

d'écrire un ensemble

2.3. Utilisation de quantificateurs

4. Parties d'un ensemble

5. Produit cartésier

2.6. Opérations sur les

Définition - Produit cartésien de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble dont les éléments sont les couples formés d'un élément de E et d'un élément de F (dans cet ordre) :

 $E \times F = \{x | \exists a \in E, \exists b \in F; x = (a, b)\} = \{(a, b) | a \in E \text{ et } b \in F\}.$

2. Quantificateurs et notations

ensemblistes

2.1. Appartenance, éléments

2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble

2.3. Utilisation de

4. Parties d'un ensemble

.5. Produit cartésie

2.6. Opérations sur les

Définition - Produit cartésien de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble dont les éléments sont les couples formés d'un élément de E et d'un élément de F (dans cet ordre) :

 $E \times F = \{x | \exists a \in E, \exists b \in F; x = (a, b)\} = \{(a, b) | a \in E \text{ et } b \in F\}.$

Remarque Rôle de la ponctuation

Produit cartésien de n ensembles

Soit $n \in \mathbb{N}$, si E_1, \ldots, E_n sont n ensembles, on définit le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ comme l'ensemble des n-uplets (a_1,\ldots,a_n) formés d'éléments $a_1 \in E_1,\ldots,a_n \in E_n$. Si les E_i désignent un même ensemble E, on note $E_1 \times \cdots \times E_n = E^n (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \dots)$

2.3. Utilisation d

4. Parties d'un ensemble

5. Produit cartésie

.6. Opérations sur le

Produit cartésien de *n* ensembles

Soit $n\in\mathbb{N}$, si E_1,\ldots,E_n sont n ensembles, on définit le produit cartésien $E_1\times\cdots\times E_n$ comme l'ensemble des n-uplets (a_1,\ldots,a_n) formés d'éléments $a_1\in E_1,\ldots,a_n\in E_n$. Si les E_i désignent un même ensemble E, on note $E_1\times\cdots\times E_n=E^n$ $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3...)$

Remarque Associativité du produit cartésien

1. Cours mathématiques

- 1.1. L'énigme mathématique
- 1.2. Structure de cours

2. Quantificateurs et notations ensemblistes

- 2.1. Appartenance, éléments
- 2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble
- 2.3. Utilisation de quantificateurs
- 2.4. Parties d'un ensemble
- 2.5. Produit cartésien
- 2.6. Opérations sur les ensembles

1. Cours

mathématiques

1.1 L'ániamo mothámotique

1.2. Structure de

Quantificateu notations

ensemblistes

Appartenance, éléments

2.2. Différentes manières

2.3. Utilisation de

ıantificateurs

Produit cartésien

i. Produit cartésien

2.6. Opérations sur le ensembles

Quantificateurs et notations

ensemblistes

2.1. Appartenance, elements
2.2. Différentes manières

2.2. Differentes manière d'écrire un ensemble

2.3. Utilisation de

4. Parties d'un ensemble

Produit cartésier

2.6. Opérations sur les ensembles

Définition - Réunion, intersection, différence d'ensembles

Pour *E* et *F* deux ensembles on définit :

- ▶ la réunion (ou union) de E et $F: E \cup F = \{x | x \in E \text{ ou } x \in F\}$ (le "ou" est inclusif : on peut avoir les deux simultanément)
- l'intersection de E et $F: E \cap F = \{x | x \in E \text{ et } x \in F\}$
- ▶ la différence de E et de $F : E \setminus F = \{x | x \in E \text{ et } x \notin F\}$

Définition - Réunion, intersection, différence d'ensembles

Pour E et F deux ensembles on définit :

- ▶ la réunion (ou union) de E et $F: E \cup F = \{x | x \in E \text{ ou } x \in F\}$ (le "ou" est inclusif : on peut avoir les deux simultanément)
- ▶ l'intersection de E et $F: E \cap F = \{x | x \in E \text{ et } x \in F\}$
- ▶ la différence de E et de $F : E \setminus F = \{x | x \in E \text{ et } x \notin F\}$

Remarque Interprétation avec une table de vérité

1. Cours

mainemailques

1.2. Structure de cours

2. Quantificateurs et notations

nsemblistes

2.1. Appartenance, élément

2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble

2.3. Utilisation de

.4. Parties d'un ensemble

5. Produit cartésie

2.6. Opérations sur les

1. Cours

1.1. L'énigme mathématiqu

Quantificateurs notations

ensemblistes

2.2. Différentes manières

écrire un ensemble

2.3. Utilisation de puantificateurs

4. Parties d'un ensemble

. Produit cartésien

2.6. Opérations sur les ensembles

Définition - Complémentaire d'un ensemble (dans un ensemble plus gros)

Lorsque $F \subset E$, l'ensemble $E \setminus F$ est appelé complémentaire de F dans E et noté $\mathbb{C}_E F$.

On ne peut parler de complémentaire de l'ensemble F que relativement à un ensemble « contenant » ce dernier. Toutefois, en l'absence d'ambiguïté sur E, on peut noter $\mathbb{C}F$ ou \overline{F}^c ou cette dernière notation ayant cependant différents sens suivant le domaine des mathématiques...)

- d'écrire un ensemble
- 2.3. Utilisation de quantificateurs
 - 4. Parties d'un enseml
 - 5. Produit cartésien
- 2.6. Opérations sur les ensembles

Définition - Complémentaire d'un ensemble (dans un ensemble plus gros)

Lorsque $F\subset E$, l'ensemble $E\setminus F$ est appelé complémentaire de F dans E et noté $\mathbb{C}_E F$.

On ne peut parler de complémentaire de l'ensemble F que relativement à un ensemble « contenant » ce dernier. Toutefois, en l'absence d'ambiguïté sur E, on peut noter $\mathbb{C}F$ ou F^c ou \overline{F} (cette dernière notation ayant cependant différents sens suivant le domaine des mathématiques...)

Attention. Le verbe contenir

Attention également à l'ambiguïté du verbe "contenir", parfois utilisé pour dire que x est élément de E, parfois pour dire que F est une partie de E.

** ***

1.2. Structure de cours

notations ensemblistes

2.1. Appartenance, éléments

2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble

3. Utilisation de

.4. Parties d'un ensemble

5. Produit cartésier

2.6. Opérations sur les ensembles

Exercice

Soit $A=\{x\in\mathbb{N}\mid x/2\in\mathbb{N}\ \text{et}\ x\geqslant 10\}$. Que représente A ? Ecrire cet ensemble différemment. Ecrire en extension $\mathbb{C}_{2\mathbb{N}}A$ puis déterminer $\mathbb{C}_{\mathbb{N}}A$.

Déterminer les sous-ensembles X de $\mathbb N$ tels que $A \cup X = \mathbb N$.

Exercice

Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x/2 \in \mathbb{N} \text{ et } x \ge 10\}$. Que représente A? Ecrire cet ensemble différemment. Ecrire en extension $\mathbb{C}_{2\mathbb{N}}A$ puis déterminer $\mathbb{C}_{\mathbb{N}}A$.

Déterminer les sous-ensembles X de \mathbb{N} tels que $A \cup X = \mathbb{N}$.

Exercice

Soit E un ensemble. Que peut-on dire de deux parties A et B de E vérifiant $A \cap B = A \cup B$?

. Parties d'un ensemble

5. Produit cartésie

2.6. Opérations sur les ensembles

Exercice

Soit $A=\{x\in\mathbb{N}\mid x/2\in\mathbb{N}\ \text{et}\ x\geqslant 10\}$. Que représente A ? Ecrire cet ensemble différemment. Ecrire en extension $\mathbb{C}_{2\mathbb{N}}A$ puis déterminer $\mathbb{C}_{\mathbb{N}}A$.

Déterminer les sous-ensembles X de $\mathbb N$ tels que $A \cup X = \mathbb N$.

Exercice

Soit E un ensemble. Que peut-on dire de deux parties A et B de E vérifiant $A \cap B = A \cup B$?

Exercice

On définit la différence symétrique de deux ensembles E et F par

$$E\Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

Ecrire $E\Delta F$ à l'aide de $E\cup F$ et $E\cap F$.

2. Différentes manières écrire un ensemble

3. Utilisation de

Parties d'un ensem

. Produit cartésien

2.6. Opérations sur les ensembles

Proposition - Quelques règles de calcul

E,F et G désignent trois ensembles quelconques et A et B deux parties de E.

 $E \cup F = F \cup E$ $E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$ $\phi \cup E = E \cup \phi = E$ $E \cap F = F \cap E$ $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$ $\phi \cap E = E \cap \phi = \phi$ $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$ $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$

(associativité de la réunion)
(l'ensemble vide est neutre pour la réunion)
(commutativité de l'intersection)
(associativité de l'intersection)
(l'ensemble vide est absorbant pour l'intersection)
(distributivité de l'intersection par rapport à la réunion)
(distributivité de la réunion par rapport à l'intersection)

(commutativité de la réunion)

 $A \cap E = A$ $A \cup E = E$ $\mathbb{C}_E(\mathbb{C}_E A) = A$ $\mathbb{C}_E(A \cup B) = (\mathbb{C}_E A) \cap (\mathbb{C}_E B)$ $\mathbb{C}_E(A \cap B) = (\mathbb{C}_E A) \cup (\mathbb{C}_E B)$

Les deux dernières formules sont connues sous le nom de lois de Morgan.

Objectifs

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

mathématiq

1.2. Structure de cou

notations

anaembilatea

- 2.2 Différentes manières
- 2.2. Differentes maniere d'écrire un ensemble
- 2.3. Utilisation de
- .4. Parties d'un ensemble
- 5. Produit cartésier
- 2.6. Opérations sur les ensembles

- ⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques
 - Revoir les notions sur ensembles : appartenance, écriture d'ensembles, produit cartésien

ensemble et raisonnemen

- mathématique
 - L'énigme mathématique
- 1.2. Structure de cours
- notations ensemblistes
- 2.1. Appartenance, éléments
- 2.2. Différentes manières
- 2.3. Utilisation de
- .4. Parties d'un ensemble
- 5. Produit cartésie
- 2.6. Opérations sur les ensembles

1.1. L'énigme mathématiqu

1.2. Structure de cours

notations ensemblistes

2.1 Annartenance éléments

2.2. Différentes manières

.3. Utilisation de

uantificateurs

.4. Parties d'un ensemble

Produit cartésie

2.6. Opérations sur le ensembles

Objectifs

- ⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques
 - Revoir les notions sur ensembles : appartenance, écriture d'ensembles, produit cartésien
 - Notion importante d'assertions.

Objectifs

- ⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques
 - Revoir les notions sur ensembles : appartenance, écriture d'ensembles, produit cartésien
 - Notion importante d'assertions.
 - Négation d'assertions ou implication et équivalence d'assertions

Objectifs

- ⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques
 - Revoir les notions sur ensembles : appartenance, écriture d'ensembles, produit cartésien
 - Notion importante d'assertions.
 - Négation d'assertions ou implication et équivalence d'assertions
 - Vérification de la combinatoire d'assertions par la table de vérité

1. Cours

mathématique

1.1. Lenignie matriematique

2. Quantificateurs et

nsemblistes

.1. Appartenance, éléments

2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble

.3. Utilisation de

I. Parties d'un ensemble

i. Produit cartésien

2.6. Opérations sur les

n. Cours mathématiq

1.1 L'ániamo mathámatic

1.2. Structure de cours

notations

ensemblistes

2.1. Appartenance, éléments

 2.2. Différentes manière d'écrire un ensemble

2.3. Utilisation de

l. Parties d'un ensemble

Produit cartésien

2.6. Opérations sur les ensembles

Objectifs

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : Chap 10 Structure logique
 - 3. Vocabulaire sur les assertions
 - 4. Principales méthodes de démonstration
- ► Pour la prochaine fois : N° 224, 227