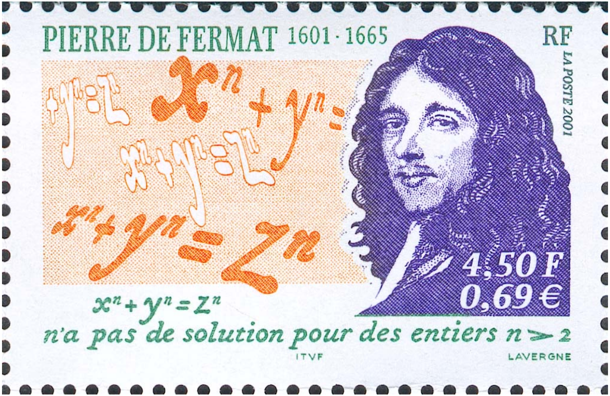

Leçon 10 - Structure logique

19 septembre 2024

Exercices

Exercice

Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x/2 \in \mathbb{N} \text{ et } x \geqslant 10\}$. Que représente A ? Ecrire cet ensemble différemment. Ecrire en extension $\complement_{2\mathbb{N}} A$ puis déterminer $\complement_{\mathbb{N}} A$.

Déterminer les sous-ensembles X de $\mathbb{N}$ tels que $A \cup X = \mathbb{N}$.

Exercices

<u>Exercice</u>

Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x/2 \in \mathbb{N} \text{ et } x \geqslant 10\}$. Que représente A ? Ecrire cet ensemble différemment. Ecrire en extension $\complement_{2\mathbb{N}} A$ puis déterminer $\complement_{\mathbb{N}} A$.

Déterminer les sous-ensembles X de $\mathbb{N}$ tels que $A \cup X = \mathbb{N}$.

<u>Exercice</u>

Soit E un ensemble. Que peut-on dire de deux parties A et B de E vérifiant $A \cap B = A \cup B$?

Exercices

<u>Exercice</u>

Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x/2 \in \mathbb{N} \text{ et } x \geqslant 10\}$. Que représente A ? Ecrire cet ensemble différemment. Ecrire en extension $\complement_{2\mathbb{N}} A$ puis déterminer $\complement_{\mathbb{N}} A$.

Déterminer les sous-ensembles X de $\mathbb{N}$ tels que $A \cup X = \mathbb{N}$.

<u>Exercice</u>

Soit E un ensemble. Que peut-on dire de deux parties A et B de E vérifiant $A \cap B = A \cup B$?

<u>Exercice</u>

On définit la différence symétrique de deux ensembles E et F par

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

Ecrire $E \Delta F$ à l'aide de $E \cup F$ et $E \cap F$.

Règles de calcul

Proposition - Quelques règles de calcul

E,F et G désignent trois ensembles quelconques et A et B deux parties de E.

$$E \cup F = F \cup E \qquad \text{(commutativité de la réunion)}$$
$$E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G \qquad \text{(associativité de la réunion)}$$
$$\emptyset \cup E = E \cup \emptyset = E \qquad \text{(l'ensemble vide est neutre pour la réunion)}$$
$$E \cap F = F \cap E \qquad \text{(commutativité de l'intersection)}$$
$$E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G \qquad \text{(associativité de l'intersection)}$$
$$\emptyset \cap E = E \cap \emptyset = \emptyset \qquad \text{(l'ensemble vide est absorbant pour l'intersection)}$$
$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G) \qquad \text{(distributivité de l'intersection par rapport à la réunion)}$$
$$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G) \qquad \text{(distributivité de la réunion par rapport à l'intersection)}$$

$$A \cap E = A$$
$$A \cup E = E$$
$$\complement_E(\complement_E A) = A$$
$$\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$$
$$\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$$

Les deux dernières formules sont connues sous le nom de *lois de Morgan*.

Assertions

Définition - Assertion (proposition) et prédicat

Dans ce paragraphe une *proposition*, ou *assertion* est un énoncé qui peut prendre deux valeurs logiques : V (vrai) ou F (faux).
Si cette assertion dépend d'une variable x on parle alors de *prédicat*.

Assertions

Définition - Assertion (proposition) et prédicat

Dans ce paragraphe une *proposition*, ou *assertion* est un énoncé qui peut prendre deux valeurs logiques : V (vrai) ou F (faux).
Si cette assertion dépend d'une variable x on parle alors de *prédicat*.

Exemple Propositions

Construction d'assertion

Comme on peut le voir dans les parties suivantes, à partir de deux assertions A et B, on en définit d'autres dont la valeur logique est donnée par une *table de vérité*

Construction d'assertion

Comme on peut le voir dans les parties suivantes, à partir de deux assertions A et B, on en définit d'autres dont la valeur logique est donnée par une *table de vérité*

Exercice

Que pensez-vous de $\mathscr{P}_n$ dans l'énoncé formel suivant ?

Notons, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$: « $\exists\ k \in E$ tel que $a_n = k$ ».

$\Rightarrow$ **Relation entre assertions (propositions)**

1. Cours mathématiques

2. Quantificateurs et notations ensemblistes

3. Vocabulaire sur les assertions
    3.1. Définitions
    3.2. Négation
    3.3. Implications et équivalence d'assertions

Définition

Définition - Négation d'une assertion

Considérons une assertion A.
On appelle négation de A l'assertion qui dit le contraire de A, c'est à dire qui est vraie exactement lorsque A est fausse, on la note "$\mathrm{non}A$" (ou $\neg A$ en logique).
La*table de vérité* de $\mathrm{non}A$:

A	non A
V	F
F	V

Exemple de négation

<u>Exercice</u>

La négation de « L'hiver dernier il a plu tous les jours à Toulouse » est :

La négation de « Chaque hiver, il neige au moins un jour en Aveyron » est :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

La négation de « $0 \in I$ » est

La négation de « $\forall x \in I, x > 0$ » est

La négation de « $\exists x \in I \mid x \geqslant 0$ » est

Négation d'une proposition avec quantificateurs

D'une manière plus générale il faut savoir nier une proposition écrite avec des quantificateurs :

Négation d'une proposition avec quantificateurs

D'une manière plus générale il faut savoir nier une proposition écrite avec des quantificateurs :

Exercice

P désignant une propriété dépendant de x ou de x, y suivant les cas, écrire la négation des assertions suivantes :

1. $\forall x \in E, P(x)$;
2. $\exists x \in E | P(x)$;
3. $\forall x \in E, \exists y \in E | P(x, y)$;
4. $\exists x \in E | \forall y \in E, P(x, y)$;
5. $\exists r \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant r$ et $s \leqslant r$.

Avec une table de vérité

L'exercice suivant permet de revoir également la table de vérité d'une conjonction (« et ») ou disjonction (« ou ») d'assertions.

Avec une table de vérité

L'exercice suivant permet de revoir également la table de vérité d'une conjonction (« et ») ou disjonction (« ou ») d'assertions.

Exercice

Compléter le tableau suivant :

A	B	A et B	A ou B	non (A et B)	non (A ou B)	non A	non B
V	V	V	V				
V	F	F	V				
F	V	F	V				
F	F	F	F				

Quelle relation remarquez-vous ?

Avec une table de vérité

L'exercice suivant permet de revoir également la table de vérité d'une conjonction (« et ») ou disjonction (« ou ») d'assertions.

Exercice

A	B	A et B	A ou B	non (A et B)	non (A ou B)	non A	non B	non A et non B	non A ou non B
V	V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V

On démontre les lois de Morgan :

- non(A et B)⇔ (non A) ou (non B)
- non(A ou B)⇔ (non A) et (non B)

Implication d'assertions

Définition - Implication d'assertions

Considérons deux assertions A et B.
Si, lorsque l'assertion A est vraie, alors, nécessairement, l'assertion B l'est également, on dit que A implique B et l'on écrit
$A \Rightarrow B$
(ce qui se lit donc "A implique B" ou "si A alors B").
Plus précisément, la table de vérité de $A \Rightarrow B$ est donnée par :

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$A \Rightarrow B$, et si A fausse ?

Remarque Et si A est fausse ?

$A \Rightarrow B$, et si A fausse ?

Remarque Et si A est fausse ?

Exercice

Quelle est l'assertion qui a même table de vérité que « $\mathrm{non}(A \Rightarrow B)$ » ?

Définition

Définition - Equivalence d'assertions

Considérons deux assertions A et B.
On dit que A et B sont équivalentes si elles signifient la même chose, mais dite différemment, c'est à dire si, simultanément, A implique B et B implique A ;
on note alors $A \Leftrightarrow B$.
Plus précisément, la table de vérité de $A \Leftrightarrow B$ est donnée par :

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple

Exemple Deux assertions équivalentes

Exemple

Exemple Deux assertions équivalentes

<u>Exercice</u>

Comparer la table d'équivalence de $A \Leftrightarrow B$ avec celle de $[(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)]$

Exemple

Exemple Deux assertions équivalentes

Exercice

Comparer la table d'équivalence de $A \Leftrightarrow B$ avec celle de $[(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)]$

Attention. A démontrer ?

Certaines équivalences correspondent en fait à la définition d'un objet mathématique, d'autres en revanche nécessitent une démonstration.

Exemple

Exemple Deux assertions équivalentes

<u>Exercice</u>

Comparer la table d'équivalence de $A \Leftrightarrow B$ avec celle de $[(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)]$

Attention. A démontrer ?

Certaines équivalences correspondent en fait à la définition d'un objet mathématique, d'autres en revanche nécessitent une démonstration.

Attention. Ne pas abuser de $A \Longleftrightarrow B$

Les étudiants écrivent TROP souvent $A \Longleftrightarrow B$, en faisant un calcul dans leur tête (ou une démonstration) qui permet de passer de A à B, SANS vérifier si l'on passe aussi de B à A.
Il est important de ne pas faire cette erreur, surtout si l'on demande qu'une implication. . .. Il ne faut pas en faire trop, si c'est faux !

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Relation entre assertions (propositions)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Relation entre assertions (propositions)

- Une assertion

Conclusion

Objectifs

⇒ Relation entre assertions (propositions)

- Une assertion
- Négation

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Relation entre assertions (propositions)

- Une assertion
- Négation
- Relations : implications, équivalences

Conclusion

Objectifs

⇒ Relation entre assertions (propositions)

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : Chap 10 Structure logique
  4. Principales méthodes de démonstration
- Exercices n°231, 232