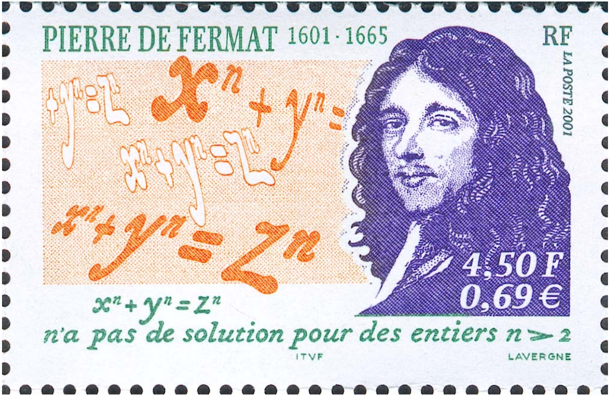

Leçon 12 - Nombres complexes

25 septembre 2024

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$
⇒ Interprétation dans le plan
⇒ Interprétation centré

1. Problèmes
2. Euler : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. Gauss
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

⇒ Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
   - 2.1. Racine de polynômes
   - 2.2. Calcul algébrique
   - 2.3. Représentation graphique
   - 2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
   - 3.1. Les complexes de module 1
   - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
   - 3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

⇒ Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
   2.1. Racine de polynômes
   2.2. Calcul algébrique
   2.3. Représentation graphique
   2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
   3.1. Les complexes de module 1
   3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
   3.3. Argument, forme trigonométrique

Problèmes

Problème - Multiplication de nombres

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Problèmes

Problème - Multiplication de nombres

Problème - Théorème de Napoléon

Leçon 12 - Nombres complexes

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Problèmes

Problème - Multiplication de nombres

Problème - Théorème de Napoléon

Problème - Transformation du plan

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Problèmes

Problème - Multiplication de nombres

Problème - Théorème de Napoléon

Problème - Transformation du plan

Problème - Application en physique

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒**Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

⇒ **Interprétation dans le plan & addition**

⇒ **Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
   - 2.1. Racine de polynômes
   - 2.2. Calcul algébrique
   - 2.3. Représentation graphique
   - 2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
   - 3.1. Les complexes de module 1
   - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
   - 3.3. Argument, forme trigonométrique

Historique

Analyse Problème de Cardan (1545)

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$
⇒ Interprétation dans le plan
⇒ Interprétation centré

1. Problèmes
2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. GAUSS
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Historique

Analyse Problème de Cardan (1545)

Les règles de calcul sont données par Raphël Bombelli dans son algebra(1572).
Pendant deux siècles, les mathématiciens se querellent quant à leur existence et leurs emplois.

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Historique

Analyse Problème de Cardan (1545)

Les règles de calcul sont données par Raphël Bombelli dans son algebra(1572).
Pendant deux siècles, les mathématiciens se querellent quant à leur existence et leurs emplois.

Exercice

On reprend un exercice historique de Bombelli.
En reprenant les règles classiques de calcul, évaluer $(2+\sqrt{-1})^3$.
En employant les formules de Cardan, trouver les racines de $x^3 = 15x+4$.

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒**Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

⇒ **Interprétation dans le plan & addition**

⇒ **Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

3.1. Les complexes de module 1

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Notation

Euler invente la notation i bien pratique et les manipule avec précision. Il écrit à Diderot : « $e^{i\pi} = -1$ donc Dieu existe ».
Un complexe est un « nombre » z qui s'écrit $z = a + ib$ où

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$
⇒ Interprétation dans le plan
⇒ Interprétation centré
1. Problèmes
2. Euler : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. Gauss
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Notation

Euler invente la notation i bien pratique et les manipule avec précision. Il écrit à Diderot : « $e^{i\pi} = -1$ donc Dieu existe ».
Un complexe est un « nombre » z qui s'écrit $z = a + ib$ où
Remarque Unicité

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$
⇒ Interprétation dans le plan
⇒ Interprétation centré
1. Problèmes
2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. GAUSS
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Notation

Euler invente la notation i bien pratique et les manipule avec précision. Il écrit à Diderot : « $e^{i\pi} = -1$ donc Dieu existe ».
Un complexe est un « nombre » z qui s'écrit $z = a + ib$ où
Remarque Unicité

Définition - Notation de nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un complexe (a et b sont des réels).
$a = \mathbf{Re}\, z$ s'appelle la **partie réelle** de z.
$b = \mathbf{Im}\, z$ s'appelle la **partie imaginaire** de z ;
z est dit ***imaginaire pur*** *($z \in i\mathbb{R}$) si sa partie réelle est nulle.*
$\overline{z} = a - ib$ s'appelle le **conjugué** de $z = a + ib$.
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ s'appelle le **module** de z.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$
⇒ Interprétation dans le plan
⇒ Interprétation centré
1. Problèmes
2. Euler : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. Gauss
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Calcul dans $\mathbb{C}$

Notons tout de suite comment se comportent les calculs habituelles : addition et multiplication dans $\mathbb{C}$ (il s'agit presque de définitions ici. . .).

Proposition - $\mathbb{C}$ est un corps

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$,

- $\mathbf{Re}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Re}(z) + \lambda' \mathbf{Re}(z')$ (*la partie réelle est* $\mathbb{R}$*-linéaire sur* $\mathbb{C}$)
- $\mathbf{Im}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Im}(z) + \lambda' \mathbf{Im}(z')$ (*la partie imaginaire est* $\mathbb{R}$*-linéaire sur* $\mathbb{C}$)
- si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, alors
  $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
  En particulier $z \times \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$, donc $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Calcul dans $\mathbb{C}$

Notons tout de suite comment se comportent les calculs habituelles : addition et multiplication dans $\mathbb{C}$ (il s'agit presque de définitions ici. . .).

Proposition - $\mathbb{C}$ est un corps

Pour tout $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$,

- $\mathbf{Re}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Re}(z) + \lambda' \mathbf{Re}(z')$ (*la partie réelle est* $\mathbb{R}$*-linéaire sur* $\mathbb{C}$)
- $\mathbf{Im}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Im}(z) + \lambda' \mathbf{Im}(z')$ (*la partie imaginaire est* $\mathbb{R}$*-linéaire sur* $\mathbb{C}$)
- si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, alors $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
  En particulier $z \times \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$, donc $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Remarque Importance du conjugué

1. Problèmes
2. Euler : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. Gauss
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Calcul dans $\mathbb{C}$

Notons tout de suite comment se comportent les calculs habituelles : addition et multiplication dans $\mathbb{C}$ (il s'agit presque de définitions ici...).

Proposition - $\mathbb{C}$ est un corps

Pour tout $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$,

- $\mathbf{Re}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Re}(z) + \lambda' \mathbf{Re}(z')$ (*la partie réelle est $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathbb{C}$*)
- $\mathbf{Im}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Im}(z) + \lambda' \mathbf{Im}(z')$ (*la partie imaginaire est $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathbb{C}$*)
- si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, alors
  $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
  En particulier $z \times \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$, donc $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Remarque Importance du conjugué

Démonstration

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Conjugaison

Proposition - Conjugaison

On a les propriétés du conjugué :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \forall a \in \mathbb{R}, \quad \overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \Rightarrow \overline{az} = a\overline{z} \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\mathbf{Re}\, z = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \mathbf{Im}\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

1. Problèmes
2. Euler : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. Gauss
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Conjugaison

Proposition - Conjugaison

On a les propriétés du conjugué :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \forall a \in \mathbb{R}, \quad \overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \Rightarrow \overline{az} = a\overline{z} \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\mathbf{Re}\, z = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \mathbf{Im}\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Conjugaison et puissance

Proposition - Puissance et conjugaison

On définit les puissances d'un nombre complexe par

$$\begin{cases} z^0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z^{n+1} = z^n z \end{cases}$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Pour $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n} = (z^n)^{-1}$, on a alors $\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = \overline{z}^n$.

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Conjugaison et puissance

Proposition - Puissance et conjugaison

On définit les puissances d'un nombre complexe par

$$\begin{cases} z^0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, z^{n+1} = z^n z \end{cases}$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Pour $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n} = (z^n)^{-1}$, on a alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Exercice Faire la démonstration

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Module

Propriété - Propriétés du module

On a les propriétés du module :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \forall\ a \in \mathbb{R} \quad |z| = \sqrt{z\overline{z}} \qquad |zz'| = |z|\,|z'| \Rightarrow |az| = a|z|$$

$$|z| = |\overline{z}| = |-z| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} (\text{si } z' \neq 0)$$

Leçon 12 - Nombres complexes

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Module

Propriété - Propriétés du module

On a les propriétés du module :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \forall\ a \in \mathbb{R} \quad |z| = \sqrt{z\overline{z}} \qquad |zz'| = |z|\,|z'| \Rightarrow |az| = a|z|$$

$$|z| = |\overline{z}| = |-z| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{(si } z' \neq 0)$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Module

Propriété - Propriétés du module

On a les propriétés du module :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \forall\ a \in \mathbb{R} \quad |z| = \sqrt{z\overline{z}} \qquad |zz'| = |z|\,|z'| \Rightarrow |az| = a|z|$$

$$|z| = |\overline{z}| = |-z| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} (\text{si } z' \neq 0)$$

Démonstration

Remarque Valeur absolue et module

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒**Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

⇒ **Interprétation dans le plan & addition**

⇒ **Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

   2.1. Racine de polynômes

   2.2. Calcul algébrique

   2.3. Représentation graphique

   2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

   3.1. Les complexes de module 1

   3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

   3.3. Argument, forme trigonométrique

Affixe

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0, \mathrm{vect}u, \mathrm{vect}v)$. Le point M de coordonnées (a, b) caractérisé par $\mathrm{vect}OM = a\mathrm{vect}u + b\mathrm{vect}v$, peut alors être représenté par le complexe $z = a + ib$.

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Affixe

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0, \text{vect}u, \text{vect}v)$. Le point M de coordonnées (a, b) caractérisé par $\text{vect}OM = a\text{vect}u + b\text{vect}v$, peut alors être représenté par le complexe $z = a + ib$.

Définition - Affixe d'un point. Affixe d'un vecteur

$z = a + ib$ est alors appelé **affixe** du point $M(a, b)$, on peut noter $z = \text{Aff}(M)$.
Réciproquement, le point M est appelé (point) image de z.
De même, si $\text{vect}w$ est un vecteur de coordonnées (a, b), $a + ib$ est appelé affixe de $\text{vect}w$ (noté $\text{Aff}(\text{vect}w)$), lui-même appelé (vecteur) image du complexe $a + ib$.

Affixe

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0, \mathrm{vect}u, \mathrm{vect}v)$. Le point M de coordonnées (a, b) caractérisé par $\mathrm{vect}OM = a\mathrm{vect}u + b\mathrm{vect}v$, peut alors être représenté par le complexe $z = a + ib$.

Définition - Affixe d'un point. Affixe d'un vecteur

$z = a + ib$ est alors appelé **affixe** du point $M(a, b)$, on peut noter $z = \mathrm{Aff}(M)$.
Réciproquement, le point M est appelé (point) image de z.
De même, si $\mathrm{vect}w$ est un vecteur de coordonnées (a, b), $a + ib$ est appelé affixe de $\mathrm{vect}w$ (noté $\mathrm{Aff}(\mathrm{vect}w)$), lui-même appelé (vecteur) image du complexe $a + ib$.

Remarque Axes

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$
⇒ Interprétation dans le plan
⇒ Interprétation centré
1. Problèmes
2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. GAUSS
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Géométrie et $\mathbb{C}$

Proposition - Opération complexe et correspondance sur le plan géométrique

Si z est l'affixe de M alors $\overline{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
Si $z = \text{Aff}(M)$ alors $|z|$ est égal à la distance OM.
Si $z = \text{Aff}(M)$ et $z_0 = \text{Aff}(M_0)$, alors $\text{Aff}(\text{vect}M_0M) = z - z_0$ et $|z - z_0| = M_0M$

1. Problèmes
2. Euler : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. Gauss
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒**Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

⇒ **Interprétation dans le plan & addition**

⇒ **Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

   2.1. Racine de polynômes

   2.2. Calcul algébrique

   2.3. Représentation graphique

   2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

   3.1. Les complexes de module 1

   3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

   3.3. Argument, forme trigonométrique

Inégalités

Théorème - Inégalités

Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a les inégalités suivantes :

$$|\mathbf{Re}\, z| \leqslant |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in \mathbb{R}$$

$$|\mathbf{Im}\, z| \leqslant |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in i\mathbb{R}$$

$$\Big||z| - |z'|\Big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$ **(Inégalité triangulaire)**

Avec égalité dans l'inégalité de droite
si et seulement si
$z' = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \lambda z'$ (z, z' positivement liés).

1. Problèmes
2. Euler : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. Gauss
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Inégalités

Théorème - Inégalités

Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a les inégalités suivantes :

$$|\mathbf{Re}\, z| \leqslant |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in \mathbb{R}$$

$$|\mathbf{Im}\, z| \leqslant |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in i\mathbb{R}$$

$$\Big||z| - |z'|\Big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'| \text{ (Inégalité triangulaire)}$$

Avec égalité dans l'inégalité de droite
si et seulement si
$z' = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \lambda z'$ (z, z' positivement liés).

Attention. Module ou valeur absolue ?

Il y a des modules et des valeurs absolues partout ici !

1. Problèmes
2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. GAUSS
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Inégalités

Théorème - Inégalités

Pour $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, on a les inégalités suivantes :

$$|\mathbf{Re}\, z| \leqslant |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in \mathbb{R}$$

$$|\mathbf{Im}\, z| \leqslant |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in i\mathbb{R}$$

$$\Big||z| - |z'|\Big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'| \textbf{ (Inégalité triangulaire)}$$

Avec égalité dans l'inégalité de droite
si et seulement si
$z' = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \lambda z'$ $(z, z'$ positivement liés).

Attention. Module ou valeur absolue ?

Il y a des modules et des valeurs absolues partout ici !

Analyse Interprétation de l'inégalité triangulaire

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Inégalités

Théorème - Inégalités

Pour $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, on a les inégalités suivantes :

$$|\mathbf{Re}\, z|\leqslant|z| \text{ avec égalité si et seulement si } z\in\mathbb{R}$$

$$|\mathbf{Im}\, z|\leqslant|z| \text{ avec égalité si et seulement si } z\in i\mathbb{R}$$

$$\Big||z|-|z'|\Big|\leqslant|z+z'|\leqslant|z|+|z'| \text{ (Inégalité triangulaire)}$$

Avec égalité dans l'inégalité de droite
si et seulement si
$z'=0$ ou il existe $\lambda\in\mathbb{R}^+$ tel que $z=\lambda z'$ (z,z' positivement liés).

Attention. Module ou valeur absolue ?

Il y a des modules et des valeurs absolues partout ici !

Analyse Interprétation de l'inégalité triangulaire

Démonstration

Inégalités

Par récurrence :

Proposition - Inégalités

Pour n complexes $z_1,\ldots,z_n$ on a

$$|z_1+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+\cdots+|z_n|.$$

⇒ Corps $(\mathbb{C},+,\times)$
⇒ Interprétation dans le plan
⇒ Interprétation centré

1. Problèmes
2. Euler : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. Gauss
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Inégalités

Par récurrence :

Proposition - Inégalités

Pour n complexes $z_1, \ldots, z_n$ on a

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|.$$

Proposition - Caractérisation des complexes remarquables

$$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{Re}\, z = \mathbf{Im}\, z = 0$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbf{Im}\, z = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = z \Leftrightarrow |z|^2 = (\mathbf{Re}\, z)^2$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbf{Re}\, z = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z \Leftrightarrow |z|^2 = (\mathbf{Im}\, z)^2$$

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$
⇒ Interprétation dans le plan
⇒ Interprétation centré

1. Problèmes
2. Euler : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. Gauss
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒**Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

⇒ **Interprétation dans le plan & addition**

⇒ **Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

1. Problèmes
2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
 2.1. Racine de polynômes
 2.2. Calcul algébrique
 2.3. Représentation graphique
 2.4. Inégalités
3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
 3.1. Les complexes de module 1
 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
 3.3. Argument, forme trigonométrique

Groupe unitaire

En 1800, les mathématiciens manipulent les nombres complexes, mais ces nombres manquent de légitimité.
C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur $\mathbb{R}^2$ (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Groupe unitaire

En 1800, les mathématiciens manipulent les nombres complexes, mais ces nombres manquent de légitimité.
C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur $\mathbb{R}^2$ (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

Définition - Groupe unitaire

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1, c'est aussi le cercle unité de $\mathbb{C}$, ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid , |z| = 1\}.$$

1. Problèmes
2. Euler : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. Gauss
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Groupe unitaire

En 1800, les mathématiciens manipulent les nombres complexes, mais ces nombres manquent de légitimité.
C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur $\mathbb{R}^2$ (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

Définition - Groupe unitaire

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1, c'est aussi le cercle unité de $\mathbb{C}$, ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid , |z| = 1\}.$$

Proposition - Conjugaison sur $\mathbb{U}$

$$\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2, zz' \in \mathbb{U}, \qquad \forall z \in \mathbb{U}, \overline{z} = \frac{1}{z} \in \mathbb{U}.$$

On dit que l'ensemble $\mathbb{U}$ muni de l'opération multiplication est un groupe commutatif.

1. Problèmes
2. Euler : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. Gauss
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Groupe unitaire

En 1800, les mathématiciens manipulent les nombres complexes, mais ces nombres manquent de légitimité.
C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur $\mathbb{R}^2$ (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

Définition - Groupe unitaire

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1, c'est aussi le cercle unité de $\mathbb{C}$, ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid , |z| = 1\}.$$

Proposition - Conjugaison sur $\mathbb{U}$

$$\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2, zz' \in \mathbb{U}, \qquad \forall z \in \mathbb{U}, \overline{z} = \frac{1}{z} \in \mathbb{U}.$$

On dit que l'ensemble $\mathbb{U}$ muni de l'opération multiplication est un groupe commutatif.

Démonstration

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Interprétation géométrique du calcul $u \times z$ pour $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$

Analyse Géométrique
Soit $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Considérons les 4 points du plan $A(1)$, $B(u) \neq A$, $C(z)$ et $D(u \times z)$.
Alors $AC = |z-1|$ et $BD = |uz-u| = |u| \times |z-1| = AC$.

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Interprétation géométrique du calcul $u \times z$ pour $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$

Analyse Géométrique
Soit $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Considérons les 4 points du plan $A(1)$, $B(u) \neq A$, $C(z)$ et $D(u \times z)$.
Alors $AC = |z-1|$ et $BD = |uz - u| = |u| \times |z-1| = AC$.

Définition - Argument de $u \in \mathbb{U}$, de $z \in \mathbb{C}$

Soit $u \in \mathbb{U}$. On note I, le point du plan d'affixe 1 et M celui d'affixe u.
On appelle argument de $u \in \mathbb{U}$ noté $\arg(u)$, l'angle (principal) $(\text{vect}OI, \text{vect}OM)$.
Dans un premier temps, on note $\measuredangle\theta$ ce nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

On a alors $u = \cos\theta + i\sin\theta$, pour $\theta \equiv \arg(u)[2\pi]$.

Extension pour $\theta \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

Remarque

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Extension pour $\theta \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

Remarque

Démonstration

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Extension pour $\theta \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

Remarque

Démonstration

Proposition - Multiplication par $u \in \mathbb{U}$

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$.
Notons $\theta = \arg(u)$.
Alors $u \times z$ est l'affixe du point obtenu par rotation de centre 0 et d'angle θ, à partir du point d'affixe z

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Notation exponentielle

Corollaire - Propriété de e^{i}

Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $\measuredangle\theta \times \measuredangle\theta' = \measuredangle(\theta+\theta')$.

Notation exponentielle

Corollaire - Propriété de e^i

Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $\measuredangle\theta \times \measuredangle\theta' = \measuredangle(\theta + \theta')$.

Démonstration

Leçon 12 - Nombres complexes

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Notation exponentielle

Corollaire - Propriété de e^i

Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $\measuredangle\theta \times \measuredangle\theta' = \measuredangle(\theta+\theta')$.

Démonstration

Définition - Notation d'Euler

Nous verrons que dans le cas réel, on appelle exponentielle les fonctions qui vérifient $f(a+b) = f(a) \times f(b)$.
Elles s'écrivent (dans le cas réel) sous la forme $x \longmapsto A^x$ où $A = f(1)$.
Par uniformité de notation, suivant L. Euler, on notera maintenant $e^{i\theta} = \measuredangle\theta = \cos\theta + i\sin\theta$

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Propriétés

On a alors, plus globalement :

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Propriétés

On a alors, plus globalement :

Théorème - Propriétés

Soient $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'} \qquad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \qquad e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[2\pi]$$

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Propriétés

On a alors, plus globalement :

Théorème - Propriétés

Soient $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'} \qquad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \qquad e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[2\pi]$$

Démonstration

⇒ Corps $(\mathbb{C},+,\times)$
⇒ Interprétation dans le plan
⇒ Interprétation centré

1. Problèmes
2. Euler : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. Gauss
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Formule de Regionmontanus

Corollaire - Formule d'additions trigonométriques

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

et $$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Formule de Regionmontanus

Corollaire - Formule d'additions trigonométriques

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

et $$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Démonstration

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Formule de Regionmontanus

Corollaire - Formule d'additions trigonométriques

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

et $$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Démonstration

Exercice

En déduire les formules donnant $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$.

Leçon 12 - Nombres complexes

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒**Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

⇒ **Interprétation dans le plan & addition**

⇒ **Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

3.1. Les complexes de module 1

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Formule d'Euler

Proposition - Formules d'Euler

$$\cos\theta = \mathbf{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \mathbf{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

⇒ Corps $(\mathbb{C},+,\times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Formule d'Euler

Proposition - Formules d'Euler

$$\cos\theta = \mathbf{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \mathbf{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

<u>Exercice</u>

Calculer $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, en déduire une expression de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Formule de (de) Moivre

Proposition - Formule de Moivre

$\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

$\forall n \in \mathbb{Z}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Formule de (de) Moivre

Proposition - Formule de Moivre

$\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

$\forall n \in \mathbb{Z}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Démonstration

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Factorisation

Trucs et astuces pour le calcul. Factorisation de l'angle moitié

Lorsqu'on rencontre un expression de la forme $e^i a \pm e^i b$ $(a, b$ réels), il faut toujours penser à factoriser par la moitié :

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \quad , \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

Cela donne :

$$e^{ia} \pm e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} \pm e^{-i\frac{a-b}{2}} \right)$$

Et on applique les formules d'Euler

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$
⇒ Interprétation dans le plan
⇒ Interprétation centré
1. Problèmes
2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. GAUSS
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Factorisation

Trucs et astuces pour le calcul. Factorisation de l'angle moitié

Lorsqu'on rencontre un expression de la forme $e^ia \pm e^ib$ (a, b réels), il faut toujours penser à factoriser par la moitié :

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \quad , \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

Cela donne :

$$e^{ia} \pm e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} \pm e^{-i\frac{a-b}{2}} \right)$$

Et on applique les formules d'Euler

Exercice

Factoriser $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$. Retrouver les formules donnant $1 \pm \cos\theta$

Factorisation

Trucs et astuces pour le calcul. Factorisation de l'angle moitié

Lorsqu'on rencontre un expression de la forme $e^i a \pm e^i b$ (a, b réels), il faut toujours penser à factoriser par la moitié :

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \quad , \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

Cela donne :

$$e^{ia} \pm e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} \pm e^{-i\frac{a-b}{2}} \right)$$

Et on applique les formules d'Euler

Exercice

Factoriser $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$. Retrouver les formules donnant $1 \pm \cos\theta$

Exercice

Nouveau calcul de $\sum^{n} \cos kt$ et $\sum^{n} \sin kt$

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Linéarisation

Savoir-faire. Linéarisation

Il s'agit d'exprimer $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$ sous forme d'une somme de $\cos k\theta$ ou $\sin k\theta$

(il ne doit plus y avoir de puissances ni de produits de cosinus ou sinus).

- Ecrire $\cos^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$.
- Développer avec la formule du binôme.
- Regrouper les termes conjugués pour faire apparaître des cosinus ou des sinus.

Si il n'y a pas de faute de calculs, vous devez obtenir un nombre réel : **donc simplification des** i…

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Linéarisation

Savoir-faire. Linéarisation

Il s'agit d'exprimer $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ sous forme d'une somme de $\cos k\theta$ ou $\sin k\theta$

(il ne doit plus y avoir de puissances ni de produits de cosinus ou sinus).

- Ecrire $\cos^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$.
- Développer avec la formule du binôme.
- Regrouper les termes conjugués pour faire apparaître des cosinus ou des sinus.

Si il n'y a pas de faute de calculs, vous devez obtenir un nombre réel : **donc simplification des** i...

Exercice

Linéariser $\cos^3 \theta$, $\sin^4 \theta$.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$
⇒ Interprétation dans le plan
⇒ Interprétation centré
1. Problèmes
2. Euler : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. Gauss
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

$\cos(nt)$ ou $\sin(nt)$ en polynôme de $\cos t$ et $\sin t$

Savoir-faire. Expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$

- Ecrire $\cos(nt) = \mathbf{Re}(e^{int}) = \mathbf{Re}[(e^{it})^n]$ ou $\sin(nt) = \mathbf{Im}[(e^{it})^n]$.
- Utiliser la formule du binôme pour calculer $(e^{it})^n = (\cos t + i \sin t)^n$.
- Récupérer la partie réelle (ou imaginaire) en séparant les indices pairs des indices impairs.

Leçon 12 - Nombres complexes

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

$\cos(nt)$ ou $\sin(nt)$ en polynôme de $\cos t$ et $\sin t$

Savoir-faire. Expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$

- Ecrire $\cos(nt) = \mathbf{Re}(e^{int}) = \mathbf{Re}[(e^{it})^n]$ ou $\sin(nt) = \mathbf{Im}[(e^{it})^n]$.
- Utiliser la formule du binôme pour calculer $(e^{it})^n = (\cos t + i \sin t)^n$.
- Récupérer la partie réelle (ou imaginaire) en séparant les indices pairs des indices impairs.

<u>Exercice</u>

Ecrire $\cos 3t$ en fonction des puissances de $\cos t$, $\sin 3t$ comme le produit de $\sin t$ et d'une expression contenant des puissances de $\cos t$. Faire de même avec $\cos 5t$ et $\sin 5t$.

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

⇒ Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
   - 2.1. Racine de polynômes
   - 2.2. Calcul algébrique
   - 2.3. Représentation graphique
   - 2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
   - 3.1. Les complexes de module 1
   - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
   - 3.3. Argument, forme trigonométrique

Argument

Définition - Argument

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, on a $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

On dit que θ est un argument de z. On note $\theta = \arg z$.

L'écriture $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ est appelée forme trigonométrique de z.

Argument

Proposition - Arithmétique de la congruence

Si $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, on a

$$\arg \overline{z} \equiv -\arg z [2\pi]$$
$$\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z [2\pi]$$
$$\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\arg z - \arg z')[2\pi]$$

Argument

Proposition - Arithmétique de la congruence

Si $(z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, on a

$$\begin{aligned}
\arg\overline{z} &\equiv -\arg z[2\pi] \\
\arg\frac{1}{z} &\equiv -\arg z[2\pi] \\
\arg(zz') &\equiv (\arg z + \arg z')[2\pi] \\
\arg\left(\frac{z}{z'}\right) &\equiv (\arg z - \arg z')[2\pi]
\end{aligned}$$

Attention Pas d'unicité.

⇒ Corps $(\mathbb{C},+,\times)$
⇒ Interprétation dans le plan
⇒ Interprétation centré

1. Problèmes
2. Euler : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. Gauss
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Argument

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$
⇒ Interprétation dans le plan
⇒ Interprétation centré
1. Problèmes
2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. GAUSS
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Proposition - Arithmétique de la congruence

Si $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, on a

$$\begin{aligned}
&\arg \overline{z} \equiv -\arg z [2\pi] \\
&\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z [2\pi] \\
&\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi] \\
&\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\arg z - \arg z')[2\pi]
\end{aligned}$$

Attention Pas d'unicité.

Remarque Géométriquement

Arctan

Proposition - Relation $\arg$ et $\arctan$

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\arg(1 + ix) \equiv \arctan x[2\pi]$

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Arctan

Proposition - Relation arg et arctan

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\arg(1+ix) \equiv \arctan x [2\pi]$

Démonstration

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan & addition

$\Rightarrow$ Interprétation centrée & multiplication

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$
$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan
$\Rightarrow$ Interprétation centré
1. Problèmes
2. EULER : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. GAUSS
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

- Définition algébrique : $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $i^2 = -1$

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

- Définition algébrique : $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $i^2 = -1$
- L'addition est naturelle. La multiplication est commutative, distributive.

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

- Définition algébrique : $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $i^2 = -1$
- L'addition est naturelle. La multiplication est commutative, distributive.
- Intéressant : le module de $z = \sqrt{a^2 + b^2}$.

  z inversible ssi $|z| \neq 0$. Et $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, d'où la conjugaison

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

- Définition algébrique : $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $i^2 = -1$
- L'addition est naturelle. La multiplication est commutative, distributive.
- Intéressant : le module de $z = \sqrt{a^2 + b^2}$.

  z inversible ssi $|z| \neq 0$. Et $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, d'où la conjugaison
- Inégalité triangulaire et série d'inégalités.

Conclusion

Objectifs

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

⇒ Interprétation centrée & multiplication

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan & addition

- Somme : translation de vecteur

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$
$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan
$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes
2. Euler : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. Gauss
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

- Somme : translation de vecteur
- Le module : norme du vecteur.

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

- Somme : translation de vecteur
- Le module : norme du vecteur.
- Comment interpréter le produit ?

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan & addition

$\Rightarrow$ Interprétation centrée & multiplication

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan & addition

$\Rightarrow$ Interprétation centrée & multiplication

- Définir le groupe $\mathbb{U}$, de nombres complexes de module 1.

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan & addition

$\Rightarrow$ Interprétation centrée & multiplication

- Définir le groupe $\mathbb{U}$, de nombres complexes de module 1.
- Notation complexe trigonométrique : $z = \rho e^{i\theta}$.

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

⇒ Interprétation centrée & multiplication

- Définir le groupe $\mathbb{U}$, de nombres complexes de module 1.
- Notation complexe trigonométrique : $z = \rho e^{i\theta}$.
- Généralisation à la notion d'arguments.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$
⇒ Interprétation dans le plan
⇒ Interprétation centré
1. Problèmes
2. Euler : Manipulateur des nombres du diable
2.1. Racine de polynômes
2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique
2.4. Inégalités
3. Gauss
3.1. $\mathbb{U}$
3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan & addition

$\Rightarrow$ Interprétation centrée & multiplication

- Définir le groupe $\mathbb{U}$, de nombres complexes de module 1.
- Notation complexe trigonométrique : $z = \rho e^{i\theta}$.
- Généralisation à la notion d'arguments.
- Représentation graphique : multiplication comme homothétie et rotation

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan & addition

$\Rightarrow$ Interprétation centrée & multiplication

- Définir le groupe $\mathbb{U}$, de nombres complexes de module 1.
- Notation complexe trigonométrique : $z = \rho e^{i\theta}$.
- Généralisation à la notion d'arguments.
- Représentation graphique : multiplication comme homothétie et rotation
- Nombreux savoir-faire qui donnent les formules trigonométriques.

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

⇒ Interprétation dans le plan & addition

⇒ Interprétation centrée & multiplication

Pour la prochaine fois

- Lecture 4. Racines & 5. Plan complexe
- Exercice n° 80 & 84
- TD de jeudi :
  8h-10h : 74, 75, 79, 85b, 91
  10h-12h : 90, 76, 82, 85a, 93

1. Problèmes

2. Euler : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Gauss

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique