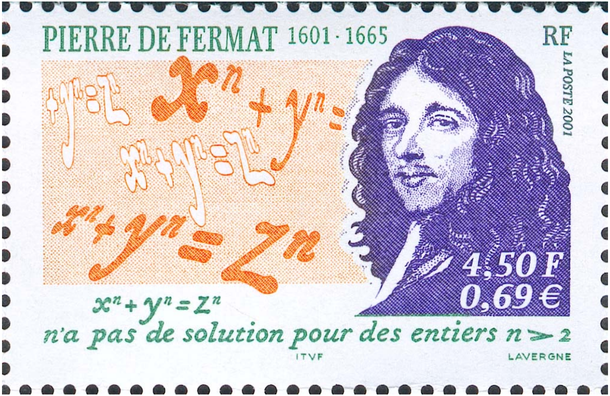

Leçon 14 - Nombres complexes

27 septembre 2024

⇒**Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan**

⇒ **Transformations géométriques du plan**

1. Problèmes
2. EULER : manipulateur des nombres du diable
3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
4. Racines d'un nombre complexe
5. Rappels : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathscr{P}$
    5.1. Regard géométrique sur le plan complexe
    5.2. Ligne de niveau
    5.3 Transformations du plan (point de vue complexe)

⇒Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

Identification $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathscr{P}$

Proposition - Identification

On munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soient A, B, A', B' quatre points du plan. On a alors (*mesure des angles orientés de vecteurs*) :

$$|z_A| = OA$$

$$AB = |z_B - z_A|$$

$$\arg z_A \equiv (\vec{i}, \vec{OA})[2\pi] \qquad \text{et} \ \arg(z_B - z_A) \equiv (\vec{i}, \vec{AB})[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right) \equiv (\vec{AB}, \vec{A'B'})[2\pi]$$

Identification $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathscr{P}$

Proposition - Identification

On munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soient A, B, A', B' quatre points du plan. On a alors (*mesure des angles orientés de vecteurs*) :

$$|z_A| = OA$$

$$AB = |z_B - z_A|$$

$$\arg z_A \equiv (\vec{i}, \vec{OA})[2\pi] \quad \text{et} \quad \arg(z_B - z_A) \equiv (\vec{i}, \vec{AB})[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right) \equiv (\vec{AB}, \vec{A'B'})[2\pi]$$

Le dernier résultat, essentiel, mérite une démonstration.

Démonstration

LE nombre $z' \times \overline{z}$

Analyse Le nombre $Z = z' \times \overline{z}$

LE nombre $z' \times \overline{z}$

Analyse Le nombre $Z = z' \times \overline{z}$

Définition - Le complexe Z

Soient A, B, A', B' quatre points du plan d'affixe z_A, z_B, $z_{A'}$ et $z_{B'}$ respectivement.
On note $Z = (z_{B'} - z_{A'}) \times \overline{(z_B - z_A)}$.
Alors

$$\arg Z \equiv (\vec{AB}, \vec{A'B'})[2\pi] \quad \text{et} \quad |Z| = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{A'B'}\|$$

où $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est par définition la norme (longueur) du vecteur $\vec{u}(x, y)$.
Et donc

$$Z = \|\vec{AB}\| \|\vec{A'B'}\| \left[\cos(\vec{AB}, \vec{A'B'}) + i \sin(\vec{AB}, \vec{A'B'})\right]$$

LE nombre $z' \times \overline{z}$

Le calcul donne :

Proposition - Partie réelle et imaginaire de Z

Avec les mêmes notations et en notant $\vec{u} = \vec{AB}$ d'affixe $z = z_B - z_A = x + iy$ et $\vec{u'} = \vec{A'B'}$ d'affixe $z' = z_{B'} - z_{A'} = x' + iy'$. On rappelle que $Z = z' \times \overline{z}$. On a alors :

$$\mathbf{Re}(Z) = \|\vec{AB}\|\,\|\vec{A'B'}\|\cos(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = xx' + yy'$$

$$\mathbf{Im}(Z) = \|\vec{AB}\|\,\|\vec{A'B'}\|\sin(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = xy' - x'y$$

LE nombre $z' \times \overline{z}$

Le calcul donne :

Proposition - Partie réelle et imaginaire de Z

Avec les mêmes notations et en notant $\vec{u} = \vec{AB}$ d'affixe $z = z_B - z_A = x + iy$ et $\vec{u'} = \vec{A'B'}$ d'affixe $z' = z_{B'} - z_{A'} = x' + iy'$. On rappelle que $Z = z' \times \overline{z}$. On a alors :

$$\mathbf{Re}(Z) = \|\vec{AB}\| \|\vec{A'B'}\| \cos(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = xx' + yy'$$

$$\mathbf{Im}(Z) = \|\vec{AB}\| \|\vec{A'B'}\| \sin(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = xy' - x'y$$

Démonstration

⇒Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

Droites

Une droite est un ensemble de points alignés. Pour définir une (équation de) droite, on exploite donc les deux points de vue sur l'alignement.

Droites

Une droite est un ensemble de points alignés. Pour définir une (équation de) droite, on exploite donc les deux points de vue sur l'alignement.

Théorème - Utilisation des complexes

1. La droite (AB) privée des points A et B (d'affixes respectives a et b) est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant
$$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv 0[\pi].$$
2. La droite (AB) privée du point A est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant
$$\frac{z-b}{z-a} = \overline{\left(\frac{z-b}{z-a}\right)} \Longleftrightarrow (z-b)(\overline{z-a}) = (\overline{z-b})(z-a).$$
les points A et B vérifient également la seconde équation...

Droites

Une droite est un ensemble de points alignés. Pour définir une (équation de) droite, on exploite donc les deux points de vue sur l'alignement.

Théorème - Utilisation des complexes

1. La droite (AB) privée des points A et B (d'affixes respectives a et b) est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant
$$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv 0[\pi].$$
2. La droite (AB) privée du point A est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant
$$\frac{z-b}{z-a} = \overline{\left(\frac{z-b}{z-a}\right)} \Longleftrightarrow (z-b)(\overline{z-a}) = (\overline{z-b})(z-a).$$
les points A et B vérifient également la seconde équation...

Démonstration

Droites

Une droite est un ensemble de points alignés. Pour définir une (équation de) droite, on exploite donc les deux points de vue sur l'alignement.

Théorème - Utilisation des complexes

1. La droite (AB) privée des points A et B (d'affixes respectives a et b) est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant
$$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv 0[\pi].$$
2. La droite (AB) privée du point A est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant
$$\frac{z-b}{z-a} = \overline{\left(\frac{z-b}{z-a}\right)} \Longleftrightarrow (z-b)(\overline{z-a}) = (\overline{z-b})(z-a).$$
les points A et B vérifient également la seconde équation...

Démonstration

Exercice

Donner l'équation de la droite (complexe) qui passe par les points $A(1+i)$ et $B(2-i)$.

Cercle

Théorème - Ligne de niveau - Cercle

Soient A, B, C trois points distincts d'affixes respectives a, b et c.

1. $(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$
2. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.
3. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\dfrac{z-b}{z-a} = -\overline{\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right)}$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A.

Cercle

Théorème - Ligne de niveau - Cercle

Soient A, B, C trois points distincts d'affixes respectives a, b et c.

1. $(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$
2. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.
3. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\dfrac{z-b}{z-a} = -\overline{\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right)}$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A.

Démonstration

⇒Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

Transformations « élémentaires »

Définition - Transformation du plan

On appelle transformation du plan toute bijection du plan dans lui-même.

Transformations « élémentaires »

Définition - Transformation du plan

On appelle transformation du plan toute bijection du plan dans lui-même.

Attention - Projection

Une projection sur une droite n'est pas une transformation du plan.

Translation

Définition - Translation

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application

$$\begin{array}{llll} t_{\vec{u}} : & \mathscr{P} & \to \mathscr{P} & \\ & M & \mapsto M' & \text{tel que } \vec{MM'} = \vec{u} \end{array}$$

En complexes, $t_{\vec{u}}$ est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \mapsto z + z_0$$

où z_0 est l'affixe du vecteur $\vec{u}$.

Translation

Définition - Translation

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application

$$t_{\vec{u}} : \begin{array}{ll} \mathscr{P} & \to \mathscr{P} \\ M & \mapsto M' \text{ tel que } \vec{MM'} = \vec{u} \end{array}$$

En complexes, $t_{\vec{u}}$ est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \mapsto z + z_0$$

où z_0 est l'affixe du vecteur $\vec{u}$.

Fichier geogebra : translation.ggb

Homothétie

Définition - Homothétie

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport le réel $k \neq 0$ l'application

$$h_{\Omega,k} : \begin{array}{ll} \mathscr{P} & \to \mathscr{P} \\ M & \mapsto M' \text{ tel que } \vec{\Omega M'} = k\vec{\Omega M} \end{array}$$

En complexes, $h_{\Omega,k}$ est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \mapsto z_0 + k(z - z_0)$$

où z_0 est l'affixe du point Ω.

Homothétie

Définition - Homothétie

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport le réel $k \neq 0$ l'application

$$\begin{array}{rll} h_{\Omega,k} : & \mathscr{P} & \to \mathscr{P} \\ & M & \mapsto M' \text{ tel que } \vec{\Omega M'} = k\vec{\Omega M} \end{array}$$

En complexes, $h_{\Omega,k}$ est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \mapsto z_0 + k(z - z_0)$$

où z_0 est l'affixe du point Ω.

Fichier geogebra : homothetie.ggb

Rotation

Rotation

On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ l'application

$$\begin{array}{llll} R_{\Omega,\theta}: & \mathscr{P} & \to \mathscr{P} & \\ & M & \mapsto M' \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} \Omega M' = \Omega M \\ (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{array} \right. & \text{si } M \neq \Omega \\ & \Omega & \mapsto \Omega & \end{array}$$

En complexes, $R_{\Omega,\theta}$ est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \mapsto z_0 + e^{i\theta}(z - z_0)$$

où z_0 est l'affixe du point Ω.

Rotation

Rotation

On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ l'application

$$R_{\Omega,\theta} : \begin{array}{lll} \mathscr{P} & \to \mathscr{P} & \\ M & \mapsto M' \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} \Omega M' = \Omega M \\ (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{array} \right. & \text{si } M \neq \Omega \\ \Omega & \mapsto \Omega & \end{array}$$

En complexes, $R_{\Omega,\theta}$ est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \mapsto z_0 + e^{i\theta}(z - z_0)$$

où z_0 est l'affixe du point Ω.

Fichier geogebra : rotation.ggb

Similitudes (directes)

Il s'agit de composition de rotation et d'homothétie...

Définition - Similitude directe

On appelle similitude directe du plan toute transformation représentée dans le plan complexe par une application de la forme

$$z \longmapsto az + b$$

avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Similitudes (directes)

Il s'agit de composition de rotation et d'homothétie...

Définition - Similitude directe

On appelle similitude directe du plan toute transformation représentée dans le plan complexe par une application de la forme

$$z \longmapsto az + b$$

avec $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Remarque Les transformations élémentaires

Représentation et propriétés

Analyse Résultats caractéristiques

Représentation et propriétés

Analyse Résultats caractéristiques

Fichier geogebra : similitude.ggb

Représentation et propriétés

Analyse Résultats caractéristiques

Fichier geogebra : similitude.ggb

Proposition - Similitude directe

Une similitude directe conserve les angles et les rapports des distances.

Si A, B, C sont trois points distincts d'images respectives A', B', C' par cette similitude

Alors

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv (\vec{A'B'}, \vec{A'C'})[2\pi] \qquad \text{et} \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Représentation et propriétés

Analyse Résultats caractéristiques

Fichier geogebra : similitude.ggb

Proposition - Similitude directe

Une similitude directe conserve les angles et les rapports des distances.

Si A, B, C sont trois points distincts d'images respectives A', B', C' par cette similitude

Alors

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv (\vec{A'B'}, \vec{A'C'})[2\pi] \qquad \text{et} \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Démonstration

Caractérisation

Théorème - Caractérisation

Soit f la transformation du plan représentée par $z \mapsto az+b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, f admet un unique point fixe (point invariant) $\Omega(\frac{b}{1-a})$ appelé centre de la similitude.
  f s'écrit alors : $f = h \circ r = r \circ h$ avec
  - r rotation de centre Ω d'angle de mesure $\arg a$
  - h homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

  On dit que $|a|$ est le rapport de la similitude, et $\arg a$ est (la mesure de) l'angle de la similitude.

Caractérisation

Théorème - Caractérisation

Soit f la transformation du plan représentée par $z \mapsto az+b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, f admet un unique point fixe (point invariant) $\Omega(\frac{b}{1-a})$ appelé centre de la similitude.
  f s'écrit alors : $\quad f = h \circ r = r \circ h$ avec
  - r rotation de centre Ω d'angle de mesure $\arg a$
  - h homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

  On dit que $|a|$ est le rapport de la similitude, et $\arg a$ est (la mesure de) l'angle de la similitude.

Démonstration

Caractérisation

Théorème - Caractérisation

Soit f la transformation du plan représentée par $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, f admet un unique point fixe (point invariant) $\Omega(\frac{b}{1-a})$ appelé centre de la similitude.
  f s'écrit alors : $f = h \circ r = r \circ h$ avec
  - r rotation de centre Ω d'angle de mesure $\arg a$
  - h homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

  On dit que $|a|$ est le rapport de la similitude, et $\arg a$ est (la mesure de) l'angle de la similitude.

Démonstration

Remarque Cas particuliers avec $a \neq 1$

Reconnaissance

Corollaire - Caractérisation de la similitude

La similitude de centre d'affixe z_0, de rapport k et d'angle θ est représentée par

$$z \longmapsto z_0 + ke^{i\theta}(z - z_0).$$

Reconnaissance

Corollaire - Caractérisation de la similitude

La similitude de centre d'affixe z_0, de rapport k et d'angle θ est représentée par

$$z \longmapsto z_0 + k e^{i\theta}(z - z_0).$$

Savoir-faire. Reconnaître une similitude

Etant donnée une transformation, pour reconnaître une similitude il faut :

1. chercher le point fixe : la solution de $f(z) = z$.
   On le note z_0, c'est le centre de la similitude.
2. chercher le complexe a tel que $f(z) - z_0 = a(z - z_0)$.
   Ce complexe a donne le rapport et l'angle de la similitude

Composition

Proposition - Composée de similitudes

La composée de deux similitudes est une similitude dont le rapport est le produit des rapports et l'angle, la somme des angles.
On a les cas particuliers suivants :

- la composée de deux translations est une translation de vecteur la somme des deux vecteurs,
- la composée de deux homothéties est soit une homothétie soit une translation,
- la composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre et d'angle la somme des deux angles (éventuellement d'angle nul, i.e. l'identité du plan)

Composition

Proposition - Composée de similitudes

La composée de deux similitudes est une similitude dont le rapport est le produit des rapports et l'angle, la somme des angles.

On a les cas particuliers suivants :

- la composée de deux rotations de centres distincts, d'angles respectifs θ et θ' est :
  - une rotation si $\theta + \theta' \not\equiv 0[2\pi]$
  - une translation (éventuellement de vecteur nul, i.e. l'identité) sinon.

Composition

Proposition - Composée de similitudes

La composée de deux similitudes est une similitude dont le rapport est le produit des rapports et l'angle, la somme des angles.
On a les cas particuliers suivants :

- la composée de deux rotations de centres distincts, d'angles respectifs θ et θ' est :
  - une rotation si $\theta+\theta' \not\equiv 0[2\pi]$
  - une translation (éventuellement de vecteur nul, i.e. l'identité) sinon.

Démonstration

Propriétés réciproques et transformations

Corollaire - Transformation réciproque (ou inverse)

On a les transformations réciproques suivantes :

$$t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}; \quad h_{\Omega,k}^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}; \quad R_{\Omega,\theta}^{-1} = R_{\Omega,-\theta}.$$

Propriétés réciproques et transformations

Corollaire - Transformation réciproque (ou inverse)

On a les transformations réciproques suivantes :

$$t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}; \quad h_{\Omega,k}^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}; \quad R_{\Omega,\theta}^{-1} = R_{\Omega,-\theta}.$$

Proposition - Transformation du plan

Etant donné deux segments $[MN]$ et $[M'N']$ de longueurs non nulles, il existe une et une seule similitude directe transformant M en M' et N en N'.

Propriétés réciproques et transformations

Corollaire - Transformation réciproque (ou inverse)

On a les transformations réciproques suivantes :

$$t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}; \quad h_{\Omega,k}^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}; \quad R_{\Omega,\theta}^{-1} = R_{\Omega,-\theta}.$$

Proposition - Transformation du plan

Etant donné deux segments $[MN]$ et $[M'N']$ de longueurs non nulles, il existe une et une seule similitude directe transformant M en M' et N en N'.

Démonstration

Symétries

Définition - Symétries

On appelle :

- Symétrie centrale de centre Ω l'application
$$\begin{array}{rccl} s_\Omega : & \mathscr{P} & \to & \mathscr{P} \\ & M & \mapsto & M' \text{ tel que } \vec{\Omega M'} = -\vec{\Omega M} \end{array}$$
En complexes, s_Ω est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto 2z_0 - z$ où z_0 est l'affixe du point Ω.
- Symétrie orthogonale d'axe la droite $\mathscr{D}$ (ou réflexion d'axe $\mathscr{D}$) l'application
$$\begin{array}{rccl} s_\mathscr{D} : & \mathscr{P} & \to & \mathscr{P} \\ & M & \mapsto & M' \text{ tel que } \begin{cases} M' = M \text{ si } M \in \mathscr{D} \\ \mathscr{D} \text{ est la médiatrice de } [MM'] \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$
La symétrie orthogonale par rapport à Ox est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \overline{z}$.

Définition

Remarque Symétrie centrale

Définition

Remarque Symétrie centrale

Attention. Réflexion

Une réflexion n'est pas une similitude directe

Involution

Proposition - Involution

Une symétrie est une transformation du plan qui vérifie $s^{-1} = s$.

Involution

Proposition - Involution

Une symétrie est une transformation du plan qui vérifie $s^{-1} = s$.

Démonstration

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

- Ligne de niveau : la droite $\arg(\vec{AB}, \vec{A'B'}) \equiv 0[\pi]$

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

- Ligne de niveau : la droite $\arg(\vec{AB}, \vec{A'B'}) \equiv 0[\pi]$
- Ligne de niveau : le cercle de diamètre $[AB]$
  est l'ensemble des points M tel que $(MA) \perp (MB)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

$\Rightarrow$ Transformations géométriques du plan

- Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- Similitude (direct) : mélange : $z \longmapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- Similitude (direct) : mélange : $z \mapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)
- Elle conserve le rapport des distances et des angles.

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- Similitude (direct) : mélange : $z \mapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)
- Elle conserve le rapport des distances et des angles.
- Trouver le centre (point fixe), puis l'angle ($\arg k$) et le rapport ($|k|$) si $f(z) - z_0 = k(z -_0)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- Similitude (direct) : mélange : $z \longmapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)
- Elle conserve le rapport des distances et des angles.
- Trouver le centre (point fixe), puis l'angle ($\arg k$) et le rapport ($|k|$) si $f(z) - z_0 = k(z - _0)$
- Composition de similitude et similitude réciproque

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- Similitude (direct) : mélange : $z \mapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)
- Elle conserve le rapport des distances et des angles.
- Trouver le centre (point fixe), puis l'angle ($\arg k$) et le rapport ($|k|$) si $f(z) - z_0 = k(z - _0)$
- Composition de similitude et similitude réciproque
- Unicité de similitude étant donné deux couples de points.

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- Similitude (direct) : mélange : $z \mapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)
- Elle conserve le rapport des distances et des angles.
- Trouver le centre (point fixe), puis l'angle ($\arg k$) et le rapport ($|k|$) si $f(z) - z_0 = k(z -_0)$
- Composition de similitude et similitude réciproque
- Unicité de similitude étant donné deux couples de points.
- Symétrie centrale : $z \mapsto 2z_0 - z$?

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- Similitude (direct) : mélange : $z \longmapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)
- Elle conserve le rapport des distances et des angles.
- Trouver le centre (point fixe), puis l'angle ($\arg k$) et le rapport ($|k|$) si $f(z) - z_0 = k(z -_0)$
- Composition de similitude et similitude réciproque
- Unicité de similitude étant donné deux couples de points.
- Symétrie centrale : $z \longmapsto 2z_0 - z$?
- Symétrie axiale : $z \longmapsto 2z_0 - z$?

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- Similitude (direct) : mélange : $z \mapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)
- Elle conserve le rapport des distances et des angles.
- Trouver le centre (point fixe), puis l'angle ($\arg k$) et le rapport ($|k|$) si $f(z) - z_0 = k(z -_0)$
- Composition de similitude et similitude réciproque
- Unicité de similitude étant donné deux couples de points.
- Symétrie centrale : $z \mapsto 2z_0 - z$?
- Symétrie axiale : $z \mapsto 2z_0 - z$?
- Ce sont des involutions $s^2 = \mathrm{id}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

Pour la prochaine fois

- Lecture : chap 11 : Applications.
- Exercice n° 95 & 100