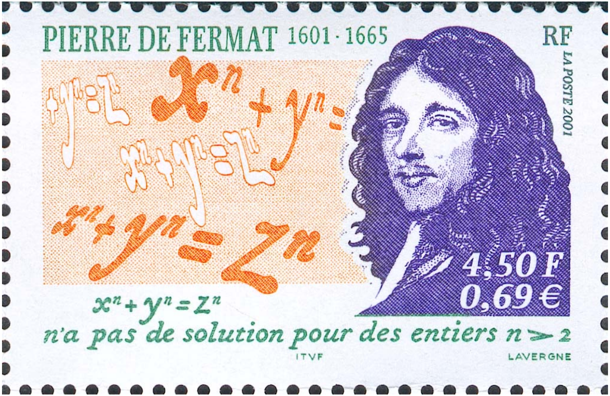

Leçon 15 - Applications (entre ensembles)

2 octobre 2024

⇒ Applications de E dans F

⇒ Lien fonction et équation. Qualités pour les applications

1.Problèmes

2. Applications de E dans F

2.1. Vocabulaire lié aux applications

2.2. Bijections (injections et surjections)

Problèmes

Problème - Qualités des fonctions

Problèmes

Problème - Qualités des fonctions

Problème - Description d'ensembles simples

Problèmes

Problème - Qualités des fonctions

Problème - Description d'ensembles simples

Problème - Cardinal fini. Cardinal infini

Problèmes

Problème - Qualités des fonctions

Problème - Description d'ensembles simples

Problème - Cardinal fini. Cardinal infini

Problème - Famille $(O_i)_{i\in I}$

$\Rightarrow$ **Applications de E dans F**

$\Rightarrow$ **Lien fonction et équation. Qualités pour les applications**

Heuristique

Heuristique - Application (définition non formelle)

Une application d'un ensemble E dans un ensemble F est un "procédé" qui associe à chaque élément $x \in E$ un élément $f(x) \in F$. Une telle application est notée

$$f: \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

$f(x)$ est appelé image de x par f ;
l'ensemble E est appelé ensemble de départ de l'application f ;
l'ensemble F est appelé ensemble d'arrivée de f.
On a donc une application de E dans F dès qu'à tout élément $x \in E$ on peut associer sans ambiguïté un élément $f(x) \in F$ (c'est-à-dire s'il y en a un et un seul possible).

Définition

Une application est donc déterminée par la donnée des couples $(x, f(x))$ où x parcourt **tout** E, d'où la définition plus formelle :

Définition

Une application est donc déterminée par la donnée des couples $(x, f(x))$ où x parcourt **tout** E, d'où la définition plus formelle :

Définition - Application

Soient E et F deux ensembles et $\mathscr{G} \subset E \times F$ vérifiant

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F, \text{tel que} (x, y) \in \mathscr{G}.$$

La donnée d'un tel triplet $(E, F, \mathscr{G})$ s'appelle une application de E dans F. On note

$$\begin{aligned} f : \quad & E \to F \\ & x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

où y est l'unique élément de F vérifiant $(x, y) \in \mathscr{G}$.
$\mathscr{G}$ s'appelle le graphe de l'application. On le note souvent Γ_f.
On a donc $\Gamma_f = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$.

Méthodes

Remarque Fonctions ou applications ?

Méthodes

Remarque Fonctions ou applications ?

Savoir-faire. Montrer une égalité de deux fonctions

Soient $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ deux applications. f et g sont égales si et seulement si :

- $E = E'$ (même ensemble de départ),
- $F = F'$ (même ensemble d'arrivée),
- $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

Ensemble de fonctions

Définition - Ensemble de fonctions

On notera $\mathscr{F}(E,F)$ (on trouve aussi les notations $\mathscr{A}(E,F)$ ou F^E) l'ensemble des applications (ou fonctions) de E dans F.

Ensemble de fonctions

Définition - Ensemble de fonctions

On notera $\mathscr{F}(E,F)$ (on trouve aussi les notations $\mathscr{A}(E,F)$ ou F^E) l'ensemble des applications (ou fonctions) de E dans F.

Exemple Classiques

Ensemble de fonctions

Définition - Ensemble de fonctions

On notera $\mathscr{F}(E,F)$ (on trouve aussi les notations $\mathscr{A}(E,F)$ ou F^E) l'ensemble des applications (ou fonctions) de E dans F.

Exemple Classiques

Définition - Restriction et prolongement

Soit $f : E \to F$ une application.

- Soit $A \subset E$. **La** restriction de f à A, notée $f_{|A}$, est l'application
$$f_{|A} : \begin{array}{l} A \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$
- Si $E \subset B$, une application $\overline{f} : B \to F$ est **un** prolongement à B de l'application f si $\overline{f}_{|E} = f$, c'est-à-dire si $\forall x \in E, \overline{f}(x) = f(x)$.

Composition

Définition - Composée

Soient deux applications $f : E \to F, g : F \to G$. On définit l'application composée, notée $h = g \circ f$, de E dans G par

$$\forall x \in E, h(x) = g(f(x))$$

Composition

Définition - Composée

Soient deux applications $f : E \to F, g : F \to G$. On définit l'application composée, notée $h = g \circ f$, de E dans G par

$$\forall x \in E, h(x) = g(f(x))$$

Exemple Identité

Composition

Définition - Composée

Soient deux applications $f : E \to F, g : F \to G$. On définit l'application composée, notée $h = g \circ f$, de E dans G par

$$\forall x \in E, h(x) = g(f(x))$$

Exemple Identité

Remarque Représentation

Propriétés

Attention. Non commutativité

En général, même lorsque les deux applications $g \circ f$ et $f \circ g$ ont un sens, elles sont différentes.

Propriétés

Attention. Non commutativité

En général, même lorsque les deux applications $g \circ f$ et $f \circ g$ ont un sens, elles sont différentes.

Proposition - Associativité de $\circ$

Pour trois applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ on a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

On peut donc noter $h \circ g \circ f$.

Propriétés

Attention. Non commutativité

En général, même lorsque les deux applications $g \circ f$ et $f \circ g$ ont un sens, elles sont différentes.

Proposition - Associativité de $\circ$

Pour trois applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ on a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

On peut donc noter $h \circ g \circ f$.

Démonstration

$\Rightarrow$ Applications de E dans F

$\Rightarrow$ Lien fonction et équation. Qualités pour les applications

Applications injectives ou surjectives

Heuristique - Résoudre une équation

Une fonction est de la forme : $E \xrightarrow{f} F$. A tout x de E, f donne une valeur de F.
Résoudre une équation est toujours le problème inverse :
Sont données : $E \xrightarrow{f} F$ et $b \in F$. Il s'agit de trouver $x \in F$ tel que $f(x) = b$.
Les questions naturelles sont les suivantes :

- Cette équation admet-elle (au moins) une solution ?
- Cette équation admet-elle au plus une solution ?
- Cette équation admet-elle exactement une solution ? Ce qui évite les quiproquos...

Applications injectives ou surjectives

Définition - Injection et surjection

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que

- f est injective (est une injection) si $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;
- f est surjective (est une surjection) si $\forall y \in F, \exists x \in E \mid y = f(x)$.

Applications injectives ou surjectives

Définition - Injection et surjection

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que

- f est injective (est une injection) si $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;
- f est surjective (est une surjection) si $\forall y \in F, \exists x \in E \mid y = f(x)$.

Remarque Notation

$f : E \hookrightarrow F$ et $f : E \twoheadrightarrow F$.

Applications injectives ou surjectives

Définition - Injection et surjection

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que

- f est injective (est une injection) si $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;
- f est surjective (est une surjection) si $\forall y \in F, \exists x \in E \mid y = f(x)$.

Remarque Notation

$f : E \hookrightarrow F$ et $f : E \twoheadrightarrow F$.

<u>Exercice</u>

Montrer que f est injective ssi $\forall\ b \in F$, $f(x) = b$ admet au plus une solution.

Montrer que f est surjective ssi $\forall\ b \in F$, $f(x) = b$ admet toujours (au moins) une solution.

Applications injectives ou surjectives

Savoir-faire. Autres formulations équivalentes

Il y a différentes façons équivalentes de formuler ces propriétés :

- Dire que f est injective revient à dire (par contraposée) que :

  $$\forall (x,x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

  c'est-à-dire que deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont des images distinctes.
- Dire que f est surjective revient à dire que tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent.

Applications injectives ou surjectives

Savoir-faire. Autres formulations équivalentes

Il y a différentes façons équivalentes de formuler ces propriétés :

- Dire que f est injective revient à dire (par contraposée) que :

$$\forall (x,x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

  c'est-à-dire que deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont des images distinctes.
- Dire que f est surjective revient à dire que tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent.

Exemple $x \mapsto x^2, \quad x \mapsto x^3, \quad x \mapsto \sin x$

Exercices

<u>Exercice</u>

L'application

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x - y, 2x + y) \end{array}$$

est-elle injective ? surjective ?

Mêmes questions avec

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto (x - y, 2x + y, x - 3y) \end{array}$$

Exercices

<u>Exercice</u>

L'application

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (x-y, 2x+y) \end{array}$$

est-elle injective ? surjective ?

Mêmes questions avec

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x-y, 2x+y, x-3y) \end{array}$$

<u>Exercice</u>

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \\ z \mapsto \exp z \end{array}$$

est-elle injective ? surjective ?

Stratégies

Remarque Les ensembles qui sont importants !

Stratégies

Remarque Les ensembles qui sont importants !

Heuristique. Stratégies

Soit $f : E \to F$. Il est pratique que f soit bijective, mais cela ne nous appartient pas en règle générale.
Toutefois il est possible de rendre :

- f surjective en restreignant « simplement » l'ensemble d'arrivée à $f(E)$;
- f injective en restreignant l'ensemble de départ ou plus fréquemment en considérant non plus $f : E \to F$, mais $\overline{f} : \frac{E}{\mathscr{R}_f} \to G, \overline{x} \mapsto f(x)$.

Stratégies

Remarque Les ensembles qui sont importants !

Heuristique. Stratégies

Soit $f : E \to F$. Il est pratique que f soit bijective, mais cela ne nous appartient pas en règle générale.
Toutefois il est possible de rendre :

- f surjective en restreignant « simplement » l'ensemble d'arrivée à $f(E)$;
- f injective en restreignant l'ensemble de départ ou plus fréquemment en considérant non plus $f : E \to F$, mais $\overline{f} : \frac{E}{\mathscr{R}_f} \to G, \overline{x} \mapsto f(x)$.

Exercice

Montrer que pour cette dernière stratégie $\overline{f}$ est bien définie et qu'elle est injective.

Composition

Théorème - Propriétés des composées

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
Si f et g sont injectives (respectivement surjectives), alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective).

Composition

Théorème - Propriétés des composées

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
Si f et g sont injectives (respectivement surjectives), alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective).

Démonstration

Composition

Théorème - Propriétés des composées

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
Si f et g sont injectives (respectivement surjectives), alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective).

Démonstration

Exercice

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que :

- si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
- si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Applications bijectives

Pour que l'equation $f(x) = b$ admette une unique solution, quel que soit $b \in F$, il faut (et il suffit) que f soit bijective :

Applications bijectives

Pour que l'equation $f(x) = b$ admette une unique solution, quel que soit $b \in F$, il faut (et il suffit) que f soit bijective :

Définition - Application bijective

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est bijective (ou est une bijection) de E sur F si si f est injective et surjective.
Dire que f est bijective revient à dire que :

$$\forall\ y \in F, \exists\ !x \in E \quad \text{tel que} \quad y = f(x)$$

c'est-à-dire que tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un et un seul antécédent.

Application réciproque

Définition - Application réciproque

Soit f une bijection de E sur F, on définit une application g par

$$\begin{array}{rcll} g: & F \to & E & \\ & y \mapsto & x & | \, y = f(x) \text{ (unique antécédent de } y \text{ par } f) \end{array}$$

Cette application g est elle-même bijective et appelée bijection réciproque de f, et notée f^{-1}.

Application réciproque

Définition - Application réciproque

Soit f une bijection de E sur F, on définit une application g par

$$\begin{array}{rrcl} g: & F & \to & E \\ & y & \mapsto & x \quad \mid y = f(x) \text{ (unique antécédent de } y \text{ par } f) \end{array}$$

Cette application g est elle-même bijective et appelée bijection réciproque de f, et notée f^{-1}.

Démonstration

Savoir-faire

Savoir-faire. Critère pour montrer la bijectivité

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.
Alors f et g sont bijectives et $g = f^{-1}$

Savoir-faire

Savoir-faire. Critère pour montrer la bijectivité

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.
Alors f et g sont bijectives et $g = f^{-1}$

Exercice

Soit

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ll} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ n \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ n-1 \text{ si } n \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

Etudier l'injectivité et la surjectivité des applications f et g.
Déterminer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Conclusion ?

Relation f et f^{-1}.

Proposition - Relation entre f et f^{-1}

Si f est une bijection de E sur F, on a

$$\begin{array}{cl} \forall x \in E, (f^{-1} \circ f)(x) = x & \text{soit } f^{-1} \circ f = Id_E; \\ \forall y \in F, (f \circ f^{-1})(y) = y & \text{soit } f \circ f^{-1} = Id_F; \\ y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y); & \\ (f^{-1})^{-1} = f & \end{array}$$

Relation f et f^{-1}.

Proposition - Relation entre f et f^{-1}

Si f est une bijection de E sur F, on a

$$\begin{array}{cl} \forall x \in E, (f^{-1} \circ f)(x) = x & \text{soit } f^{-1} \circ f = Id_E; \\ \forall y \in F, (f \circ f^{-1})(y) = y & \text{soit } f \circ f^{-1} = Id_F; \\ y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y); & \\ (f^{-1})^{-1} = f & \end{array}$$

Démonstration

Relation f et f^{-1}.

Proposition - Relation entre f et f^{-1}

Si f est une bijection de E sur F, on a

$$\begin{array}{ll} \forall x \in E, (f^{-1} \circ f)(x) = x & \text{soit } f^{-1} \circ f = Id_E; \\ \forall y \in F, (f \circ f^{-1})(y) = y & \text{soit } f \circ f^{-1} = Id_F; \\ y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y); & \\ (f^{-1})^{-1} = f & \end{array}$$

Démonstration

Exercice

Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{z+2i}{z-i}$ Montrer que l'on peut trouver $F \subset \mathbb{C}$ tel que l'application $\overline{f}$ de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans F définie par $\overline{f}(z) = f(z)$ soit une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.

Réciproque d'une composition

Théorème - Bijection réciproque d'une composée

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux bijections, alors $g \circ f$ est une bijection et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Réciproque d'une composition

Théorème - Bijection réciproque d'une composée

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux bijections, alors $g \circ f$ est une bijection et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application de E dans F

$\Rightarrow$ Lien fonction et équation. Qualités pour les applications

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application de E dans F

- C'est une machine : on rentre x de E (tous les éléments de E sont envisageables),
  il sort un élément de F, noté $f(x)$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application de E dans F

- C'est une machine : on rentre x de E (tous les éléments de E sont envisageables),
  il sort un élément de F, noté $f(x)$.
- Graphe de fonctions
- Qualités particulières : égalité de fonctions, composition,

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application de E dans F

- C'est une machine : on rentre x de E (tous les éléments de E sont envisageables),
  il sort un élément de F, noté $f(x)$.
- Graphe de fonctions
- Qualités particulières : égalité de fonctions, composition,
- si l'addition sur F existe, alors on peut additionner des fonctions...

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application de E dans F

- C'est une machine : on rentre x de E (tous les éléments de E sont envisageables),
  il sort un élément de F, noté $f(x)$.
- Graphe de fonctions
- Qualités particulières : égalité de fonctions, composition,
- si l'addition sur F existe, alors on peut additionner des fonctions. . .
- La composition n'est qu'associative.

Conclusion

Objectifs

⇒ Application de E dans F

- C'est une machine : on rentre x de E (tous les éléments de E sont envisageables),
  il sort un élément de F, noté $f(x)$.
- Graphe de fonctions
- Qualités particulières : égalité de fonctions, composition,
- si l'addition sur F existe, alors on peut additionner des fonctions. . .
- La composition n'est qu'associative.
- Restrictions de fonction. Prolongements de fonction.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application de E dans F

$\Rightarrow$ Lien fonction et équation. Qualités pour les applications

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application de E dans F

$\Rightarrow$ Lien fonction et équation. Qualités pour les applications

- Application et composition d'application

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application de E dans F

$\Rightarrow$ Lien fonction et équation. Qualités pour les applications

- Application et composition d'application
- Application injective de E : $\forall\ x_1, x_2 \in E$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  L'équation $f(x) = b$ admet au plus une solution sur E, pour tout $b \in F$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application de E dans F

$\Rightarrow$ Lien fonction et équation. Qualités pour les applications

- Application et composition d'application
- Application injective de E : $\forall\ x_1, x_2 \in E$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  L'équation $f(x) = b$ admet au plus une solution sur E, pour tout $b \in F$.
- Application surjective sur F : $\forall\ y \in F$, $\exists\ x \in E$ tel que $f(x) = y$.
  L'équation $f(x) = b$ admet au moins une solution sur E, pour tout $b \in F$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application de E dans F

$\Rightarrow$ Lien fonction et équation. Qualités pour les applications

- Application et composition d'application
- Application injective de E : $\forall\ x_1, x_2 \in E$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  L'équation $f(x) = b$ admet au plus une solution sur E, pour tout $b \in F$.
- Application surjective sur F : $\forall\ y \in F$, $\exists\ x \in E$ tel que $f(x) = y$.
  L'équation $f(x) = b$ admet au moins une solution sur E, pour tout $b \in F$.
- Application bijective de E sur F : $\forall\ y \in F$, $\exists\ !x \in E$ tel que $f(x) = y$
  L'équation $f(x) = b$ admet exactement une solution sur E, pour tout $b \in F$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application de E dans F

$\Rightarrow$ Lien fonction et équation. Qualités pour les applications

- Application et composition d'application
- Application injective de E : $\forall\ x_1, x_2 \in E$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  L'équation $f(x) = b$ admet au plus une solution sur E, pour tout $b \in F$.
- Application surjective sur F : $\forall\ y \in F$, $\exists\ x \in E$ tel que $f(x) = y$.
  L'équation $f(x) = b$ admet au moins une solution sur E, pour tout $b \in F$.
- Application bijective de E sur F : $\forall\ y \in F$, $\exists\ !x \in E$ tel que $f(x) = y$
  L'équation $f(x) = b$ admet exactement une solution sur E, pour tout $b \in F$.
- La composition garde le caractère injectif, surjectif, bijectif respectivement.
  En particulier si f et g sont bijectif, alors $f \circ g$ aussi et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Application de E dans F

⇒ Lien fonction et équation. Qualités pour les applications

- Application et composition d'application
- Application injective de E : $\forall\ x_1, x_2 \in E$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  L'équation $f(x) = b$ admet au plus une solution sur E, pour tout $b \in F$.
- Application surjective sur F : $\forall\ y \in F$, $\exists\ x \in E$ tel que $f(x) = y$.
  L'équation $f(x) = b$ admet au moins une solution sur E, pour tout $b \in F$.
- Application bijective de E sur F : $\forall\ y \in F$, $\exists\ !x \in E$ tel que $f(x) = y$
  L'équation $f(x) = b$ admet exactement une solution sur E, pour tout $b \in F$.
- La composition garde le caractère injectif, surjectif, bijectif respectivement.
  En particulier si f et g sont bijectif, alors $f \circ g$ aussi et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Application de E dans F

$\Rightarrow$ Lien fonction et équation. Qualités pour les applications

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chap 11- Applications (entre ensembles)
  4. Fonctions indicatrices. 5. Cardinal d'ensemble fini
  6. Familles
- Exercice n° 236 et 237
- TD de jeudi :
  8h-10h : N° 92, 94, 240, 241, 250
  10h-12h : N° 93, 95, 244, 243, 245, 249