

## Leçon 16 - Applications (entre ensembles)

$$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

## Leçon 16 - Applications (entre ensembles)

3 octobre 2024

⇒ Images directes et réciproque

⇒ Indicatrice d'ensemble

1. Problèmes

2. Applications de  $E$  dans  $F$

3. Image directe, image réciproque d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un ensemble

4. Fonction indicatrice

4.1. Définition

4.2. Propriétés ensemblistes et calcul avec fonctions  
indicatrices

⇒  $f(A), f^{-1}(B)$

⇒ Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

## ⇒ Images directes et réciproque

## ⇒ Indicatrice d'ensemble

$$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$$

⇒ Indicatrice  
d'ensemble

### 1. Problèmes

1. Problèmes

### 2. Applications de $E$ dans $F$

2.  $f : E \rightarrow F$

### 3. Image directe, image réciproque d'un ensemble

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

#### 3.1. Image directe

3.1. Image directe

#### 3.2. Image réciproque d'un ensemble

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

### 4. Fonction indicatrice

4. Fonction  
indicatrice

#### 4.1. Définition

4.1. Définition

#### 4.2. Propriétés ensemblistes et calcul avec fonctions indicatrices

4.2. Calcul

# Et si les applications ne sont pas bijectives

## Heuristique - Si les applications ne sont pas bijectives

Si  $f : E \rightarrow F$  n'est pas bijective, peut-on néanmoins trouver « comme » une application réciproque.

On a vu que tout n'est pas perdu, à condition de limiter l'ensemble de départ (pour tenter de gagner l'injectivité) et de réduire l'ensemble d'arrivée (pour gagner la surjectivité).

Dans le premier cas, on s'intéressera à l'ensemble réciproque de  $F$  par  $f$ , c'est un sous-ensemble de  $E$ .

Dans le second cas, on s'intéressera à l'ensemble image de  $E$  par  $f$ , c'est un sous-ensemble de  $F$ .

$$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$$

⇒ Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

$$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

## Définition - Ensemble image

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application.

L'ensemble des éléments de  $F$  qui admettent un antécédent par  $f$  est une partie de  $F$  appelée ensemble image ou image de  $f$  et notée  $\text{Im } f$  ou parfois  $f(E)$  :

$$\text{Im } f = \{y \in F \mid \exists x \in E; y = f(x)\} = \{f(x), x \in E\}.$$

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

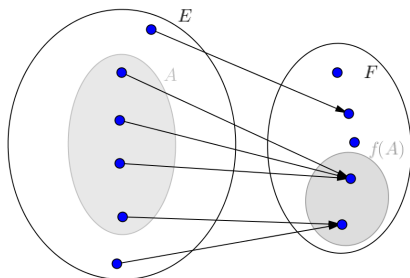
3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

Avec un diagramme sagittal :



$$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

## Remarque Autre écriture

$$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

$$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

**Remarque** Autre écriture

Savoir-faire. Critère de surjectivité. Création de fonction surjective

On a donc

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \text{Im } f = F$$

Et toute application  $f : E \rightarrow F$  définit une surjection en restreignant l'ensemble d'arrivée, c'est à dire en considérant l'application de  $E$  dans  $\text{Im } f$  qui a  $x$  associe  $f(x)$  (que l'on continue usuellement à noter  $f$ , on dit alors que  $f$  est surjective de  $E$  sur  $\text{Im } f$ ).

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul



$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

## Définition - Image directe

Soient  $f : E \rightarrow F$  une application et  $A \subset E$ . On appelle image (directe) de  $A$  par  $f$  la partie de  $F$ , notée  $f(A)$ , définie par

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A; y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\} = \{f(x); x \in A\}.$$

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

## Définition - Image directe

Soient  $f : E \rightarrow F$  une application et  $A \subset E$ . On appelle image (directe) de  $A$  par  $f$  la partie de  $F$ , notée  $f(A)$ , définie par

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A; y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\} = \{f(x); x \in A\}.$$

**Remarque** Autres notations en exploitant  $\text{Im } f$

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

# Image directe

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

## Définition - Image directe

Soient  $f : E \rightarrow F$  une application et  $A \subset E$ . On appelle image (directe) de  $A$  par  $f$  la partie de  $F$ , notée  $f(A)$ , définie par

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A; y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\} = \{f(x); x \in A\}.$$

**Remarque** Autres notations en exploitant  $\text{Im } f$

**Savoir-faire.** Montrer que  $y \in f(A)$

Pour montrer que  $y \in f(A)$  il faut trouver  $x \in A$  tel que  $f(x) = y$ .

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

## Proposition - Stabilité et image

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application et  $A_1, A_2 \subset E$ . Alors

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2);$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

## Proposition - Stabilité et image

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application et  $A_1, A_2 \subset E$ . Alors

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2);$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

## Démonstration

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

# Ensemble image et stabilité

## Proposition - Stabilité et image

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application et  $A_1, A_2 \subset E$ . Alors

$$\begin{aligned} A_1 \subset A_2 &\Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2); \\ f(A_1 \cup A_2) &= f(A_1) \cup f(A_2); \\ f(A_1 \cap A_2) &\subset f(A_1) \cap f(A_2). \end{aligned}$$

## Démonstration

Attention. Une seule inclusion pour l'intersection !

On fera bien attention qu'il n'y a pas l'égalité :

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$

Pour se convaincre on peut penser au cas où  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ .

Par exemple, avec  $f : x \mapsto x^2$ ,  $A_1 = [-2, -1]$  et  $A_2 = [1, 2]$ ,

$$\begin{aligned} \text{alors } f(A_1 \cap A_2) &= f(\emptyset) = \emptyset, \text{ et} \\ f(A_1) \cap f(A_2) &= [1, 4] \cap [1, 4] = [1, 4] \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

## Définition - Partie stable et application induite

Soit  $f : E \rightarrow E$  une application. On dit qu'une partie  $A$  de  $E$  est stable par  $f$  si  $f(A) \subset A$ .

On appelle application induite par  $f$  sur  $A$  l'application

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

## Définition - Partie stable et application induite

Soit  $f : E \rightarrow E$  une application. On dit qu'une partie  $A$  de  $E$  est stable par  $f$  si  $f(A) \subset A$ .

On appelle application induite par  $f$  sur  $A$  l'application

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

## Exemple Point fixe

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul



## ⇒ Images directes et réciproque

## ⇒ Indicatrice d'ensemble

### 1. Problèmes

### 2. Applications de $E$ dans $F$

### 3. Image directe, image réciproque d'un ensemble

#### 3.1. Image directe

#### 3.2. Image réciproque d'un ensemble

### 4. Fonction indicatrice

#### 4.1. Définition

#### 4.2. Propriétés ensemblistes et calcul avec fonctions indicatrices

$$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$$

⇒ Indicatrice  
d'ensemble

### 1. Problèmes

### 2. $f : E \rightarrow F$

### 3. Image directe, image réciproque d'un ensemble

#### 3.1. Image directe

#### 3.2. Image réciproque d'un ensemble

### 4. Fonction indicatrice

#### 4.1. Définition

#### 4.2. Calcul

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

## Définition - Image réciproque

Soient  $f : E \rightarrow F$  une application et  $B \subset F$ . On appelle image réciproque de  $B$  par  $f$  la partie de  $E$ , notée  $f^{-1}(B)$ , définie par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

C'est donc l'ensemble formé des antécédents par  $f$  des éléments de  $B$ .

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

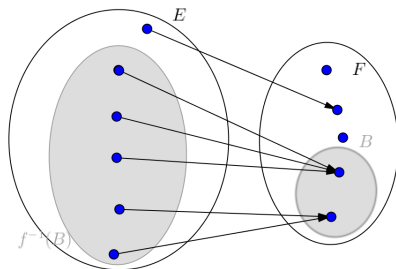
4.1. Définition

4.2. Calcul

$$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

Avec un diagramme sagittal :



1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

# Exemple d'image réciproque

**Exemple** Pour  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto \exp x$

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

# Exemple d'image réciproque

**Exemple** Pour  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto \exp x$

Attention - Ne pas confondre la fonction  $f^{-1}$  et l'ensemble  $f^{-1}(B)$

Il s'agit d'une notation qui ne demande pas que  $f$  soit bijective.  
(voir l'exemple précédent)

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

## Exemple d'image réciproque

**Exemple** Pour  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto \exp x$

Attention - Ne pas confondre la fonction  $f^{-1}$  et l'ensemble  $f^{-1}(B)$

Il s'agit d'une notation qui ne demande pas que  $f$  soit bijective.  
(voir l'exemple précédent)

Savoir-faire. Montrer que  $x \in f^{-1}(B)$

Pour montrer que  $x \in f^{-1}(B)$  il faut et il suffit de montrer que  $f(x) \in B$ .

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

## Exemple Fonction sin

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

Déterminer, si cela a un sens :  $f(0)$ ;  $f(\{0\})$ ;  $f([0, \pi[)$ ;  $f(\mathbb{R})$ ;  
 $f^{-1}(0)$ ;  $f^{-1}(\{0\})$ ;  $f^{-1}([0, +\infty[)$ .

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

## Exemple Fonction sin

Soit

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x$$

Déterminer, si cela a un sens :  $f(0)$  ;  $f(\{0\})$  ;  $f([0, \pi[)$  ;  $f(\mathbb{R})$  ;  
 $f^{-1}(0)$  ;  $f^{-1}(\{0\})$  ;  $f^{-1}([0, +\infty[)$ .

**Remarque** Et si  $f$  est bijective

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul



$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

## Proposition - Stabilité et image réciproque

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application et  $B_1, B_2 \subset F$ . Alors

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2);$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2);$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

## Proposition - Stabilité et image réciproque

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application et  $B_1, B_2 \subset F$ . Alors

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2);$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2);$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

## Démonstration

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

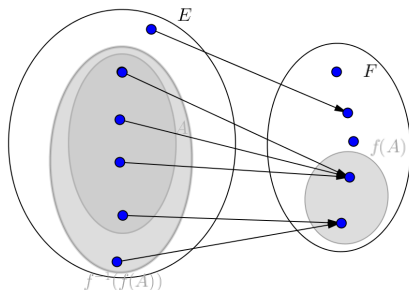
4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

## Images réciproques et stabilité

Avec un diagramme sagittal :



Attention.  $f^{-1}(f(A)) \neq A$  et  $f(f^{-1}(B)) \neq B$

Le schéma montre sur un exemple qu'on a pas l'égalité...

On a au mieux :  $A \subset f^{-1}(f(A))$  et  $f(f^{-1}(B)) \subset B$

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

Attention.  $f^{-1}(f(A)) \neq A$  et  $f(f^{-1}(B)) \neq B$

Le schéma montre sur un exemple qu'on a pas l'égalité...

On a au mieux :  $A \subset f^{-1}(f(A))$  et  $f(f^{-1}(B)) \subset B$

## Exercice

Démontrer ces inclusions. Donner des contre-exemple de l'inclusion réciproque

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

## ⇒ Images directes et réciproque

## ⇒ Indicatrice d'ensemble

### 1. Problèmes

### 2. Applications de $E$ dans $F$

### 3. Image directe, image réciproque d'un ensemble

#### 3.1. Image directe

#### 3.2. Image réciproque d'un ensemble

### 4. Fonction indicatrice

#### 4.1. Définition

#### 4.2. Propriétés ensemblistes et calcul avec fonctions indicatrices

$$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$$

⇒ Indicatrice  
d'ensemble

### 1. Problèmes

### 2. $f : E \rightarrow F$

### 3. Image directe, image réciproque d'un ensemble

#### 3.1. Image directe

#### 3.2. Image réciproque d'un ensemble

### 4. Fonction indicatrice

#### 4.1. Définition

#### 4.2. Calcul

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

## Définition - Fonction indicatrice

Soit  $E$  un ensemble. Pour  $A \subset E$ , on appelle fonction indicatrice de  $A$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , notée  $\mathbb{1}_A$  ou  $\chi_A$ , définie par

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

## Définition - Fonction indicatrice

Soit  $E$  un ensemble. Pour  $A \subset E$ , on appelle fonction indicatrice de  $A$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , notée  $\mathbb{1}_A$  ou  $\chi_A$ , définie par

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

**Remarque** Pourquoi et comment exploiter une telle fonction ?

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

## ⇒ Images directes et réciproque

## ⇒ Indicatrice d'ensemble

### 1. Problèmes

### 2. Applications de $E$ dans $F$

### 3. Image directe, image réciproque d'un ensemble

#### 3.1. Image directe

#### 3.2. Image réciproque d'un ensemble

### 4. Fonction indicatrice

#### 4.1. Définition

#### 4.2. Propriétés ensemblistes et calcul avec fonctions indicatrices

$$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$$

⇒ Indicatrice  
d'ensemble

### 1. Problèmes

### 2. $f : E \rightarrow F$

### 3. Image directe, image réciproque d'un ensemble

#### 3.1. Image directe

#### 3.2. Image réciproque d'un ensemble

### 4. Fonction indicatrice

#### 4.1. Définition

#### 4.2. Calcul



## Proposition - Propriété essentielle de la fonction indicatrice

Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . Alors

$$\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A \subset B$$

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B \text{ (d'où le nom de fonction indicatrice);}$$

$$\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A;$$

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B;$$

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B.$$

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

## Proposition - Propriété essentielle de la fonction indicatrice

Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . Alors

$$\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A \subset B$$

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B \text{ (d'où le nom de fonction indicatrice);}$$

$$\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A;$$

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B;$$

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B.$$

### Exercice

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Que vaut  $\mathbb{1}_{A \Delta B}$  ?

En déduire :  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ .

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

**Proposition - Propriété essentielle de la fonction indicatrice**

Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . Alors

$$\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A \subset B$$

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B \text{ (d'où le nom de fonction indicatrice);}$$

$$\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A;$$

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B;$$

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B.$$

Exercice

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Que vaut  $\mathbb{1}_{A \Delta B}$  ?

En déduire :  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ .

**Démonstration**

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

**Proposition - Propriété essentielle de la fonction indicatrice**

Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . Alors

$$\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A \subset B$$

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B \text{ (d'où le nom de fonction indicatrice);}$$

$$\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A;$$

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B;$$

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B.$$

Exercice

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Que vaut  $\mathbb{1}_{A \Delta B}$  ?

En déduire :  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ .

**Démonstration**

On retrouve évidemment des résultats comparables à ceux vus en logique...

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

## Objectifs

$\Rightarrow$  Images directes et images réciproques d'ensembles par  $f$

$\Rightarrow$  Indicatrice

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Images directes et images réciproques d'ensembles par  $f$

- ▶ Définition de  $\text{Im } f = \{f(x), x \in E\}$ .

⇒  $f(A), f^{-1}(B)$

⇒ Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Images directes et images réciproques d'ensembles par  $f$

- ▶ Définition de  $\text{Im } f = \{f(x), x \in E\}$ .
- ▶  $f$  surjective ssi  $\text{Im } f = F$ .

⇒  $f(A), f^{-1}(B)$

⇒ Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Images directes et images réciproques d'ensembles par  $f$

- ▶ Définition de  $\text{Im } f = \{f(x), x \in E\}$ .
- ▶  $f$  surjective ssi  $\text{Im } f = F$ .
- ▶ Stabilité (ou inclusion) des images

⇒  $f(A), f^{-1}(B)$

⇒ Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul



# Conclusion

## Objectifs

⇒ Images directes et images réciproques d'ensembles par  $f$

- ▶ Définition de  $\text{Im } f = \{f(x), x \in E\}$ .
- ▶  $f$  surjective ssi  $\text{Im } f = F$ .
- ▶ Stabilité (ou inclusion) des images
- ▶ Définition de  $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ ,

⇒  $f(A), f^{-1}(B)$

⇒ Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Images directes et images réciproques d'ensembles par  $f$

- ▶ Définition de  $\text{Im } f = \{f(x), x \in E\}$ .
- ▶  $f$  surjective ssi  $\text{Im } f = F$ .
- ▶ Stabilité (ou inclusion) des images
- ▶ Définition de  $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ ,
- ▶ C'est un ensemble et non application.

⇒  $f(A), f^{-1}(B)$

⇒ Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Images directes et images réciproques d'ensembles par  $f$

- ▶ Définition de  $\text{Im } f = \{f(x), x \in E\}$ .
- ▶  $f$  surjective ssi  $\text{Im } f = F$ .
- ▶ Stabilité (ou inclusion) des images
- ▶ Définition de  $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ ,
- ▶ C'est un ensemble et non application.
- ▶ Stabilité (ou inclusion) des images réciproques

⇒  $f(A), f^{-1}(B)$

⇒ Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

$$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$$

⇒ Indicatrice  
d'ensemble

## Objectifs

⇒ Images directes et images réciproques d'ensembles par  $f$

⇒ Indicatrice

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

## Objectifs

⇒ Images directes et images réciproques d'ensembles par  $f$

⇒ Indicatrice

▶  $\mathbb{1}_A(x) = 1 \iff x \in A.$

⇒  $f(A), f^{-1}(B)$

⇒ Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

## Objectifs

⇒ Images directes et images réciproques d'ensembles par  $f$

⇒ Indicatrice

▶  $\mathbb{1}_A(x) = 1 \iff x \in A.$

▶ Calcul :  $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

⇒  $f(A), f^{-1}(B)$

⇒ Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

## Objectifs

⇒ Images directes et images réciproques d'ensembles par  $f$

⇒ Indicatrice

- ▶  $\mathbb{1}_A(x) = 1 \iff x \in A.$
- ▶ Calcul :  $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
- ▶ Calcul des cardinaux. . .

⇒  $f(A), f^{-1}(B)$

⇒ Indicatrice  
d'ensemble

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul

$\Rightarrow f(A), f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$  Indicatrice  
d'ensemble

## Objectifs

$\Rightarrow$  Images directes et images réciproques d'ensembles par  $f$

$\Rightarrow$  Indicatrice

## Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 11. Applications
  5. Cardinaux
  6. Familles
- ▶ Exercice n°247 & 248

1. Problèmes

2.  $f : E \rightarrow F$

3. Image directe,  
image réciproque  
d'un ensemble

3.1. Image directe

3.2. Image réciproque d'un  
ensemble

4. Fonction  
indicatrice

4.1. Définition

4.2. Calcul