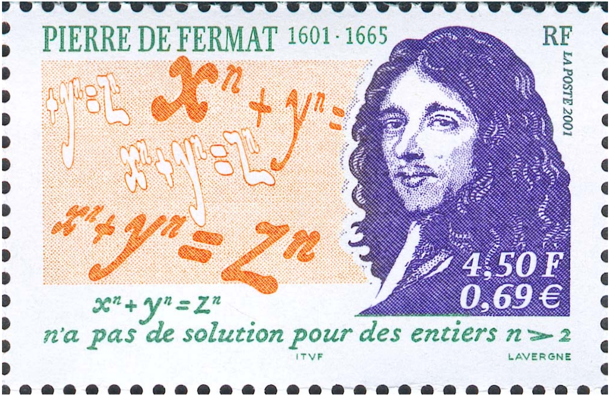


Leçon 19 - Fonctions *à la Euler*

9 octobre 2024

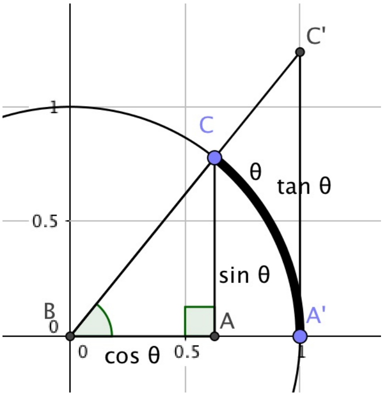
$\Rightarrow$ **Fonctions trigonométriques et réciproque**

$\Rightarrow$ **Fonction puissance et polynomiale**

$\Rightarrow$ **Fonctions trigonométriques et réciproque**

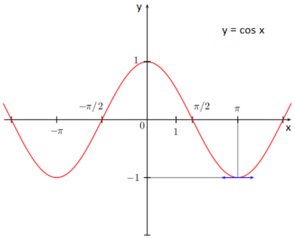
$\Rightarrow$ **Fonction puissance et polynomiale**

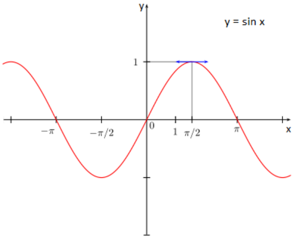
Cercle trigonométrique



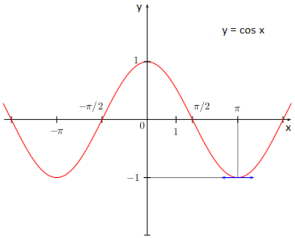
On reprend, de manière analytique (où le paramètre x devient une variable) les fonctions trigonométriques vues précédemment.

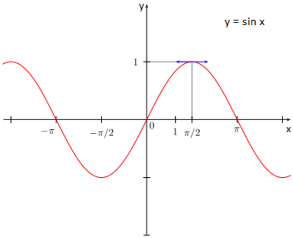
Fonctions cosinus et sinus





Fonctions cosinus et sinus

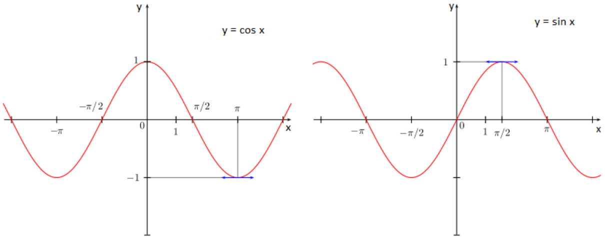




Proposition - Aspect analytique

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.
$\sin$ est une fonction impaire alors que $\cos$ est une fonction paire.

Fonctions cosinus et sinus



Proposition - Aspect analytique

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.
$\sin$ est une fonction impaire alors que $\cos$ est une fonction paire.

Savoir-faire. Transférer un problème trigonométrique « en a »vers « en 0 ».

Il faut exploiter les formules trigonométriques
$\sin(a+h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h$ et
$\cos(a+h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h$, à connaître par coeur.

Inégalité

Analyse Inégalité fondamentale

Inégalité

Analyse Inégalité fondamentale

Proposition - Inégalité

On a pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Inégalité

Analyse Inégalité fondamentale

Proposition - Inégalité

On a pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration

Inégalité

Analyse Inégalité fondamentale

Proposition - Inégalité

On a pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration

Exemple Calculatrice. Calculer $\sin(0,01234)$

Inégalité

Analyse Inégalité fondamentale

Proposition - Inégalité

On a pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration

Exemple Calculatrice. Calculer $\sin(0,01234)$

<u>Exercice</u>

En majorant le module de $e^{ix} - 1$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + (\cos x - 1)^2 \leqslant x^2$.

Tangente

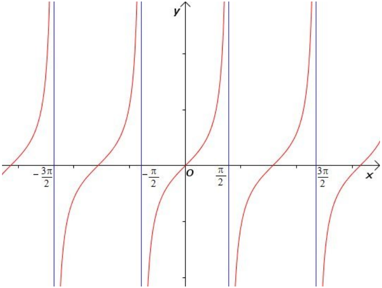
Proposition - Fonction tangente - Aspect analytique

La fonction tangente est ainsi définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ ($\mathbb{R}$ privé des points de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$).
$\tan$ est impaire, π-périodique

Tangente

Proposition - Fonction tangente - Aspect analytique

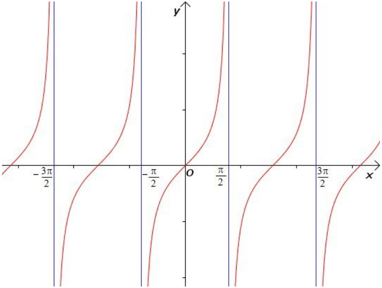
La fonction tangente est ainsi définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$ ($\mathbb{R}$ privé des points de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$).
$\tan$ est impaire, π-périodique



Tangente

Proposition - Fonction tangente - Aspect analytique

La fonction tangente est ainsi définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$ ($\mathbb{R}$ privé des points de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$).
$\tan$ est impaire, π-périodique



Exercice

Etudier et représenter la fonction $\tan$

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonction puissance et polynomiale

Fonction arcsin

Définition - Arcsinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ donc réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$.
La bijection réciproque s'appelle arcsinus,
$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
Elle est impaire, strictement croissante. On a donc :

$$t = \arcsin x \Leftrightarrow \left(\sin t = x \text{ et } t \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\right)$$

Fonction arcsin

Définition - Arcsinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ donc réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$.
La bijection réciproque s'appelle arcsinus,
$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
Elle est impaire, strictement croissante. On a donc :

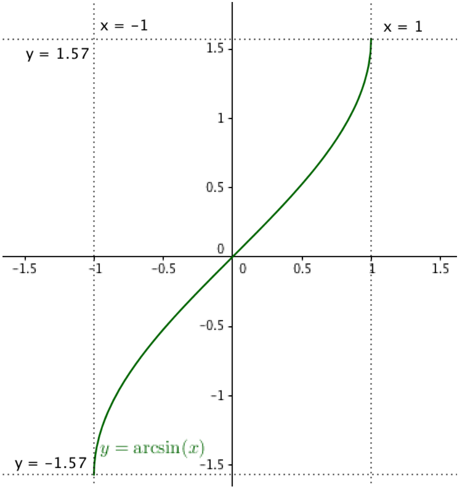
$$t = \arcsin x \Leftrightarrow \left(\sin t = x \text{ et } t \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\right)$$

Proposition - Rappels

On a :

- $\forall x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\quad \arcsin(\sin x) = x$
- $\forall x \in [-1,1]$, $\quad \sin(\arcsin x) = x$
- $\forall x \in [-1,1]$, $\quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
- $\forall x \in]-1,1[$, $\quad \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Fonction arcsin



Fonction arcsin

Analyse Questions

Fonction $\arcsin$

Analyse Questions

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Fonction arccos

Définition - Arccosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
La bijection réciproque s'appelle arccosinus,
$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.
Elle est strictement décroissante et on a donc :

$$t = \arccos x \Leftrightarrow \left(\cos t = x \text{ et } t \in [0,\pi]\right)$$

Fonction arccos

Définition - Arccosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
La bijection réciproque s'appelle arccosinus,
$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.
Elle est strictement décroissante et on a donc :

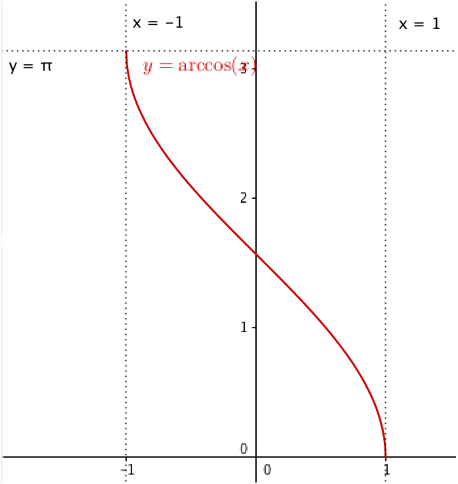
$$t = \arccos x \Leftrightarrow \left(\cos t = x \text{ et } t \in [0,\pi]\right)$$

Proposition - Rappels

On a :

- $\forall x \in [0,\pi], \quad \arccos(\cos x) = x$
- $\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arccos x) = x$
- $\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$
- $\forall x \in [-1,1], x \neq 0, \quad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
- $\forall x \in [-1,1], \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

Fonction arccos



Fonction arccos

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Fonction arctan

Définition - Arctangente

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque s'appelle arctangente,
$\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
Elle est impaire, strictement croissante et on a donc :

$$t = \arctan x \Leftrightarrow \left(\tan t = x \text{ et } t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\right)$$

Fonction arctan

Définition - Arctangente

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque s'appelle arctangente,
$\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
Elle est impaire, strictement croissante et on a donc :

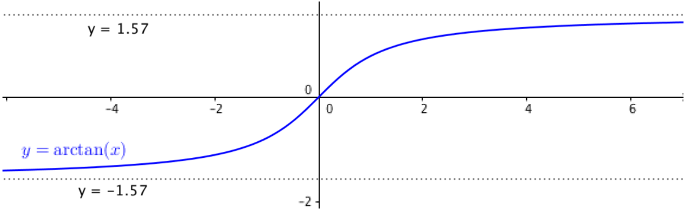
$$t = \arctan x \Leftrightarrow \left(\tan t = x \text{ et } t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\right)$$

Proposition - Rappels

On a :

- $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \qquad \arctan(\tan x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \tan(\arctan x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Fonction arctan



Fonction arctan

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

⇒ **Fonctions trigonométriques et réciproque**

⇒ **Fonction puissance et polynomiale**

Définitions

Définition - Puissance entière > 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on qualifie de fonction puissance entière l'application $x \longmapsto x^n$, i.e. définie par récurrence par $x \longmapsto x \times x^{n-1}$ et $x^0 = 1$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$. C'est une fonction continue.
Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.

Définitions

Définition - Puissance entière > 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on qualifie de fonction puissance entière l'application $x \mapsto x^n$, i.e. définie par récurrence par $x \mapsto x \times x^{n-1}$ et $x^0 = 1$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$. C'est une fonction continue.
Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.

Définition - Puissance entière < 0

Soit $m \in \mathbb{Z}_-$, on qualifie de fonction puissance entière négative l'application $x \mapsto x^m = \dfrac{1}{x^{-n}}$, i.e. définie par récurrence par $x \mapsto \dfrac{1}{x} \times x^{m+1}$ et $x^0 = 1$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.

Définitions

Définition - Puissance entière > 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on qualifie de fonction puissance entière l'application $x \mapsto x^n$, i.e. définie par récurrence par $x \mapsto x \times x^{n-1}$ et $x^0 = 1$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$. C'est une fonction continue.
Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.

Définition - Puissance entière < 0

Soit $m \in \mathbb{Z}_-$, on qualifie de fonction puissance entière négative l'application $x \mapsto x^m = \dfrac{1}{x^{-n}}$, i.e. définie par récurrence par $x \mapsto \dfrac{1}{x} \times x^{m+1}$ et $x^0 = 1$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.

Il faut savoir représenter ces fonctions, en particulier l'hyperbole $\mathscr{C}$ associé à $x \mapsto \frac{1}{x}$ $(m = -1)$.

Morphisme

Proposition - Morphisme

On a pour tout $m,n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $x^m \times x^n = x^{m+n}$.
Vrai également en $x = 0$ si $m,n > 0$.

Morphisme

Proposition - Morphisme

On a pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $x^m \times x^n = x^{m+n}$.
Vrai également en $x = 0$ si $m, n > 0$.

Exercice A démontrer

Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.

Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.
Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour la croissance de $x \mapsto x^n$, on exploite le binôme de Newton. Par exemple :

Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.
Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour la croissance de $x \mapsto x^n$, on exploite le binôme de Newton. Par exemple :

Proposition - Binôme de Newton. Croissance

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$.
Avec $a, x > 0$, on a donc $x < x' \Rightarrow x^n < (x')^n$, soit la croissance de $x \to x^n$ sur $\mathbb{R}$.

Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.
Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour la croissance de $x \mapsto x^n$, on exploite le binôme de Newton. Par exemple :

Proposition - Binôme de Newton. Croissance

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$.
Avec $a, x > 0$, on a donc $x < x' \Rightarrow x^n < (x')^n$, soit la croissance de $x \to x^n$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.
Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour la croissance de $x \mapsto x^n$, on exploite le binôme de Newton. Par exemple :

Proposition - Binôme de Newton. Croissance

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$.
Avec $a, x > 0$, on a donc $x < x' \Rightarrow x^n < (x')^n$, soit la croissance de $x \to x^n$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration
Exercice Faire la démonstration par récurrence.
On fera bien attention aux variables fixées et à celles qui sont libres.

Inégalité de Bernoulli

Proposition - Inégalités de Bernoulli

Soit $x \in]-1, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Pour $x \in]-1, \frac{1}{n}[$, $(1+x)^n \leqslant \dfrac{1}{1-nx}$

Inégalité de Bernoulli

Proposition - Inégalités de Bernoulli

Soit $x \in]-1, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Pour $x \in]-1, \frac{1}{n}[$, $(1+x)^n \leqslant \dfrac{1}{1-nx}$

Démonstration

Inégalité de Bernoulli

Proposition - Inégalités de Bernoulli

Soit $x \in]-1,+\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.
Pour $x \in]-1,\frac{1}{n}[$, $(1+x)^n \leqslant \dfrac{1}{1-nx}$

Démonstration

L'exercice suivant permet de montrer la continuité des fonctions puissances rationnelles.

Exercice

On fixe $n \in \mathbb{N}$.Montrer que $\lim_{x\to 0+}(1+x)^n = 1$, puis la continuité à droite de $t \mapsto t^n$ en 1 et en tout $x \in \mathbb{R}$.

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonction puissance et polynomiale

Définition

Définition - Fonction polynomiale

On appelle fonction polynomiale une fonction de la forme :

$$f : x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où $\forall\ k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) ;
Il s'agit d'une combinaison linéaire finie de puissances entières de la variable x. On parle de polynôme simple ou de polynôme à une variable.
On dit que $f(x) = b$ est une équation polynomiale si f est une fonction polynomiale.

Définition

Définition - Fonction polynomiale

On appelle fonction polynomiale une fonction de la forme :

$$f : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où $\forall\ k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) ;
Il s'agit d'une combinaison linéaire finie de puissances entières de la variable x. On parle de polynôme simple ou de polynôme à une variable.
On dit que $f(x) = b$ est une équation polynomiale si f est une fonction polynomiale.

Remarque Notations

Stabilité opératoire

Par propriétés calculatoires sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

Stabilité opératoire

Par propriétés calculatoires sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

Proposition - Propriété de l'ensemble des fonctions polynomiales

Si f et g sont deux fonctions polynomiales, alors :

- $f+g$ est une fonction polynomiale
- $f\times g$ est une fonction polynomiale
- $f\circ g$ est une fonction polynomiale.

Stabilité opératoire

Par propriétés calculatoires sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

Proposition - Propriété de l'ensemble des fonctions polynomiales

Si f et g sont deux fonctions polynomiales, alors :

- $f+g$ est une fonction polynomiale
- $f\times g$ est une fonction polynomiale
- $f\circ g$ est une fonction polynomiale.

Démonstration

Factorisation multiple

Rappelons :

Théorème - Factorisation multiple

Soit f une fonction polynomiale de degré n. Soit $p \leqslant n$
Si $x_1, x_2, \dots x_p$, p solutions différentes de l'équation $f(x) = 0$ (racines de f).
Alors il existe g_p, fonction polynomiale de degré $n-p$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{K}, \qquad f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_p) \times g_p(x)$$

Factorisation multiple

Rappelons :

Théorème - Factorisation multiple

Soit f une fonction polynomiale de degré n. Soit $p \leqslant n$
Si $x_1, x_2, \dots x_p$, p solutions différentes de l'équation $f(x) = 0$ (racines de f).
Alors il existe g_p, fonction polynomiale de degré $n - p$ tel que

$$\forall\ x \in \mathbb{K}, \qquad f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_p) \times g_p(x)$$

Corollaire - Nombre maximal de solution

Une équation polynomiale de degré n admet au plus n solutions différentes

⇒ **Fonctions trigonométriques et réciproque**

⇒ **Fonction puissance et polynomiale**

Racine

Analyse Bijection de $x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$

Racine

Analyse Bijection de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$

Définition - Racine n-ième

On note $\sqrt[n]{\cdot}$ la bijection réciproque de $x \mapsto x^n$.
On a donc :

$$\begin{array}{lll} \text{si } n \text{ est pair} & \sqrt[n]{x} = \quad x^{1/n} & \text{pour } x \geqslant 0 \\ \text{si } n \text{ est impair} & \sqrt[n]{x} = \begin{cases} x^{1/n} \\ -|x|^{1/n} = -(-x)^{1/n} \end{cases} & \begin{array}{l} \text{pour } x \geqslant 0 \\ \text{pour } x \leqslant 0 \end{array} \end{array}$$

Pour n impair on a donc $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.

Puissance fractionnaire

Définition - Puissance rationnelle

Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ (avec $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$), on qualifie de fonction puissance rationnelle l'application $x \mapsto x^r$ où x^r vérifie $(x^r)^q = x^p$. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}_+$. C'est une fonction croissante et continue (nous le verrons plus tard).

Puissance fractionnaire

Définition - Puissance rationnelle

Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ (avec $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$), on qualifie de fonction puissance rationnelle l'application $x \mapsto x^r$ où x^r vérifie $(x^r)^q = x^p$. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}_+$. C'est une fonction croissante et continue (nous le verrons plus tard).

Exemple $5^{2/3}$

Inégalités complémentaires

Analyse Image de $[0, 1[$ et image de $]1, +\infty[$ par $x \mapsto x^r$

Inégalités complémentaires

Analyse Image de $[0,1[$ et image de $]1,+\infty[$ par $x \mapsto x^r$

Proposition - Comparaison des fonctions puissances

Soient $r < r' \in \mathbb{Q}$.
Alors pour tout $x > 1$, $x^r < x^{r'}$. Et si $x < 1$, $x^r > x^{r'}$

Inégalités complémentaires

Analyse Image de $[0, 1[$ et image de $]1, +\infty[$ par $x \mapsto x^r$

Proposition - Comparaison des fonctions puissances

Soient $r < r' \in \mathbb{Q}$.
Alors pour tout $x > 1$, $x^r < x^{r'}$. Et si $x < 1$, $x^r > x^{r'}$

Demonstration

Inégalités complémentaires

Analyse Image de $[0,1[$ et image de $]1,+\infty[$ par $x \mapsto x^r$

Proposition - Comparaison des fonctions puissances

Soient $r < r' \in \mathbb{Q}$.
Alors pour tout $x > 1$, $x^r < x^{r'}$. Et si $x < 1$, $x^r > x^{r'}$

Demonstration

Attention. Ne pas confondre les variables x et n

Dès maintenant, on fait bien attention lorsqu'on compare à x fixé x^r et x^s et lorsqu'on compare à r fixé : x^r et x'^r.

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier $t \mapsto e^{it}$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Fonctions trigonométriques et réciproque

- Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier $t \mapsto e^{it}$
- Partie réelle : $\cos$ et partie imaginaire : $\sin$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Fonctions trigonométriques et réciproque

- Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier $t \longmapsto e^{it}$
- Partie réelle : $\cos$ et partie imaginaire : $\sin$.
- Propriétés trigonométriques à bien connaître !! (cf TD précédent)

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier $t \mapsto e^{it}$
- Partie réelle : $\cos$ et partie imaginaire : $\sin$.
- Propriétés trigonométriques à bien connaître !! (cf TD précédent)
- Fonction tangente

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier $t \longmapsto e^{it}$
- Partie réelle : $\cos$ et partie imaginaire : $\sin$.
- Propriétés trigonométriques à bien connaître !! (cf TD précédent)
- Fonction tangente
- Inégalité fondamentale : pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ (et imparité)

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \dfrac{1}{x^{-m}}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \dfrac{1}{x^{-m}}$
- Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \dfrac{1}{x^{-m}}$
- Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \dfrac{1}{x^{-m}}$
- Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.
- L'application $x \mapsto x^r$ est continue.

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \dfrac{1}{x^{-m}}$
- Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.
- L'application $x \mapsto x^r$ est continue.
- Si $r < r'$. Si $x > 1$, alors $x^r < x^{r'}$, si $x < 1$, alors $x^r > x^{r'}$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \dfrac{1}{x^{-m}}$
- Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.
- L'application $x \mapsto x^r$ est continue.
- Si $r < r'$. Si $x > 1$, alors $x^r < x^{r'}$, si $x < 1$, alors $x^r > x^{r'}$.
- Polynômes : Stabilité par addition, multiplication et composition des fonctions polynomiales

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \dfrac{1}{x^{-m}}$
- Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.
- L'application $x \mapsto x^r$ est continue.
- Si $r < r'$. Si $x > 1$, alors $x^r < x^{r'}$, si $x < 1$, alors $x^r > x^{r'}$.
- Polynômes : Stabilité par addition, multiplication et composition des fonctions polynomiales
- Polynômes (rappels) : factorisation et nombre maximale de racines.

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \dfrac{1}{x^{-m}}$
- Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.
- L'application $x \mapsto x^r$ est continue.
- Si $r < r'$. Si $x > 1$, alors $x^r < x^{r'}$, si $x < 1$, alors $x^r > x^{r'}$.
- Polynômes : Stabilité par addition, multiplication et composition des fonctions polynomiales
- Polynômes (rappels) : factorisation et nombre maximale de racines.
- Inégalités : pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in]-1,+\infty[$, $(1+x)^n \leqslant 1+nx$

  et pour $x \in]-1, \frac{1}{n}[$, $(1+x)^n \geqslant \dfrac{1}{1-nx}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 3. Fonctions à la Euler
  5. Fonctions exponentielles (et logarithmes)
- Exercice N°57 & 60