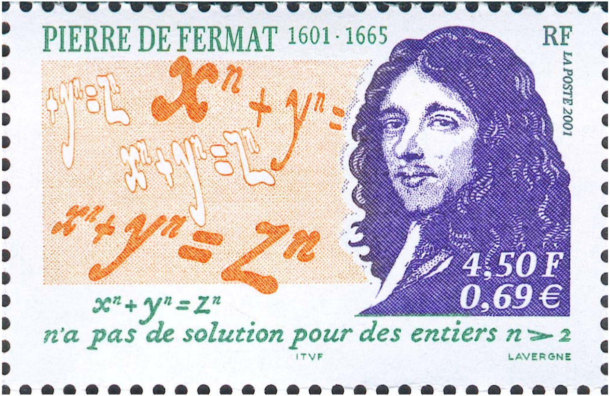


Leçon 20 - Fonctions *à la Euler*

10 octobre 2024

⇒ Fonctions exponentielles

⇒ Fonctions exponentielles

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

5. Exponentielles et logarithmes
   - 5.1. ExponentielleS
   - 5.2. LA fonction exponentielle

Histoire

Heuristique - Histoire

Les mathématiciens ont d'abord rencontrer les fonctions logarithmiques (STEVIN, BRIGGS, NEPER) au XVIeme siècle.
Ils cherchaient un processus pour transformer multiplication (complexe) en addition (plus simple).
Il s'agissait d'interpoler la réciproque des suites géométriques : $n \longmapsto a^n$, vérifiant $a^{n+m} = a^n \times a^m$.
Pour faciliter les démonstrations du cours, nous remonterons l'histoire (d'abord exponentielles avant logarithmes).

⇒ Fonctions exponentielles

Principe

Heuristique. Equation fonctionnelle

Soit $a \in \mathbb{R}$, si $n, m \in \mathbb{N}$, $a^{n+m} = a^n \times a^m$.
Cette relation est centrale si l'on s'intéresse à $x \mapsto a^x$.
Considérons donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous nombres réels $x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
Est-ce qu'une telle relation est suffisante pour définir parfaitement aucune (non car $t \mapsto 2^t$ semble bien aller, au moins pour $t \in \mathbb{Q}$), une fonction f, ou plusieurs ? Et dans ce cas, que rajouter pour différencier ces différentes fonctions ?

Définition

On notera le pluriel :

Définition - Fonctions exponentielles

On qualifie de fonctions exponentielles les applications non nulles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x) \times f(y).$$

Définition

On notera le pluriel :

Définition - Fonctions exponentielles

On qualifie de fonctions exponentielles les applications non nulles $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall\ x,y\in\mathbb{R} : f(x+y)=f(x)\times f(y).$$

Proposition - Exponentielle de rationnels

Si f est une fonction vérifiant $f(x+y)=f(x)\times f(y)$, alors f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Puis : ou bien $f:x\mapsto 0$, ou bien $f(0)=1$.
Donc une fonction exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $f(0)=1$.

Définition

On notera le pluriel :

Définition - Fonctions exponentielles

On qualifie de fonctions exponentielles les applications non nulles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x) \times f(y).$$

Proposition - Exponentielle de rationnels

Si f est une fonction vérifiant $f(x+y) = f(x) \times f(y)$, alors f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Puis : ou bien $f : x \mapsto 0$, ou bien $f(0) = 1$.
Donc une fonction exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $f(0) = 1$.

Démonstration

Extension sur $\mathbb{Q}$ (et $\mathbb{R}$?)

Proposition - Base

Si f est une fonction exponentielle non nulle, alors il existe un nombre $a \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = a^x$.

Extension sur $\mathbb{Q}$ (et $\mathbb{R}$?)

Proposition - Base

Si f est une fonction exponentielle non nulle, alors il existe un nombre $a \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = a^x$.

Savoir-faire. Etude d'une équation fonctionnelle de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$

L'étude d'une équation fonctionnelle se fait souvent de la façon suivante :

1. Par récurrence, en étudiant $f(sn)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et s quelconque.
2. Par imparité/parité (ou autre symétrie), on étudie $f(sm)$ pour $m \in \mathbb{Z}$.
3. On retrouve ensuite le résultat pour $m \in \mathbb{Q}$.
4. Ensuite, on exploitera (plus tard) un argument de continuité ou bien un argument de croissance

Extension sur $\mathbb{Q}$ (et $\mathbb{R}$?)

Proposition - Base

Si f est une fonction exponentielle non nulle, alors il existe un nombre $a \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = a^x$.

Savoir-faire. Etude d'une équation fonctionnelle de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$

L'étude d'une équation fonctionnelle se fait souvent de la façon suivante :

1. Par récurrence, en étudiant $f(sn)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et s quelconque.
2. Par imparité/parité (ou autre symétrie), on étudie $f(sm)$ pour $m \in \mathbb{Z}$.
3. On retrouve ensuite le résultat pour $m \in \mathbb{Q}$.
4. Ensuite, on exploitera (plus tard) un argument de continuité ou bien un argument de croissance

Démonstration

Variations

Proposition - Variations

Soit f une fonction exponentielle non nulle.

- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $f(1)(=a) > 1$.
- f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $f(1)(=a) < 1$.

Variations

Proposition - Variations

Soit f une fonction exponentielle non nulle.

- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $f(1)(=a) > 1$.
- f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $f(1)(=a) < 1$.

Démonstration

Variations

Proposition - Variations

Soit f une fonction exponentielle non nulle.

- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $f(1)(=a) > 1$.
- f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $f(1)(=a) < 1$.

Démonstration

Analyse Comment définir $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Variations

Proposition - Variations

Soit f une fonction exponentielle non nulle.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $f(1)(=a) > 1$.

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $f(1)(=a) < 1$.

Démonstration

Analyse Comment définir $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

<u>Exercice</u>

On note $a = f(1)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = (f(x))^r$.

Quelle formule obtient-on concernant les puissances de a ?

Propriétés. Bilan

On résume et admet les derniers résultats (il nous manque la continuité) :

Théorème - Fonctions exponentielles. Bilan

Les fonctions exponentielles non nulles sont continues.
Elles vérifient : $f(0) = 1$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,
$f(x+y) = f(x) \times f(y)$ et $f(x \times y) = f(x)^y$.
Il existe $a (= f(1)) \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a^x$ (par définition de a^x si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).
Si $a > 1$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
Si $a < 1$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

⇒ Fonctions exponentielles

Naturelle ?

Nous verrons que ces fonctions sont dérivables. L'une a la propriété essentielle de vérifier $f'(0) = 1$. C'est LA fonction exponentielle avec $a = e$ (LE « e »).

Prenons un autre définition.

Naturelle ?

Nous verrons que ces fonctions sont dérivables. L'une a la propriété essentielle de vérifier $f'(0) = 1$. C'est LA fonction exponentielle avec $a = e$ (LE « e »).
Prenons un autre définition.

Définition - La fonction exponentielle naturelle

Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(x_n) = ((1 + \frac{x}{n})^n)$ est croissante, majorée à partir d'un certain rang, donc convergente.
Notons $\exp(x)$ la limite de (x_n).

Naturelle ?

Nous verrons que ces fonctions sont dérivables. L'une a la propriété essentielle de vérifier $f'(0) = 1$. C'est LA fonction exponentielle avec $a = e$ (LE « e »).
Prenons un autre définition.

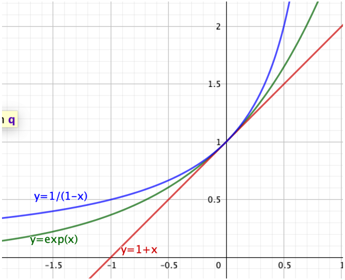
Définition - La fonction exponentielle naturelle

Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(x_n) = ((1 + \frac{x}{n})^n)$ est croissante, majorée à partir d'un certain rang, donc convergente.
Notons $\exp(x)$ la limite de (x_n).

Il faut démontrer la convergence de la suite :
Démonstration

Image mentale : inégalités

A avoir en tête :



Inégalités

Proposition - Inégalités

On a pour tout $x \in]-1,1[$, $1+x \leqslant \exp x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

Inégalités

Proposition - Inégalités

On a pour tout $x \in]-1,1[$, $1+x \leqslant \exp x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

Remarque Elargissement de l'intervalle

Inégalités

Proposition - Inégalités

On a pour tout $x \in]-1,1[$, $1+x \leqslant \exp x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

Remarque Elargissement de l'intervalle

Démonstration

Morphisme exponentiel

Théorème - exp est une fonction exponentielle.

La fonction $x \mapsto \exp x$ est une fonction exponentielle appellée LA fonction exponentielle.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$ où

$$e = \exp(1) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Elle vérifie donc : $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$,

$\exp(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x) \times \exp(y)$ et

$\exp(x \times y) = e^{xy} = (e^x)^y = (\exp(x))^y$.

Morphisme exponentiel

Théorème - $\exp$ est une fonction exponentielle.

La fonction $x \mapsto \exp x$ est une fonction exponentielle appellée LA fonction exponentielle.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$ où

$$e = \exp(1) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Elle vérifie donc : $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$,

$\exp(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x) \times \exp(y)$ et

$\exp(x \times y) = e^{xy} = (e^x)^y = (\exp(x))^y$.

Démonstration

Morphisme exponentiel

Théorème - $\exp$ est une fonction exponentielle.

La fonction $x \mapsto \exp x$ est une fonction exponentielle appellée LA fonction exponentielle.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$ où

$$e = \exp(1) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Elle vérifie donc : $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$,

$\exp(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x) \times \exp(y)$ et

$\exp(x \times y) = e^{xy} = (e^x)^y = (\exp(x))^y$.

Démonstration

Application Evaluation approchée de $(1 + \frac{1}{30})^{100}$

Morphisme exponentiel

Théorème - exp est une fonction exponentielle.

La fonction $x \mapsto \exp x$ est une fonction exponentielle appellée LA fonction exponentielle.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$ où

$$e = \exp(1) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Elle vérifie donc : $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$,

$\exp(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x) \times \exp(y)$ et

$\exp(x \times y) = e^{xy} = (e^x)^y = (\exp(x))^y$.

Démonstration

Application Evaluation approchée de $(1 + \frac{1}{30})^{100}$

Proposition - Formules d'Euler (1746)

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions exponentielles

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Fonctions exponentielles

- $f(x+y) = f(x) \times f(y) \Rightarrow \exists\, a (= f(1))$ tel que $f : x \mapsto a^x$, continue

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Fonctions exponentielles

- $f(x+y) = f(x) \times f(y) \Rightarrow \exists\, a(= f(1))$ tel que $f : x \mapsto a^x$, continue
- Cas particulier de LA fonction exponentielle où $a = \lim(1 + \frac{1}{n})^n$ (de dérivée égale à 1 en 1)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Fonctions exponentielles

- $f(x+y) = f(x) \times f(y) \Rightarrow \exists\, a(= f(1))$ tel que $f : x \mapsto a^x$, continue
- Cas particulier de LA fonction exponentielle où $a = \lim(1+\frac{1}{n})^n$ (de dérivée égale à 1 en 1)
- Inégalités : pour $x \in]-1,1[$, $1+x \leqslant \exp x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions exponentielles

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 3. Fonctions à la Euler
  Fin du cours
- Exercice n°46 & 67