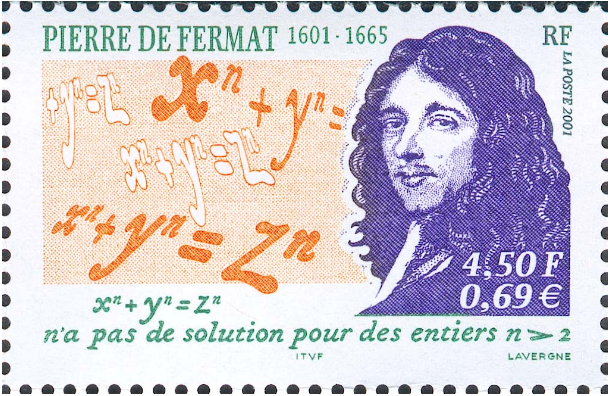


Leçon 21 - Fonctions *à la Euler*

11 octobre 2024

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

⇒ **Fonctions (exponentielles et) logarithmes**

⇒ **Trigonométrie hyperbolique**

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométrique

3. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4. Exponentielles et logarithmes
    4.1. ExponentielleS
    4.2. LA fonction exponentielle
    4.3. LogarithmeS
    4.4. Retour sur les fonctions puissances, avec un exposant non rationnel
    4.5. Croissances comparées
    4.6. Fonctions hyperboliques directes

5. Sommes numériques infinies

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
4. Exponentielles et logarithmes
   4.1. ExponentielleS
   4.2. LA fonction exponentielle
   4.3. LogarithmeS
   4.4. Retour sur les fonctions puissances, avec un exposant non rationnel
   4.5. Croissances comparées
   4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Réciproque

Les fonctions exponentielles non constante égale à 0 ou 1 sont continues et strictement monotone, elles admettent donc une fonction récipropque.

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométrique

3. Poly. et puissances ratio.

4. Exponentielles et logarithmes

4.1. ExponentielleS

4.2. LA fonction exponentielle

4.3. LogarithmeS

4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

4.5. Croissances comparées

4.6. Fonctions hyperboliques directes

5. Sommes numériques infinies

Réciproque

Les fonctions exponentielles non constante égale à 0 ou 1 sont continues et strictement monotone, elles admettent donc une fonction récipropque.

Définition - Fonctions logarithmes

On appelle fonctions logarithmes toute fonctions g réciproques de fonctions exponentielles f non constantes.
Si cette dernière est $x \mapsto a^x$ (avec $a \notin \{0,1\}$), alors la fonction logarithme est qualifiée « de base a ». On note souvent $g = \log_a$ ou $\ln_a$.
Elle est définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifie alors

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}_+,\ g(x \times y) = g(x) + g(y).$$

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Réciproque

Les fonctions exponentielles non constante égale à 0 ou 1 sont continues et strictement monotone, elles admettent donc une fonction récipropque.

Définition - Fonctions logarithmes

On appelle fonctions logarithmes toute fonctions g réciproques de fonctions exponentielles f non constantes.
Si cette dernière est $x \mapsto a^x$ (avec $a \notin \{0,1\}$), alors la fonction logarithme est qualifiée « de base a ». On note souvent $g = \log_a$ ou $\ln_a$.
Elle est définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifie alors

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}_+,\ g(x \times y) = g(x) + g(y).$$

Exemple Différents logarithmes bien connus

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Réciproque

Les fonctions exponentielles non constante égale à 0 ou 1 sont continues et strictement monotone, elles admettent donc une fonction récipropque.

Définition - Fonctions logarithmes

On appelle fonctions logarithmes toute fonctions g réciproques de fonctions exponentielles f non constantes.
Si cette dernière est $x \mapsto a^x$ (avec $a \notin \{0,1\}$), alors la fonction logarithme est qualifiée « de base a ». On note souvent $g = \log_a$ ou $\ln_a$.
Elle est définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifie alors

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+,\ g(x \times y) = g(x) + g(y).$$

Exemple Différents logarithmes bien connus

Démonstration

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
4.1. ExponentielleS
4.2. LA fonction exponentielle
4.3. LogarithmeS
4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4.5. Croissances comparées
4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Bilan

Théorème - Fonctions logarithmes. Bilan

Les fonctions logaritmes sont continues, définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Elles vérifient : $g(1) = 0$ et pour tout $x, y, t \in \mathbb{R}_+$,
$g(x \times y) = g(x) + g(y)$ et $g(x^t) = t \times g(x)$.
Il existe $a(= f(1)) \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) = 1$.
Si $a > 1$, alors g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{0} g = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$.
Si $a < 1$, alors g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{0} g = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Bilan

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes
⇒ Trigonométrie hyperbolique
1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
4.1. ExponentielleS
4.2. LA fonction exponentielle
4.3. LogarithmeS
4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4.5. Croissances comparées
4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Théorème - Fonctions logarithmes. Bilan

Les fonctions logaritmes sont continues, définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Elles vérifient : $g(1) = 0$ et pour tout $x, y, t \in \mathbb{R}_+$,
$g(x \times y) = g(x) + g(y)$ et $g(x^t) = t \times g(x)$.
Il existe $a (= f(1)) \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) = 1$.
Si $a > 1$, alors g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{0} g = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$.
Si $a < 1$, alors g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{0} g = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

Démonstration

Logarithme en base a, à la main

Savoir-faire. Calculer « à la main »le logarithme en base a de x ?

On n'a pas d'autre solution (pour le moment) mais cela est suffisant (compte-tenu de la contrainte que l'on s'est donné) de procéder par dichotomie.
On regarde la suite (a^n) et l'on trouve $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n \leqslant x < a^{n+1}$.
Puis, on sélectionne $a_0 = n$ et $b_0 = n+1$. Puis on peut (par exemple), considérer $c = \frac{a_0+b_0}{2} \in \mathbb{Q}$, évaluer a^c.

Si $a^c < x$, on prend $a_1 = c$ et $b_1 = b_0$, sinon on prend $a_1 = a_0$ et $b_1 = c\dots$

On a deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) convergente vers y avec $a^y \equiv x$, donc $y = \log_a(x)$.

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
4.1. ExponentielleS
4.2. LA fonction exponentielle
4.3. LogarithmeS
4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4.5. Croissances comparées
4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Logarithme naturel

Définition - Le logarithme naturel

La fonction logarithme réciproque de la fonction exponentielle, donc le logarithme en base $e = \exp 1$ est appelé logarithme naturel.
On le note $\ln$.
$\ln$ est définie, continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Numériquement : $\ln(1) = 0$, $\ln e = 1$, $\lim\limits_{0} \ln = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$.
On a les propriétés algébrique : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^b) = b \ln a \ldots$
On a pour tout $u \in]0,2[$, $\ln u \leqslant u - 1$.

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Logarithme naturel

Définition - Le logarithme naturel

La fonction logarithme réciproque de la fonction exponentielle, donc le logarithme en base $e = \exp 1$ est appelé logarithme naturel.
On le note $\ln$.
$\ln$ est définie, continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Numériquement : $\ln(1) = 0$, $\ln e = 1$, $\lim\limits_{0} \ln = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$.
On a les propriétés algébrique : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^b) = b \ln a \ldots$
On a pour tout $u \in]0, 2[$, $\ln u \leqslant u - 1$.

Tout est immédiat, sauf l'inégalité qu'on démontre :

Démonstration

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
4.1. ExponentielleS
4.2. LA fonction exponentielle
4.3. LogarithmeS
4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4.5. Croissances comparées
4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Ecriture explicite

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométrique

3. Poly. et puissances ratio.

4. Exponentielles et logarithmes

4.1. ExponentielleS

4.2. LA fonction exponentielle

4.3. LogarithmeS

4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

4.5. Croissances comparées

4.6. Fonctions hyperboliques directes

5. Sommes numériques infinies

Proposition - Ecriture en fonction du logarithme naturel

Soit g la fonction logarithme de base a, réciproque de $f : x \mapsto a^x$.
Alors on a :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) = a^x = \exp(x \times \ln a) \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}_+, g(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Ecriture explicite

Proposition - Ecriture en fonction du logarithme naturel

Soit g la fonction logarithme de base a, réciproque de $f : x \mapsto a^x$.
Alors on a :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) = a^x = \exp(x \times \ln a) \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}_+, g(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Démonstration

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. $x \to x^r, r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
4. Exponentielles et logarithmes
   4.1. ExponentielleS
   4.2. LA fonction exponentielle
   4.3. LogarithmeS
   4.4. Retour sur les fonctions puissances, avec un exposant non rationnel
   4.5. Croissances comparées
   4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Puissance réelle

Définition - Fonction puissance réelle

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit sur $]0,+\infty[$ la fonction puissance α par :

$$g_\alpha : \begin{array}{ll}]0,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) \end{array}$$

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométrique

3. Poly. et puissances ratio.

4. Exponentielles et logarithmes

4.1. ExponentielleS

4.2. LA fonction exponentielle

4.3. LogarithmeS

4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

4.5. Croissances comparées

4.6. Fonctions hyperboliques directes

5. Sommes numériques infinies

Puissance réelle

Définition - Fonction puissance réelle

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit sur $]0,+\infty[$ la fonction puissance α par :

$$g_\alpha : \begin{array}{ll}]0,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) \end{array}$$

Proposition - Fonction puissance réelle

Elle vérifie les propriétés suivantes :
$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2$, $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,

- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

- Si $\alpha = 0$, g_α est constante égale à 1.
- Si $\alpha > 0$, g_α est croissante et $\lim\limits_{x\to 0^+} g_\alpha(x) = 0$
- Si $\alpha < 0$, g_α est décroissante et $\lim\limits_{x\to 0^+} g_\alpha(x) = +\infty$

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
4.1. ExponentielleS
4.2. LA fonction exponentielle
4.3. LogarithmeS
4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
4.5. Croissances comparées
4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Puissance réelle

Définition - Fonction puissance réelle

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit sur $]0,+\infty[$ la fonction puissance α par :

$$g_\alpha : \begin{array}{ll}]0,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) \end{array}$$

Proposition - Fonction puissance réelle

Elle vérifie les propriétés suivantes :

Pour $\alpha > 0$, on étudie l'existence d'une demi-tangente en 0 :

- Si $\alpha < 1$, la courbe $y = g_\alpha(x)$ admet une tangente verticale en 0.
- Si $\alpha = 1$, la courbe $y = g_\alpha(x)$ admet une tangente de pente 1 en 0.
- Si $\alpha > 1$, la courbe $y = g_\alpha(x)$ admet une tangente horizontale en 0.

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. Retour sur les fonctions puissances, avec un exposant non rationnel
   - **4.5. Croissances comparées**
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Principe mental

Heuristique. Logarithme comme nombre de chiffres

Commençons par une remarque, avec $x = 10^n$, on a
$\dfrac{\ln(x)}{x} = n10^{-n}\ln 10 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
Notons que $\ln 10 \approx 2,302$, donc $\ln x = \ln(10) \times \log_{10}(x)$ et que $\log_{10}(x)$ est en première approximation le nombre de chiffres de x, alors pour x grand, $\ln x$ est le nombre de chiffres de x multiplié par un peu plus de 2.
Exemple : $\ln(123456789) \approx 2,3 \times \log(1,23 \times 10^9) =$
$2,3 \times (9 + \ln(1,23)) \approx 20$, ce qui est petit

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométrique

3. Poly. et puissances ratio.

4. Exponentielles et logarithmes

4.1. ExponentielleS

4.2. LA fonction exponentielle

4.3. LogarithmeS

4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

4.5. Croissances comparées

4.6. Fonctions hyperboliques directes

5. Sommes numériques infinies

Croissances comparées

Il s'agit, a priori, de formes indéterminées. Elles sont levées :

Théorème - Croissance comparée

Soient a et b deux réels strictement positifs. On a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^b}{x^a}=0;\quad \lim_{x\to 0^+} x^a|\ln x|^b=0;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}}{x^b}=+\infty;\quad \lim_{x\to-\infty}|x|^b e^{ax}=0.$$

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
4.1. ExponentielleS
4.2. LA fonction exponentielle
4.3. LogarithmeS
4.4. $x\to x^r$, $r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
4.5. Croissances comparées
4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Croissances comparées

Il s'agit, a priori, de formes indéterminées. Elles sont levées :

Théorème - Croissance comparée

Soient a et b deux réels strictement positifs. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0; \quad \lim_{x\to 0^+} x^a |\ln x|^b = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^b e^{ax} = 0.$$

Démonstration

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Croissances comparées

Il s'agit, a priori, de formes indéterminées. Elles sont levées :

Théorème - Croissance comparée

Soient a et b deux réels strictement positifs. On a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^b}{x^a}=0;\qquad \lim_{x\to 0^+} x^a|\ln x|^b=0;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}}{x^b}=+\infty;\qquad \lim_{x\to-\infty}|x|^b e^{ax}=0.$$

Démonstration

Exercice Fixons $a,b\in\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que pour x grand : $e^{\frac{a}{b+1}x}\geqslant \dfrac{a}{b+1}x$, en déduire

$$\frac{e^{ax}}{x^b}\geqslant\left(\frac{a}{b+1}\right)^{b+1}x.$$

Conclure sur la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}}{x^b}$.

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
4.1. ExponentielleS
4.2. LA fonction exponentielle
4.3. LogarithmeS
4.4. $x\to x^r$, $r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
4.5. Croissances comparées
4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

⇒ **Fonctions (exponentielles et) logarithmes**

⇒ **Trigonométrie hyperbolique**

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
4. Exponentielles et logarithmes
   4.1. ExponentielleS
   4.2. LA fonction exponentielle
   4.3. LogarithmeS
   4.4. Retour sur les fonctions puissances, avec un exposant non rationnel
   4.5. Croissances comparées
   4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Définitions

Définition - Fonctions hyperboliques

Les fonctions ch (cosinus hyperbolique), sh (sinus hyperbolique) et þ (tangente hyperbolique) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{þ}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

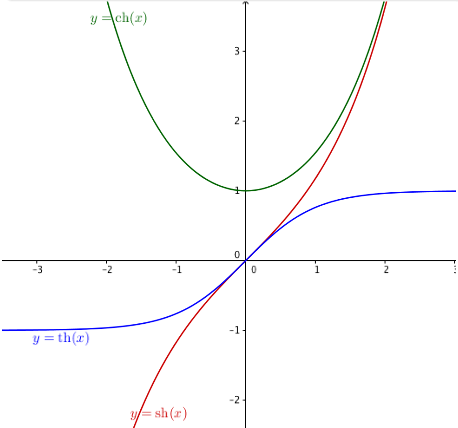
⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes
⇒ Trigonométrie hyperbolique
1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
4.1. ExponentielleS
4.2. LA fonction exponentielle
4.3. LogarithmeS
4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4.5. Croissances comparées
4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Définitions

Définition - Fonctions hyperboliques

Les fonctions ch (cosinus hyperbolique), sh (sinus hyperbolique) et þ (tangente hyperbolique) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{þ}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$



⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes
⇒ Trigonométrie hyperbolique
1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
4.1. ExponentielleS
4.2. LA fonction exponentielle
4.3. LogarithmeS
4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4.5. Croissances comparées
4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Formulaire

Proposition - Fonctions hyperboliques

La fonction ch est paire, les fonctions sh et þ sont impaires.

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \qquad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \qquad \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \times \operatorname{th} b}$$

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes
⇒ Trigonométrie hyperbolique
1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
4.1. ExponentielleS
4.2. LA fonction exponentielle
4.3. LogarithmeS
4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4.5. Croissances comparées
4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Formulaire

Proposition - Fonctions hyperboliques

La fonction ch est paire, les fonctions sh et þ sont impaires.

$$\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}\,x \qquad \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}\,x$$

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

$$\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x = e^x \qquad \mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x = e^{-x}$$

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b \qquad \mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b$$

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}\,a + \mathrm{th}\,b}{1 + \mathrm{th}\,a \times \mathrm{th}\,b}$$

Démonstration

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes
⇒ Trigonométrie hyperbolique
1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
4.1. ExponentielleS
4.2. LA fonction exponentielle
4.3. LogarithmeS
4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4.5. Croissances comparées
4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Extension du binôme

On commence par une extension de notation :

Définition - Extension du coefficient binomial

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
4.1. ExponentielleS
4.2. LA fonction exponentielle
4.3. LogarithmeS
4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4.5. Croissances comparées
4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Extension du binôme

On commence par une extension de notation :

Définition - Extension du coefficient binomial

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

La section suivante donne des résultats connus pour l'essentiel depuis le XVIII siècle, au moins.
Mais les démonstrations satisfaisantes sont plus tardives (ABEL et successeurs du XIX).
Pour vous, elles auront officiellement lieu l'année prochaine lorsque vous verrez le cours sur les séries entières.

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Fonctions comme somme infinie

Proposition - Egalités sommatoires

On a les égalités suivantes :

$x \in ?$	fonction	somme	Auteur (Année)
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	Newton(1669), Leibniz(1691)
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	Newton(1669), Leibniz(1691)
$\mathbb{R}$	$\tan(x)$	$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$	Jac. Bernoulli(1702)
$[-1,1]$	$\arctan(x)$	$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$	Gregory(1671), Leibniz(1674)
$[-1,1]$	$\arcsin(x)$	$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \dots$	Newton(1669)
$\mathbb{R}$	$(1+x)^n$	$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$	Pascal(1654)
$]-1,1[$	$(1+x)^\alpha$	$= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$	Newton(1666)
$\mathbb{R}$	$\exp(x)$	$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k$	Euler(1748)
$]-1,1[$	$\ln(1+x)$	$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$	Mercator(1668)
$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$	$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	Euler(1748)
$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$	$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$	Euler(1748)

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes
⇒ Trigonométrie hyperbolique
1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
4.1. ExponentielleS
4.2. LA fonction exponentielle
4.3. LogarithmeS
4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
4.5. Croissances comparées
4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Fonctions comme somme infinie

Exercice

Donner l'expression formalisée de $\arcsin(x)$.

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométrique

3. Poly. et puissances ratio.

4. Exponentielles et logarithmes

4.1. ExponentielleS

4.2. LA fonction exponentielle

4.3. LogarithmeS

4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

4.5. Croissances comparées

4.6. Fonctions hyperboliques directes

5. Sommes numériques infinies

Fonctions comme somme infinie

<u>Exercice</u>

Donner l'expression formalisée de $\arcsin(x)$.

<u>Exercice</u>

On rappelle la formule de MACHIN : $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$.

Combien de calcul pour obtenir 10 décimales de π satisfaisantes ? Faites les à la calculatrice

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométrique

3. Poly. et puissances ratio.

4. Exponentielles et logarithmes

4.1. ExponentielleS

4.2. LA fonction exponentielle

4.3. LogarithmeS

4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

4.5. Croissances comparées

4.6. Fonctions hyperboliques directes

5. Sommes numériques infinies

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométrique

3. Poly. et puissances ratio.

4. Exponentielles et logarithmes

4.1. ExponentielleS

4.2. LA fonction exponentielle

4.3. LogarithmeS

4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

4.5. Croissances comparées

4.6. Fonctions hyperboliques directes

5. Sommes numériques infinies

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

- $f(x+y) = f(x) \times f(y) \Rightarrow \exists\, a (= f(1))$ tel que $f : x \mapsto a^x$, continue

$\Rightarrow$ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

$\Rightarrow$ Trigonométrie hyperbolique

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

- $f(x+y) = f(x) \times f(y) \Rightarrow \exists\, a (= f(1))$ tel que $f : x \mapsto a^x$, continue
- Cas particulier de LA fonction exponentielle où $a = \lim(1 + \frac{1}{n})^n$ (de dérivée égale à 1 en 1)

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

- $f(x+y) = f(x) \times f(y) \Rightarrow \exists\, a (= f(1))$ tel que $f : x \mapsto a^x$, continue
- Cas particulier de LA fonction exponentielle où $a = \lim(1 + \frac{1}{n})^n$ (de dérivée égale à 1 en 1)
- Fonctions bijectives donc réciproques : les logarithmes $\lg(a \times b) = \lg(a) + \lg(b)$.

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométrique

3. Poly. et puissances ratio.

4. Exponentielles et logarithmes

4.1. ExponentielleS

4.2. LA fonction exponentielle

4.3. LogarithmeS

4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

4.5. Croissances comparées

4.6. Fonctions hyperboliques directes

5. Sommes numériques infinies

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

- $f(x+y) = f(x) \times f(y) \Rightarrow \exists\, a(= f(1))$ tel que $f : x \mapsto a^x$, continue
- Cas particulier de LA fonction exponentielle où $a = \lim(1 + \frac{1}{n})^n$ (de dérivée égale à 1 en 1)
- Fonctions bijectives donc réciproques : les logarithmes $\lg(a \times b) = \lg(a) + \lg(b)$.
- On a alors $a^x = \exp(x \times \ln(a))$

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes
⇒ Trigonométrie hyperbolique
1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
4.1. ExponentielleS
4.2. LA fonction exponentielle
4.3. LogarithmeS
4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4.5. Croissances comparées
4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométrique

3. Poly. et puissances ratio.

4. Exponentielles et logarithmes

4.1. ExponentielleS

4.2. LA fonction exponentielle

4.3. LogarithmeS

4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

4.5. Croissances comparées

4.6. Fonctions hyperboliques directes

5. Sommes numériques infinies

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique

- Définitions : $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ définies sur $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Fonctions trigonométrique

3. Poly. et puissances ratio.

4. Exponentielles et logarithmes

4.1. ExponentielleS

4.2. LA fonction exponentielle

4.3. LogarithmeS

4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

4.5. Croissances comparées

4.6. Fonctions hyperboliques directes

5. Sommes numériques infinies

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique

- Définitions : $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ définies sur $\mathbb{R}$
- Puis $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ définie sur $\mathbb{R}$

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
4.1. ExponentielleS
4.2. LA fonction exponentielle
4.3. LogarithmeS
4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4.5. Croissances comparées
4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions (exponentielles et) logarithmes

⇒ Trigonométrie hyperbolique

- Définitions : $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ définies sur $\mathbb{R}$
- Puis $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ définie sur $\mathbb{R}$
- Formule de trigonométrie hypoerbolique.

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 5. Utilisation de la dérivation
- Exercice N°63 & 64

1. Problèmes
2. Fonctions trigonométrique
3. Poly. et puissances ratio.
4. Exponentielles et logarithmes
   - 4.1. ExponentielleS
   - 4.2. LA fonction exponentielle
   - 4.3. LogarithmeS
   - 4.4. $x \to x^r$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - 4.5. Croissances comparées
   - 4.6. Fonctions hyperboliques directes
5. Sommes numériques infinies