

⇒ **Utilisation de la dérivation**

⇒ **Règle de L'Hospital et conséquences**

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

⇒ **Utilisation de la dérivation**

⇒ **Règle de L'Hospital et conséquences**

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Tableau de variations

En utilisant les théorèmes suivants (qui seront démontrés ultérieurement), on peut étudier les variations d'une fonction que l'on résume **systematiquement** dans un tableau de variations, complété par les limites aux bornes (et non par des phrases !)

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Tableau de variations

En utilisant les théorèmes suivants (qui seront démontrés ultérieurement), on peut étudier les variations d'une fonction que l'on résume **systematiquement** dans un tableau de variations, complété par les limites aux bornes (et non par des phrases !)

théorème - Monotonie et fonction dérivée

Soient I un **intervalle** de \mathbb{R} et f une fonction dérivable sur I .

Alors :

f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$;

f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$;

f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.

Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sauf en un nombre fini de points de I , alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I .

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Attention !

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

Attention. Intervalle

Il est indispensable que I soit un intervalle. On peut en effet trouver f définie sur D , dérivable sur D et vérifiant $\forall x \in D, f'(x) < 0$ mais qui n'est pas décroissante sur D .

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Attention !

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

Attention. Intervalle

Il est indispensable que I soit un intervalle. On peut en effet trouver f définie sur D , dérivable sur D et vérifiant $\forall x \in D, f'(x) < 0$ mais qui n'est pas décroissante sur D .

Exercice

Donner un tel contre-exemple

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

⇒ **Utilisation de la dérivation**

⇒ **Règle de L'Hospital et conséquences**

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Théorème

Théorème - Dérivation de la bijection réciproque

Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow J$ bijective de I sur J .

On suppose que f est dérivable en $x_0 \in I$.

Alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ **si et seulement si** $f'(x_0) \neq 0$
et on a alors

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ou encore, avec $y_0 = f(x_0)$,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Théorème

Théorème - Dérivation de la bijection réciproque

Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow J$ bijective de I sur J .

On suppose que f est dérivable en $x_0 \in I$.

Alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ **si et seulement si** $f'(x_0) \neq 0$
et on a alors

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ou encore, avec $y_0 = f(x_0)$,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

Remarque Se souvenir

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Application : trigonométriques réciproques

Proposition - Fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions arcsin, arccos sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$,

$$\text{avec } \forall x \in] -1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et}$$

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arctan est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} ,

$$\text{avec } \forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

Proposition - Fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions arcsin, arccos sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$,

$$\text{avec } \forall x \in] -1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et}$$

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arctan est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} ,

$$\text{avec } \forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Théorèmes (3)

⇒ Utilisation de la
dérivation⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

Corollaire

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est :

- ▶ continue strictement monotone sur l'intervalle I ,
- ▶ dérivable sur I et
- ▶ $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$

alors f est bijective de I sur $J = f(I)$,

$$f^{-1} \text{ est dérivable sur } J \text{ et } (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Savoir-faire

Savoir-faire. Bilan : f \mathcal{C}^1 -difféomorphisme

Dans de nombreuses situations (mais pas toute), on étudie f si :

- ▶ f est de classe \mathcal{C}^1 sur I (donc continue)
- ▶ f' ne s'annule pas (donc de signe constant)

alors f établit une bijection de I sur J .

Elle admet une application réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$, de classe \mathcal{C}^1 également sur J ,

$$\text{et } \forall t \in J, (f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))}.$$

Graphiquement : $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est la symétrie de \mathcal{C}_f par rapport à l'axe $y = x$.

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Savoir-faire

Savoir-faire. Bilan : f \mathcal{C}^1 -difféomorphisme

Dans de nombreuses situations (mais pas toute), on étudie f si :

- ▶ f est de classe \mathcal{C}^1 sur I (donc continue)
- ▶ f' ne s'annule pas (donc de signe constant)

alors f établit une bijection de I sur J .

Elle admet une application réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$, de classe \mathcal{C}^1 également sur J ,

$$\text{et } \forall t \in J, (f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))}.$$

Graphiquement : $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est la symétrie de \mathcal{C}_f par rapport à l'axe $y = x$.

Exercice

Réciproque du sinus hyperbolique

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Du bon sens de la notation physicienne

On considère l'approche physicienne :

$$u \longrightarrow t$$

où u et t sont à la fois des variables *physiques*.

On note f la relation de u à t : $t = f(u)$. On suppose f (localement) bijective.

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Du bon sens de la notation physicienne

On considère l'approche physicienne :

$$u \longrightarrow t$$

où u et t sont à la fois des variables *physiques*.

On note f la relation de u à t : $t = f(u)$. On suppose f (localement) bijective.

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Du bon sens de la notation physicienne

On considère l'approche physicienne :

$$u \longrightarrow t$$

où u et t sont à la fois des variables *physiques*.

On note f la relation de u à t : $t = f(u)$. On suppose f (localement) bijective.

Compléter le tableau :

$\frac{dt}{du}(u)$	
$\frac{du}{dt}(t)$	

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Du bon sens de la notation physicienne

On considère l'approche physicienne :

$$u \longrightarrow t$$

où u et t sont à la fois des variables *physiques*.

On note f la relation de u à t : $t = f(u)$. On suppose f (localement) bijective.

Compléter le tableau :

$\frac{dt}{du}(u)$	$f'(u)$
$\frac{du}{dt}(t)$	

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Du bon sens de la notation physicienne

On considère l'approche physicienne :

$$u \longrightarrow t$$

où u et t sont à la fois des variables *physiques*.

On note f la relation de u à t : $t = f(u)$. On suppose f (localement) bijective.

Compléter le tableau :

$\frac{dt}{du}(u)$	$f'(u)$
$\frac{du}{dt}(t)$	$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))}$

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Du bon sens de la notation physicienne

On considère l'approche physicienne :

$$u \longrightarrow t$$

où u et t sont à la fois des variables *physiques*.

On note f la relation de u à t : $t = f(u)$. On suppose f (localement) bijective.

Compléter le tableau :

$\frac{dt}{du}(u)$	$f'(u)$
$\frac{du}{dt}(t) = \frac{1}{\frac{dt}{du}}$	$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))}$

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

⇒ **Utilisation de la dérivation**

⇒ **Règle de L'Hospital et conséquences**

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Obtenir une inégalité

Savoir-faire. Obtenir une inégalité

Pour démontrer une inégalité, une méthode est d'étudier la fonction formée par la différence des deux membres, d'établir son tableau de variations pour obtenir son signe.

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Obtenir une inégalité

Savoir-faire. Obtenir une inégalité

Pour démontrer une inégalité, une méthode est d'étudier la fonction formée par la différence des deux membres, d'établir son tableau de variations pour obtenir son signe.

Exercice

Montrer les inégalités :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1;$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x;$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, x - \frac{x^3}{6} \geq \sin x \geq x.$$

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Obtenir un maximum

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

Savoir-faire. Obtenir un maximum

Pour obtenir un extremum de f (dérivable deux fois) sur I , on résout $f'(x) = 0$.

On note x_0 la solution de cette équation (donc $f'(x_0) = 0$).

- ▶ si $f''(x_0) > 0$, alors f présente un minimum (local) en x_0 .
- ▶ si $f''(x_0) < 0$, alors f présente un maximum (local) en x_0 .
- ▶ si $f''(x_0) = 0$, alors on ne peut rien dire.

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Obtenir un maximum

⇒ Utilisation de la
dérivation⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

Savoir-faire. Obtenir un maximum

Pour obtenir un extremum de f (dérivable deux fois) sur I , on résout $f'(x) = 0$.

On note x_0 la solution de cette équation (donc $f'(x_0) = 0$).

- ▶ si $f''(x_0) > 0$, alors f présente un minimum (local) en x_0 .
- ▶ si $f''(x_0) < 0$, alors f présente un maximum (local) en x_0 .
- ▶ si $f''(x_0) = 0$, alors on ne peut rien dire.

Remarque Convexité

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

⇒ **Utilisation de la dérivation**

⇒ **Règle de L'Hospital et conséquences**

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Limite du taux de variation

On peut calculer certaines limites en reconnaissant le taux de variations d'une fonction dérivable connue.

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Limite du taux de variation

On peut calculer certaines limites en reconnaissant le taux de variations d'une fonction dérivable connue.

Exercice

Rappeler les valeurs des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}.$$

En déduire

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Règle de L'Hospital

Règle de L'Hôpital

Soient f et g deux fonctions définies sur I , dérivables en $x_0 \in I$.

On suppose que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que $\frac{f'}{g'}$ admet une limite en x_0 .

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Règle de L'Hospital

Règle de L'Hôpital

Soient f et g deux fonctions définies sur I , dérivables en $x_0 \in I$.

On suppose que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que $\frac{f'}{g'}$ admet une limite en x_0 .

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

On fait la démonstration dans le cas $g'(x_0) \neq 0$.

Sinon, on la fera en exploitant l'égalité des accroissements finis.

Démonstration

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Règle de L'Hospital

Règle de L'Hôpital

Soient f et g deux fonctions définies sur I , dérivables en $x_0 \in I$.

On suppose que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que $\frac{f'}{g'}$ admet une limite en x_0 .

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

On fait la démonstration dans le cas $g'(x_0) \neq 0$.

Sinon, on la refera en exploitant l'égalité des accroissements finis.

Démonstration

Attention. Pas d'abus

Cela ne s'applique pas en cas d'indetermination

$$-4 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} \neq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{2} = 3$$

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Application

Savoir-faire. Lever une indétermination par la règle de L'Hospital

1. On vérifie bien qu'on peut appliquer la règle de L'Hospital : $f = \frac{n}{d}$ avec $n, d \rightarrow 0$.
2. On calcule $n^{(k)}$ jusqu'à ce que $n^{(k_0)}(x) \neq 0$.
De même on calcule $d^{(h)}$ jusqu'à ce que $d^{(h_0)}(x) \neq 0$.
3. On note $m = \min(k_0, h_0)$, on connaît $\lim \frac{n^{(m)}}{d^{(m)}}$. 4. Puis on remonte en répétant $m - 1$ fois la règle de L'Hospital.

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Application

Savoir-faire. Lever une indétermination par la règle de L'Hospital

1. On vérifie bien qu'on peut appliquer la règle de L'Hospital : $f = \frac{n}{d}$ avec $n, d \rightarrow 0$.
2. On calcule $n^{(k)}$ jusqu'à ce que $n^{(k_0)}(x) \neq 0$.
De même on calcule $d^{(h)}$ jusqu'à ce que $d^{(h_0)}(x) \neq 0$.
3. On note $m = \min(k_0, h_0)$, on connaît $\lim \frac{n^{(m)}}{d^{(m)}}$. 4. Puis on remonte en répétant $m - 1$ fois la règle de L'Hospital.

Exercice

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^3 + 5x^2}$

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

⇒ **Utilisation de la dérivation**

⇒ **Règle de L'Hospital et conséquences**

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Locale !

Heuristique. Approximation polynomiale LOCALE

Nos fonctions usuelles ne sont pas des polynômes, on ne cherche pas à remplacer une fonction usuelle par une fonction polynomiale sur un intervalle de \mathbb{R} contenant une infinité de points.

Mais on peut faire des comparaisons au voisinage d'un point.

La définition de Weierstrass de la dérivabilité de φ en x_0 avec pour valeur $A(= \varphi'(x_0))$ exprime :

$\exists A \in \mathbb{R}, \exists \epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue en x_0 avec $\epsilon(x_0) = 0$ tel que :

$$\forall x \in I, \varphi(x) = \varphi(x_0) + A(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x)$$

On va donc chercher une fonction polynomiale f de degré n tel que

$$\varphi(x) = f(x) + (x - x_0)^n \epsilon(x) \quad \text{avec } \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

On commence par étudier les cas $x_0 = 0$.

→ Utilisation de la dérivation

→ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Autour de 0

Proposition - Développement polynomiale en 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère φ de classe C^{n+1} sur I , contenant 0.

On note $T : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - T(x)}{x^n} = 0$.

Autrement écrit : il existe $\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et

$$f(x) = T(x) + x^n \epsilon(x).$$

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Autour de 0

Proposition - Développement polynomiale en 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère φ de classe C^{n+1} sur I , contenant 0.

On note $T : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - T(x)}{x^{n+1}} = 0$.

Autrement écrit : il existe $\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et

$$\varphi(x) = T(x) + x^{n+1} \epsilon(x).$$

On commence par un lemme (qui sera enrichit dans la suite du cours)

Lemme - Dérivation monôme

Notons $m_s : x \mapsto x^s$.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m_s^{(k)}(0) = 0$ si $k \neq s$ et $m_s^{(s)}(0) = s!$.

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Autour de 0

Proposition - Développement polynomiale en 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère φ de classe C^{n+1} sur I , contenant 0.

On note $T : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - T(x)}{x^{n+1}} = 0$.

Autrement écrit : il existe $\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et

$$f(x) = T(x) + x^{n+1} \epsilon(x).$$

On commence par un lemme (qui sera enrichi dans la suite du cours)

Lemme - Dérivation monôme

Notons $m_s : x \mapsto x^s$.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m_s^{(k)}(0) = 0$ si $k \neq s$ et $m_s^{(s)}(0) = s!$.

Démonstrations

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

Exemple DL de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \notin \mathbb{N}$)

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

Exemple DL de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \notin \mathbb{N}$)

Exercice

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

Objectifs

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisation de la dérivation

- ▶ Etude de la variation de la fonction en déduire les maxima. . .

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisation de la dérivation

- ▶ Etude de la variation de la fonction en déduire les maxima. . .
- ▶ Dérivabilité d'une fonction réciproque et lien entre f' et $(f^{-1})'$.

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Objectifs

⇒ Utilisation de la dérivation

- ▶ Etude de la variation de la fonction en déduire les maxima. . .
- ▶ Dérivabilité d'une fonction réciproque et lien entre f' et $(f^{-1})'$.
- ▶ Généralisation d'inégalité (d'encadrement pour l'analyse)

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

Objectifs

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

- ▶ Lever une indétermination du type $\frac{0}{0}$ pour $x \rightarrow a (a \in \mathbb{R})$.

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

- ▶ Lever une indétermination du type $\frac{0}{0}$ pour $x \rightarrow a (a \in \mathbb{R})$.
- ▶ Développement limité de toute fonction f autour de a , par une fonction polynomiale de Taylor
$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

⇒ Utilisation de la
dérivation

⇒ Règle de
L'Hospital et
conséquences

Objectifs

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : Fonctions à valeurs complexes
- ▶ Exercice n° 102 & 106

1. Problèmes

2. Dérivation

3. Quelques
utilisations de la
dérivation

3.1. Variations

3.2. Bijections et réciproques

3.3. Inégalités

3.4. Calculs de limites (lever les
indéterminations)

3.5. Approximation polynomiale
(développement limité)