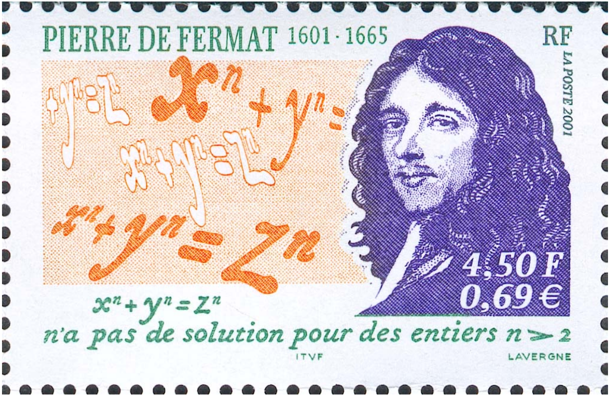

Leçon 24 - Utilisation de la dérivation

17 octobre 2024

⇒ **Les bases de la dérivation de fonctions réelles**

⇒ **Dérivation de fonctions usuelles**

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

Exponentielle complexe

Définition - Exponentielle complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'exponentielle complexe de z par

$$\exp z = e^z = e^{\mathbf{Re}(z)} e^{i\mathbf{Im}(z)}.$$

Son module est $e^{\mathbf{Re}(z)}$ et un argument est $\mathbf{Im}(z)$.

Propriété classique

Proposition - Elargissement

On retrouve les propriétés classiques de l'exponentielle :

- L'exponentielle complexe coïncide bien avec l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ pour les réels ou avec l'exponentielle des imaginaires purs.
- Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ et $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Propriété classique

Proposition - Elargissement

On retrouve les propriétés classiques de l'exponentielle :

- L'exponentielle complexe coïncide bien avec l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ pour les réels ou avec l'exponentielle des imaginaires purs.
- Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ et $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Démonstration

Equation classique

Exercice

1. Résoudre $e^z = 1$.
2. Résoudre $e^z = 1 - i\sqrt{3}$.
3. Résoudre plus généralement $e^z = z_0$
4. Déterminer l'image d'une droite d'équation $x = a$ par l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.
5. Déterminer l'image d'une droite d'équation $y = b$ par l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.

Equation classique

Exercice

1. Résoudre $e^z = 1$.
2. Résoudre $e^z = 1 - i\sqrt{3}$.
3. Résoudre plus généralement $e^z = z_0$
4. Déterminer l'image d'une droite d'équation $x = a$ par l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.
5. Déterminer l'image d'une droite d'équation $y = b$ par l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.

Proposition - Résolution d'équation

- Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp z = \exp z'$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
- Tout complexe $z_0 \neq 0$ peut s'écrire sous la forme $\exp z$.

Equation classique

Exercice

1. Résoudre $e^z = 1$.
2. Résoudre $e^z = 1 - i\sqrt{3}$.
3. Résoudre plus généralement $e^z = z_0$
4. Déterminer l'image d'une droite d'équation $x = a$ par l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.
5. Déterminer l'image d'une droite d'équation $y = b$ par l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.

Proposition - Résolution d'équation

- Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp z = \exp z'$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
- Tout complexe $z_0 \neq 0$ peut s'écrire sous la forme $\exp z$.

Démonstration

Découpage en deux

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - « Découpage »d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soient $f_1 : I \to \mathbb{R}$ et $f_2 : I \to \mathbb{R}$.
On pose : $\forall x \in I,\ f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$.
$f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ *(si I n'est pas précisé au départ, son domaine de définition est l'intersection de ceux de f_1 et f_2)*.
On définit les fonctions $\mathbf{Re}(f)$ (partie réelle de f) et $\mathbf{Im}(f)$ (partie imaginaire de f) à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\mathbf{Re}(f) = f_1 : \begin{array}{rl} I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathbf{Re}(f(x)) \end{array} \qquad \mathbf{Im}(f) = f_2 : \begin{array}{rl} I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathbf{Im}(f(x)) \end{array}$$

On dit que f est continue sur I si f_1 et f_2 sont continues sur I.

Application

Exemple $t \mapsto e^{it}$

Application

Exemple $t \mapsto e^{it}$

Analyse Justifions que sa base est bien e^{i}

⇒ **Les bases de la dérivation de fonctions réelles**

⇒ **Dérivation de fonctions usuelles**

Définition généralisée

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - Dérivation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, une fonction à valeurs complexes.
Soient $f_1 : I \to \mathbb{R}$ et $f_2 : I \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I$, $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$.
On dit que f est dérivable, respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f_1 et f_2 sont dérivables, respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
Si f est dérivable sur I, on définit sa dérivée par :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x).$$

On note $\mathscr{C}(I, \mathbb{C})$ (resp. $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions continues (resp. de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{C}$).

Définition généralisée

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - Dérivation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, une fonction à valeurs complexes.
Soient $f_1 : I \to \mathbb{R}$ et $f_2 : I \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I$, $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$.
On dit que f est dérivable, respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f_1 et f_2 sont dérivables, respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
Si f est dérivable sur I, on définit sa dérivée par :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x).$$

On note $\mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ (resp. $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions continues (resp. de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{C}$).

Remarque Commutativité de la dérivation complexe et de la partie réelle ou imaginaire

Propriétés

Proposition - Constance et dérivation

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I. Alors f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

Propriétés

Proposition - Constance et dérivation

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I. Alors f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

Pour la démonstration, on admet ces résultats pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

⇒ **Les bases de la dérivation de fonctions réelles**

⇒ **Dérivation de fonctions usuelles**

Propriétés (1)

Attention. Croissance sur $\mathbb{C}$?

Parler de croissance (ou de décroissance) d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ n'a pas de sens.

Propriétés (1)

Attention. Croissance sur $\mathbb{C}$?

Parler de croissance (ou de décroissance) d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ n'a pas de sens.

Propriété - Opérations

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors $f+g, fg$ et αf sont dérivables sur I et

$$\forall x \in I, \quad \begin{aligned}(f+g)'(x) &= f'(x)+g'(x)\\ (fg)'(x) &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\\ (\alpha f)' &= \alpha f'\end{aligned}$$

Si g ne s'annule pas, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et

$$\forall x \in I, \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2} \text{ et } \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Propriétés (1)

Attention. Croissance sur $\mathbb{C}$?

Parler de croissance (ou de décroissance) d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ n'a pas de sens.

Propriété - Opérations

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors $f+g, fg$ et αf sont dérivables sur I et

$$\forall x \in I, \quad \begin{aligned} (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ (\alpha f)' &= \alpha f' \end{aligned}$$

Si g ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur I et

$$\forall x \in I, \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2} \text{ et } \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Exercice

Faire les démonstration.

⇒ **Les bases de la dérivation de fonctions réelles**

⇒ **Dérivation de fonctions usuelles**

Dérivation de l'exponentielle complexe

Théorème - Dérivée de l'exponentielle complexe

Soit $\phi : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I. Alors

$$\begin{array}{rccl} \psi : & I & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & e^{\phi(x)} \end{array}$$

est dérivable sur I et : $\quad \forall x \in I, \quad \psi'(x) = \phi'(x) e^{\phi(x)}$

Dérivation de l'exponentielle complexe

Théorème - Dérivée de l'exponentielle complexe

Soit $\phi : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I. Alors

$$\psi : \begin{array}{ll} I & \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto e^{\phi(x)} \end{array}$$

est dérivable sur I et : $\quad \forall x \in I, \quad \psi'(x) = \phi'(x)e^{\phi(x)}$

Démonstration

Applications

Attention. i joue un rôle comparable à celle d'un nombre réel

On fera bien attention à ne pas oublier le i dans la dérivation !

Applications

Attention. i joue un rôle comparable à celle d'un nombre réel

On fera bien attention à ne pas oublier le i dans la dérivation !

Exercice

Calculer la dérivée $f : x \mapsto (\arcsin(x))e^{2x+ix^2}$.

Applications

Attention. i joue un rôle comparable à celle d'un nombre réel

On fera bien attention à ne pas oublier le i dans la dérivation !

Exercice

Calculer la dérivée $f : x \mapsto (\arcsin(x))e^{2x+ix^2}$.

Application Fonction polaire

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions à valeurs complexes

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Fonctions à valeurs complexes

- Décomposition : $z(t) = a(t) + ib(t)$, addition de deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puis dérivabilité.

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions à valeurs complexes

- Décomposition : $z(t) = a(t) + ib(t)$, addition de deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puis dérivabilité.
- Dérivation de la fonction $t \mapsto \exp(z(t))$ sous $z'(t) \times \exp(z(t))$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Fonctions à valeurs complexes

- Décomposition : $z(t) = a(t) + ib(t)$, addition de deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puis dérivabilité.
- Dérivation de la fonction $t \mapsto \exp(z(t))$ sous $z'(t) \times \exp(z(t))$
- Tout découle (dont la dérivée $z'(t)$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Fonctions à valeurs complexes

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 12 - Relations
- Exercice n° 111