



- 1. Quelaues

6 novembre 2024



- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes linéaires. Equivalence
 - 2.1. Vocabulaire
 - 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
 - 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot de GAUSS
 - 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires
 - 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
 - 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des solutions

Systèmes Juivalents

⇒ Méthode de Cramer

- Quelques
 problèmes
- 2. Systèmes
 - Vocabulaire
 - 1. Vocabulaire
- 3. Résolution explicite. cas des
 - Vers la formule de Crami
- 4. Algorithme du pivo
- 4.1. Opérations élémer
- 4.2. Algorithme du pivot GAUSS
- 4.3. Applications



- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes linéaires. Equivalence
 - 2.1. Vocabulaire
 - 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
 - 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot de GAUSS
 - 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires
 - 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
 - 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des solutions

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de

- Quelques
 problèmes
- 2. Systèmes
 - Vocabulaire
 - . vocabulaire
- . Résolution xplicite. cas des
- Vers la formule de Crame
- l. Algorithme du pivot
- 4.1. Opérations élément
- GAUSS
- 4.3. Applications



Problème Résolution d'un système linéaire

Lecon 25 - Système linéaire

- 1. Quelques
- problèmes

Problème Résolution d'un système linéaire

Problème Résolution « au petit bonheur »

Leçon 25 - Système linéaire

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

- 1. Quelques problèmes
 - . Systèmes
 - Vocabulaire
 - Svetámos ánuivalente
- 3. Résolution
 - stemes n = p = 2
- .1. Vers la formule de Cram
- 4. Algorithme du pivot
- 4.1. Opérations éléme
- 4.2. Algorithme du p GAUSS
- 4.3. Application

Problème Résolution d'un système linéaire

Problème Résolution « au petit bonheur »

Problème Forme de l'ensemble des solutions

Leçon 25 - Système linéaire

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

1. Quelques problèmes

- 2. Systèmes linéaires, Equivaler
 - . Vocabulaire
 - vocabulaire
- 2.2. Systèmes équivalents

 3. Résolution
- stèmes n = p = 2
- Vers la formule de 0
- 4. Algorithme du pivot
- 1.1. Opérations éléme
- 4.2. Algorithme du pivot d
- 4.3. Applications

Problème Résolution d'un système linéaire

Problème Résolution « au petit bonheur »

Problème Forme de l'ensemble des solutions

Problème Impact des paramètres

Lecon 25 - Système linéaire

- 1. Quelaues problèmes

- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes linéaires. Equivalence
 - 2.1. Vocabulaire
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
- 4. Algorithme du pivot de GAUSS
 - 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires
 - 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
 - 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des

- 1. Quelaues
- 2.1 Vocabulaira

Définition

Remarque Formalisme de LEIBNIZ

On commence par **paramétrer notre problème** : on l'élargit en donnant une écriture symbolique (paramétre lettré) aux nombres. Puis on élargit la problème : pourquoi seulement trois équations et trois inconnues ?

Leçon 25 - Système linéaire

équivaler

⇒ Méthode de Cramer

- 1. Quelques
 - . Systèmes
- 2.1. Vocabulaire
 - vocabulaire
- Résolution
 - . Vers la formule de C
- 4. Algorithme du pivot
 - 4.1. Opérations élémentair
- GAUSS
- 4.3. Application



Un système linéaire à n équations et p inconnues à coefficient dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est un système S d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p &= b_2 \\ \vdots &\vdots &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p &= b_n \end{cases}$$

- ▶ les $a_{i,j} \in \mathbb{K}$;
- ► $(b_1, b_2, ... b_n) \in \mathbb{K}^n$ est appelé le second membre de l'équation;
- ► $(x_1, x_2...x_p) \in \mathbb{K}^p$ est appelé l'inconnue du système.

On appelle <u>système homogène</u> le système obtenu en remplaçant chaque b_i par 0 (second membre nul).

→ Systemes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du bivot de Gauss

- Quelques problèmes
- 2. Systèmes inéaires. Equivalence
- 2.1. Vocabulaire
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
 - .1. Vers la formule de Cra
- 4. Algorithme du pivot de Gauss
- 4.1. Opérations élémentain
 4.2. Algorithme du pivot de
- 4.3. Applications

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

Définition - Système linéaire de n équations à p inconnues

On appelle solution du système S, l'ensemble $\mathscr{S} \subset \mathbb{R}^p$ des p-uplets $(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots\overline{x}_p)$ qui vérifient les n équations :

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, a_{i,1}\overline{x}_1 + a_{i,2}\overline{x}_2 + \cdots + a_{i,p}\overline{x}_p = b_i$$

- Quelques problèmes
- 2. Systèmes
- 2.1. Vocabulaire
- 2.2. Systèmes équivalents
- Résolution xplicite. cas des n = p = 2
- .1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot de Gauss
- 4.1. Opérations éléments
- GAUSS
- 4.3. Applications

Remarques

Remarque Notations

Leçon 25 - Système linéaire

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

- l. Quelques
- roblèmes
- 2.1. Vocabulaire
 - 0.000
- 3. Résolution explicite. cas des
- 8.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivo
- 4.1. Opérations élémer
- 4.2. Algorithme du pivo GAUSS
- 4.3. Application

Remarques

Remarque Notations Remarque Solution(s) du système homogène Lecon 25 - Système linéaire

- 1. Quelaues
- 2.1. Vocabulaire

Remarques

Remarque Notations

Remarque Solution(s) du système homogène

Heuristique - Résolution

Il y a en gros deux méthodes pour résoudre un tel système. La méthode de Leibniz (fin du XVII) fonctionne très bien pour les petites dimensions $n, p \le 3$. Elle s'appuie sur les symétries du système. Elle marche bien également en théorie pour les grandes dimensions.

La méthode (dite) de Gauss est algorithmique, nous la privilégierons pour les plus grandes dimensions.

- 1. Quelaues
- 2.1 Vocabulaire



- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes linéaires. Equivalence
 - 2.1. Vocabulaire
 - 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
 - 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot de GAUSS
 - 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires
 - 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
 - 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des solutions

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

- Quelques
 problèmes
- 2. Systèmes
 - Manakadain
- 2.1. Vocabulaire

 2.2. Systèmes équivalents
- . Résolution
- $\sqrt{3}$ Corn to formula do Cram
- . Algorithme du piv
- de GAUSS
- 4.2. Algorithme du pivot de
- 4.3. Applications

Implication

Analyse Sens des flèches ⇒, ←

Leçon 25 - Système linéaire

⇒ Systèmes ėquivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- I. Quelques problèmes
- z. Systemes inéaires. Equivaler
 - . Vocabulaire
- 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
 - 1. Vers la formule de Cram
- Algorithme du pivot de Gauss
 - 4.1. Opérations éléments
- GAUSS
- 4.3. Application

Définition - Systèmes équivalents

Deux systèmes S_1 et S_2 sont dits équivalents, notée $S_1 \Longleftrightarrow S_2$ si et seulement si les ensembles de solutions sont les mêmes : $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$.

Exercice

Les systèmes S_1 : $\left\{ \begin{array}{l} 2x+y=1 \\ -x-y=0 \end{array} \right.$ et S_2 : $\left\{ \begin{array}{l} 2x+y=1 \end{array} \right.$ sont-ils équivalents ?

Systèmes quivalents

⇒ Méthode de Cramer

- Quelques problèmes
- 2. Systèmes
 - eaires. Equivalen
- 2.1. vocabulaire
 2.2. Systèmes équivalents
- B. Résolution explicite. cas des
 - Vers la formule de Crame
- 4. Algorithme du pivot
- 4.1. Opérations élémen
- GAUSS
- 4.3. Application

Définition - Systèmes équivalents

Deux systèmes S_1 et S_2 sont dits équivalents, notée $S_1 \Longleftrightarrow S_2$ si et seulement si les ensembles de solutions sont les mêmes : $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$.

Exercice

Les systèmes S_1 : $\begin{cases} 2x+y=1 \\ -x-y=0 \end{cases} \text{ et } S_2$: $\{ 2x+y=1 \text{ sont-ils equivalents ?}$

Attention. Pas d'abus

Typiquement ici, il ne faut pas abuser du symbole d'équivalence ! Dans l'exercice, on écrit donc jamais :

$$S_1: \begin{cases} 2x+y=1 \\ -x-y=0 \end{cases} \iff 2x+y=1$$

Il n'y a ici qu'une implication.

equivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme di nivot de Gauss

- Quelques problèmes
- 2. Systèmes inéaires Equivalenc
- .1. Vocabulaire
- 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
 - .1. Vers la formule de C
- 4. Algorithme du pivo
- 4.1. Opérations éléments
- GAUSS
- 4.3. Applications

- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes linéaires. Equivalence
 - 2.1. Vocabulaire
 - 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n=p=2
 - 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot de GAUSS
 - 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires
 - 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
 - 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des solutions

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

- 1. Quelques
- 2. Systèmes
 - Vocabulaire
 - . vocabulaire
- B. Résolution explicite. cas des
- 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot
 - 4.1. Opérations élémentai
 - GAUSS
- 4.3. Applications



$$S: \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

où a,b,c,d et α,β sont des paramètres, alors que x,y sont les inconnues.

- ⇒ syste équivaler
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 1. Quelques
- 2. Systèmes
 - Vocabulaire
 - Systèmes équivalents
 - Résolution xplicite. cas des n = n = 2
- 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot de Gauss
 - .1. Opérations élémen
- 4.2. Algorithme GAUSS
- 4.3. Application

Quelques problèmes

Systèmes linéaires. Equivalen

. Vocabulaire

- . Vocabulaire
- . Résolution
- xplicite. cas des ystèmes n = p = 2
- 3.1. Vers la formule de Cramer
- Algorithme du pivot de Gauss
 - .1. Opérations élémer
- GAUSS
- 4.3. Application

On considère ici

$$S: \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

où a,b,c,d et α,β sont des paramètres, alors que x,y sont les inconnues.

Analyse Etude « à la lycéenne »

$$S: \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

où a,b,c,d et α,β sont des paramètres, alors que x,y sont les inconnues.

Analyse Etude « à la lycéenne »

Remarque Avons-nous trouver les solutions?

quivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- Quelques
 problèmes
- 2. Systèmes
 - 2.1. Vocabulaire
 - Vocabulaire
- 2.2. Systèmes équivalents
- . Résolution xplicite. cas des ystèmes n = p = 2
- 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot
 - Opérations éléments
- 4.2. Algorithme du piv Gauss
- 4.3. Application

Réciproque

Analyse Réciproque

Leçon 25 - Système linéaire

- ⇒ Systèmes quivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- I. Quelques
- Systèmes
- . Vocabulaire
- 2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des
- 3.1. Vers la formule de Cramer
- Algorithme du pivo de Gauss
 - 4.1. Opérations élémer
 - GAUSS
- 4.3. Application

Réciproque

Analyse Réciproque

Remarque $a \neq 0$?

Leçon 25 - Système linéaire

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 1. Quelques
- Systèmes inéaires. Equivalend
 - Vocabulaire
- 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des
- 3.1. Vers la formule de Cramer
- Algorithme du pivot de Gauss
 - I.1. Opérations élémen
- GAUSS
- 4.3. Application

On appelle déterminant du système 2×2 (i.e. n = 2 et p = 2)

$$S \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &= b_2 \end{array} \right.$$

le nombre
$$\delta_S = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$
 souvent noté $\begin{vmatrix} a \\ a \end{vmatrix}$

- 1. Quelaues

- 3.1. Vers la formule de Cramer

On appelle déterminant du système 2×2 (i.e. n = 2 et p = 2)

$$S = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &= b_2 \end{cases}$$

le nombre
$$\delta_S=a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}$$
 souvent noté $\left|\begin{array}{cc}a_{1,1}&a_{1,2}\\a_{2,1}&a_{2,2}\end{array}\right|.$

Savoir-faire. Formule de CRAMER

Si le déterminant du système S est non nul, la solution de ${\mathscr S}$ de

(S)
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &= b_2 \end{cases}$$

$$\text{est } \mathscr{S} = \{(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\} = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,1} \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \right\}$$

→ Systemes équivalents

> Méthode de cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- Quelques
 problèmes
 - . Systèmes réaires. Equivalence
 - Vocabulaire
 - Résolution cplicite. cas des
- 3.1. Vers la formule de Cramer
- A languistance of Granica
- Algorithme du pivot de Gauss
- 4.1. Opérations éléments
 4.2. Algorithme du pivot of
 - 4.3. Applications

Définition - Déterminant d'un système 2×2

On appelle déterminant du système 2×2 (i.e. n = 2 et p = 2)

$$S = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &= b_2 \end{cases}$$

le nombre $\delta_S = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ souvent noté

- 1. Quelaues

- 3.1. Vers la formule de Cramer

1. Quelaues

3.1. Vers la formule de Cramer

Définition - Déterminant d'un système 3×3

On appelle déterminant du système 3×3 (i.e. n = 3 et p = 3)

$$S \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 &= b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 &= b_3 \end{array} \right.$$

le nombre $\delta_S = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,3}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,3}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,3}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,2}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,2}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,2}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,2}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,2}a_{2,2}a_{2,2}a_{2,2} + a_{1,2}a_{2,2}a_{2,2}a_{2,2}a_{2,2}a_{2,2}a_{2,2}a_{2,2}a_{2,2}a_{2,2}a_{2,2}a_{2,2}a_{2,2}a_{$ $a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$ souvent noté

Formule de Cramer

Savoir-faire. Formule de CRAMER

Si le déterminant du système S est non nul, la solution de ${\mathscr S}$ de

(S)
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &= b_2 \end{cases}$$

$$\operatorname{est} \mathscr{S} = \{(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\} = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} & b_1 & a_{1,2} \\ & b_2 & a_{2,2} \\ \hline & a_{1,1} & a_{1,2} \\ & a_{2,1} & a_{2,2} \\ \end{array} \right|, \begin{array}{c|cc} & a_{1,1} & b_1 \\ & a_{2,1} & b_2 \\ \hline & a_{1,1} & a_{1,2} \\ & a_{2,1} & a_{2,2} \\ \end{array} \right| \right\}.$$

Leçon 25 - Système linéaire

 Systèmes quivalents

⇒ Méthode de Cramer

- Quelques problèmes
- Systèmes inéaires. Equivalence
 - . Vocabulaire
- .2. Systèmes équiva
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
- 3.1. Vers la formule de Cramer
- Algorithme du pivot de GAUSS
- 4.1. Opérations élémenta
 4.2. Algorithme du pivot c
- GAUSS
- 4.3. Application

 b_1

 b_2

 b_3

 $a_{1.3}$

Si le déterminant du système S est non nul, la solution de $\mathscr S$ de

 $a_{1,1}$

 $a_{2,1}$ b_2

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 &= b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 &= b_3 \end{cases}$$

 $a_{1.3}$

 $a_{2,3}$

 $a_{3,3}$

est
$$\mathcal{S} = \{(\overline{x}_1, \overline{x}_2), \overline{x_3}\} =$$

$$\left| egin{array}{cccc} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \ \end{array}
ight|$$

 $a_{1.2}$

 a_{22}

 $a_{3,2}$

 $a_{1.1}$

 a_{21}

 $a_{3.1}$

$$egin{array}{cccc} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \ \end{array}$$

 $a_{1.3}$

 $a_{2.3}$

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{array} \right|$$

 $a_{1.1}$

 $a_{3.1}$

 $a_{2.1}$

$$a_{2,1}$$
 $a_{2,2}$ a

$$a_{2,1}$$
 $a_{2,2}$ $a_{2,3}$ $a_{3,1}$ $a_{3,2}$ $a_{3,3}$

 $a_{2.3}$

 $a_{2.2}$

 $a_{3,2}$

3.1. Vers la formule de Cramer

1. Quelaues

4 🗆 🕨 4 🗇 🕨 4 🖻 🕨 4 🗎 🕒

- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes linéaires. Equivalence
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
- 4. Algorithme du pivot de GAUSS
 - 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires
 - 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
 - 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des

- 1. Quelaues

- 4.1. Opérations élémentaires

Opérations élémentaires

On commence par trouver des invariants de l'ensemble des solutions. Cela permet de raisonner avec des systèmes équivalents

Leçon 25 - Système linéaire

Systèmes Juivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- Quelques
 problèmes
- 2. Systèmes
 - Vocabulaire
 - Svetámae ánuis
- Résolution

 xplicite. cas des

 ystèmes n = p = 2
- I. Vers la formule de Crar
- 4. Algorithme du pivot
- 4.1. Opérations élémentaires
- 4.2. Algorithme du pivot d
- 4.3. Application

4.1. Opérations élémentaires

On commence par trouver des invariants de l'ensemble des solutions. Cela permet de raisonner avec des systèmes équivalents

Définition - Opérations élémentaires

On appelle opérations élémentaires sur le système dont la ligne iest noté L_i , les opérations suivantes :

- **pour tout** $i, j \le n$, échange des lignes L_i et L_j codé : $L_i \leftrightarrow L_i$
- **pour tout** $i \le n$, $\lambda \ne 0$, la multiplication de la ligne L_i par λ $codé: L_i \leftarrow \lambda L_i$
- **pour tout** $i, j \le n, \alpha \in \mathbb{K}$, l'ajout à la ligne L_i de α fois la ligne L_i codé : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_i$

⇒ Algorithme de privot de Gauss

Proposition - Invariant des solutions

Les opérations élémentaires conservent exactement les solutions du système

- Quelques
 problèmes
- 2. Systèmes
 - . Vocabulaire
 - . Systèmes équivalents
- . Résolution xplicite. cas des ystèmes n=p=2
- Vers la formule de Crame
- 1. Algorithme du pivot
- 4.1. Opérations élémentaires
- 4.2. Algorithme du pivot de Gauss
- 4.3. Application

⇒ Algorithme d

Proposition - Invariant des solutions

Les opérations élémentaires conservent exactement les solutions du système

Démonstration

- Quelques
 problèmes
- linéaires. Equivalenc
 - Vocabulaire
 - Systèmes équivalents
- . Résolution xplicite. cas des ystèmes n=p=2
- . Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot
- 4.1. Opérations élémentaires
- 4.2. Algorithme du pivot de
- 4.3. Application

- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes linéaires. Equivalence
 - 2.1. Vocabulaire
 - 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
 - 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot de GAUSS
 - 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires
 - 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
 - 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des solutions

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

- Quelques
 problèmes
- 2. Systèmes
 - Vocabulaire
 - Vocabulaire
- . Résolution xplicite. cas des
- Vers la formule de Cram
- 4. Algorithme du pivot
- 4.1. Opérations élément
- 4.2. Algorithme du pivot de Gauss
- 4.3. Applications

A bien exploiter

Il reste à bien exploiter ces opérations élémentaires afin de **toujours** trouver la solution d'un système linéaire.

Leçon 25 - Système linéaire

⇒ Systemes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

- Quelques
 problèmes
- 2. Systèmes
 - Vocabulaire
 - . vocabulaire
- Résolution explicite, cas des
- Vore la formula da Cramar
- 8.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithne du pivol de Gauss
 - 1. Opérations éléments
- 4.2. Algorithme du pivot de Gauss
- 4.3. Applicatio

Savoir-faire. Algorithme du pivot de GAUSS

Pour résoudre un système linéaire, on applique des opérations élémentaires pour le rendre triangulaire.

- On cherche un coefficient non nul dans la 1ere colonne (devant la 1ere inconnue) le plus simple (on va devoir diviser par ce nombre).
 Si tous les coefficients sont nuls, on passe à l'inconnue suivante.
- 2. On échange la ligne où l'on a trouvé ce coefficient avec L_1 .
- 3. Pour $j \in [\![2,n]\!]$, on effectue l'opération $L_j \leftrightarrow L_j \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}} L_1$ (ce qui permet d'annuler le coefficient de x_1 en ligne j puis pour toute la colonne).
- On recommence la première étape, en oubliant la première équation et en s'intéressant à l'inconnue suivante, tant qu'il reste des inconnues.

⇒ Méthode de Cramer

- Quelques
 problèmes
- 2. Systèmes linéaires. Equivalence
 - 1. Vocabulaire
- Systèmes équivalents
 Résolution
- ystèmes n=p=2
- 3.1. Vers la lutillule de C
- de Gauss
- 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
- 1.3. Applications

Savoir-faire. Algorithme du pivot de GAUSS

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

Après avoir appliqué cet algorithme, le système obtenu est triangulaire, et l'on peut déterminer ses solutions en partant de la dernière équation et en remontant à la première.

Il peut arriver que l'on retrouve en dernière équation plus d'une inconnue. Dans ce cas, on garde une seule inconnue, les autres deviennent des variables libres que l'on considère alors en second membre.

quivalents

⇒ Méthode d Cramer

- Quelques
 problèmes
 - . Systèmes
 - Vocabulaire
 - Svetámac ánuiva
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
 - Vers la formule de
- 4. Algorithme du pivo de Gauss
 - Opérations éléments
- 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
- 4.3. Applications

- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes linéaires. Equivalence
 - 2.1. Vocabulaire
 - 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
 - 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot de GAUSS
 - 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires
 - 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
 - 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des solutions

Leçon 25 - Système linéaire

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

> Algorithme du

- 1. Quelques
- 2. Systèmes
 - Vocabulaire
 - . Vocabulaire
- . Résolution
- Vers la formule de Crame
- . Algorithme du pive
- de Gauss
- 4.2. Algorithme du pivot de
- 4.3. Applications

$$S_1: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & -y & +z & =1 \\ -x & -y & +z & =3 \\ 2x & +y & +z & =0 \end{array} \right., S_2: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =-2 \end{array} \right.$$
 et
$$S_3: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =2 \end{array} \right.$$

$$-z = -2$$

1. Quelaues

4.3. Applications

$$S_1: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & -y & +z & =1 \\ -x & -y & +z & =3 \\ 2x & +y & +z & =0 \end{array} \right., S_2: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =-2 \end{array} \right.$$
 et
$$S_3: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =2 \end{array} \right.$$

Remarque Nombre de solution

- 1. Quelaues

- 4.3. Applications

$$S_1: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & -y & +z & =1 \\ -x & -y & +z & =3 \\ 2x & +y & +z & =0 \end{array} \right., S_2: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =-2 \end{array} \right.$$
 et
$$S_3: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =2 \end{array} \right.$$

Remarque Nombre de solution

Attention. Lorsqu'il y a infinité de solution. . .

il n'y a pas unicité d'écriture de cet ensemble

quivalents

⇒ Méthode de Cramer

- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes
 - Vocabulaire
 - 0.000
- 3. Résolution explicite. cas des
 - 1 Vora la formula da Crami
- 4. Algorithme du pivot
- 4.1. Opérations élémentaires
 4.2. Algorithme du pivot de
- 4.3. Applications

Objectifs

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

Leçon 25 - Système linéaire

- ⇒ Systemes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du

- 1. Quelques
 - oroblemes
 - Vocabulaire
 - 2 Suntàmas áquiunlants
- 3. Résolution explicite. cas des
- .1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot
- 4.1. Opérations éléme
- GAUSS
- 4.3. Application

Objectifs

- ⇒ Systèmes équivalents
 - Définition de systèmes équivalents

Leçon 25 - Système linéaire

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du

- 1. Quelques
- Svetàmae
 - I. Vocabulaire
- 2 Svetámas ánuivalente
- 3. Résolution explicite. cas des
- .1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivo
- 4.1. Opérations éléme
- GAUSS
- 4.3. Application

Objectifs

- ⇒ Systèmes équivalents
 - Définition de systèmes équivalents
 - Attention, en règle générale, la substitution ne donne qu'une implication (et un inclusion d'ensemble).

Leçon 25 - Système linéaire

équivalents

⇒ Méthode de Cramer

- 1. Quelques
- 2. Systèmes
 - Vocabulaire
- 2.1. Vocabulaire
- 3. Résolution explicite. cas des
- Vers la formule de Cra
- 4. Algorithme du pivol
- 4.1. Opérations élémi
- GAUSS
- 4.3. Application

Objectifs

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

Leçon 25 - Système linéaire

- ⇒ Systemes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du

- 1. Quelques
 - oroblemes
 - Vocabulaire
 - 2 Suntàmas áquiunlants
- 3. Résolution explicite. cas des
- .1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot
- 4.1. Opérations éléme
- GAUSS
- 4.3. Application

Objectifs

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
 - lacktriangle Déterminant d'un système ou d'une matrice de taille 2×2

Leçon 25 - Système linéaire

équivalen

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du

- Quelques
 problèmes
 - néaires. Equivalen
 - Vocabulaire
- 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
 - .1. Vers la formule de Cram
- 4. Algorithme du pivot
- 4.1. Opérations éléme
- GAUSS
- 4.3. Application

Objectifs

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
 - ightharpoonup Déterminant d'un système ou d'une matrice de taille 2×2
 - Résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues par les formules de Cramer (fraction de déterminant de matrices)

⇒ Syster équivalen

⇒ Méthode d Cramer

- 1. Quelques
- 2. Systèmes
 - Vocabulaire
 - . vocabulaire
- 3. Résolution explicite. cas des
 - Vare la formula da Cram
 - Algorithme du pivot
- L1. Opérations élément
- 4.2. Algorithme di
- 4.3. Application

Objectifs

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
 - Déterminant d'un système ou d'une matrice de taille 2×2
 - Résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues par les formules de Cramer (fraction de déterminant de matrices)
 - Généralisation en plus grande dimension?

Leçon 25 - Système linéaire

- 1. Quelaues

Objectifs

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

Leçon 25 - Système linéaire

- ⇒ Systemes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du

- 1. Quelques
- 2. Systèmes
 - . Vocabulaire
 - 2 Svetámas ánuivalante
- 3. Résolution explicite. cas des
- 1 Vare la formula da Cramar
- 4. Algorithme du pivo
- 4.1. Opérations élémer
- Gauss
- 4.3. Application

Objectifs

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss
 - Pour avoir des systèmes équivalents, exploitons que des opérations élémentaires

Leçon 25 - Système linéaire

- 1. Quelaues

Objectifs

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss
 - Pour avoir des systèmes équivalents, exploitons que des opérations élémentaires
 - Bien diriger ses opérations élémentaires : appliquons l'algorithme du pivot de Gauss.

osystemes quivalents

⇒ Méthode de Cramer

- 1. Quelques
- 2. Systèmes
 - Vocabulaire
 - . vocabulaire
- . Résolution xplicite. cas des
- Vora la formula da Cra
- 4. Algorithme du pivot
- 4.1. Opérations élémer
- GAUSS
- 4.3. Application

Objectifs

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss
 - Pour avoir des systèmes équivalents, exploitons que des opérations élémentaires
 - Bien diriger ses opérations élémentaires : appliquons l'algorithme du pivot de Gauss.
 - En déduire les formes générales possibles de l'ensemble de solutions.

- 1. Quelaues

Objectifs

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : Chap 12 : Relations
- TD de jeudi :

8h-10h: N°184, 187, 188, 191, 193, 195

10h-12h: N° 185, 186, 189, 192, 194, 195

Leçon 25 - Système linéaire

- 1. Quelaues