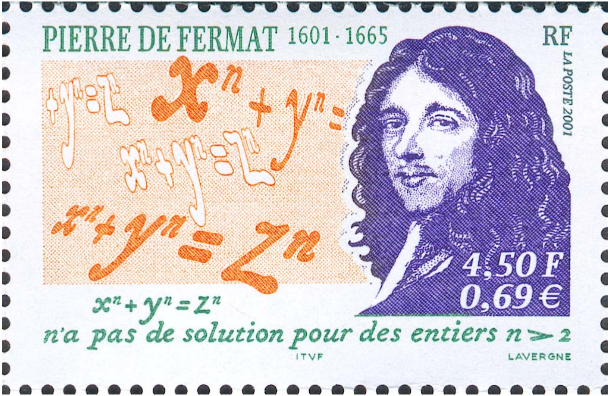

Leçon 25 - Système linéaire

6 novembre 2024

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

Problèmes

Problème Résolution d'un système linéaire

Problèmes

Problème Résolution d'un système linéaire

Problème Résolution « au petit bonheur »

Problèmes

Problème Résolution d'un système linéaire

Problème Résolution « au petit bonheur »

Problème Forme de l'ensemble des solutions

Problèmes

Problème Résolution d'un système linéaire

Problème Résolution « au petit bonheur »

Problème Forme de l'ensemble des solutions

Problème Impact des paramètres

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

Définition

Remarque Formalisme de LEIBNIZ

On commence par **paramétrer notre problème** : on l'élargit en donnant une écriture symbolique (paramétre lettré) aux nombres. Puis on élargit la problème : pourquoi seulement trois équations et trois inconnues ?

Définition

Définition - Système linéaire de n équations à p inconnues

Un système linéaire à n équations et p inconnues à coefficient dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un système S d'équations de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n \end{array}\right. \quad \text{où}$$

- les $a_{i,j} \in \mathbb{K}$;
- $(b_1, b_2, \dots b_n) \in \mathbb{K}^n$ est appelé le second membre de l'équation ;
- $(x_1, x_2 \dots x_p) \in \mathbb{K}^p$ est appelé l'inconnue du système.

On appelle système homogène le système obtenu en remplaçant chaque b_i par 0 (second membre nul).

Définition

Définition - Système linéaire de n équations à p inconnues

On appelle <u>solution</u> du système S, l'ensemble $\mathscr{S} \subset \mathbb{R}^p$ des p-uplets $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots \overline{x}_p)$ qui vérifient les n équations :

$$\forall\ i \in \mathbb{N}_n,\ a_{i,1}\overline{x}_1 + a_{i,2}\overline{x}_2 + \cdots + a_{i,p}\overline{x}_p = b_i$$

Remarques

Remarque Notations

Remarques

Remarque Notations

Remarque Solution(s) du système homogène

Remarques

Remarque Notations

Remarque Solution(s) du système homogène

Heuristique - Résolution

Il y a en gros deux méthodes pour résoudre un tel système.
La méthode de Leibniz (fin du XVII) fonctionne très bien pour les petites dimensions $n, p \leqslant 3$. Elle s'appuie sur les symétries du système. Elle marche bien également *en théorie* pour les grandes dimensions.
La méthode (dite) de Gauss est algorithmique, nous la privilégierons pour les plus grandes dimensions.

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

Implication

Analyse Sens des flèches $\Rightarrow$, $\Leftarrow$

Implication

Analyse Sens des flèches $\Rightarrow$, $\Leftarrow$

Définition - Systèmes équivalents

Deux systèmes S_1 et S_2 sont dits équivalents, notée $S_1 \Longleftrightarrow S_2$ si et seulement si les ensembles de solutions sont les mêmes : $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2$.

Exercice

Les systèmes $S_1 : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x - y = 0 \end{cases}$ et $S_2 : \{\ 2x + y = 1$ sont-ils équivalents ?

Implication

Analyse Sens des flèches $\Rightarrow$, $\Leftarrow$

Définition - Systèmes équivalents

Deux systèmes S_1 et S_2 sont dits équivalents, notée $S_1 \iff S_2$ si et seulement si les ensembles de solutions sont les mêmes : $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2$.

Exercice

Les systèmes $S_1 : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x - y = 0 \end{cases}$ et $S_2 : \{ \; 2x + y = 1$ sont-ils équivalents ?

Attention. Pas d'abus

Typiquement ici, il ne faut pas abuser du symbole d'équivalence ! Dans l'exercice, on écrit donc jamais :

$$S_1 : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x - y = 0 \end{cases} \iff 2x + y = 1$$

Il n'y a ici qu'une implication.

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

Analyse

On considère ici

$$S: \quad \begin{cases} ax & +by & = \alpha \\ cx & +dy & = \beta \end{cases}$$

où a,b,c,d et α,β sont des paramètres, alors que x,y sont les inconnues.

Analyse

On considère ici

$$S: \quad \begin{cases} ax & +by & = \alpha \\ cx & +dy & = \beta \end{cases}$$

où a, b, c, d et α, β sont des paramètres, alors que x, y sont les inconnues.

Analyse Etude « à la lycéenne »

Analyse

On considère ici

$$S: \quad \begin{cases} ax & +by & = \alpha \\ cx & +dy & = \beta \end{cases}$$

où a, b, c, d et α, β sont des paramètres, alors que x, y sont les inconnues.

Analyse Etude « à la lycéenne »

Remarque Avons-nous trouver les solutions ?

Réciproque

Analyse Réciproque

Réciproque

Analyse Réciproque

Remarque $a \neq 0$?

Déterminant

Définition - Déterminant d'un système 2×2

On appelle déterminant du système 2×2 (i.e. $n=2$ et $p=2$)

$$S \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 & = b_2 \end{cases}$$

le nombre $\delta_S = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ souvent noté $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$.

Déterminant

Définition - Déterminant d'un système 2×2

On appelle déterminant du système 2×2 (i.e. $n = 2$ et $p = 2$)

$$S \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 & = b_2 \end{cases}$$

le nombre $\delta_S = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ souvent noté $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$.

Savoir-faire. Formule de Cramer

Si le déterminant du système S est non nul, la solution de $\mathscr{S}$ de

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 & = b_2 \end{cases}$$

est $\mathscr{S} = \{(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\} = \left\{ \left(\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}}, \dfrac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}} \right) \right\}$

Déterminant d'une matrice 2×2

Définition - Déterminant d'un système 2×2

On appelle <u>déterminant du système 2×2</u> (i.e. $n = 2$ et $p = 2$)

$$S \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 & = b_2 \end{cases}$$

le nombre $\delta_S = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ souvent noté $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$.

Déterminant d'une matrice 3×3

Définition - Déterminant d'un système 3×3

On appelle déterminant du système 3×3 (i.e. $n = 3$ et $p = 3$)

$$S \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 & = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 & = b_3 \end{cases}$$

le nombre $\delta_S = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$ souvent noté

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}.$$

Formule de Cramer

Savoir-faire. Formule de CRAMER

Si le déterminant du système S est non nul, la solution de $\mathscr{S}$ de

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 & = b_2 \end{array} \right.$$

est $\mathscr{S} = \{(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\} = \left\{ \left(\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}}, \dfrac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}} \right) \right\}$.

Formule de Cramer

Savoir-faire. Formule de Cramer

Si le déterminant du système S est non nul, la solution de $\mathscr{S}$ de

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 & = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 & = b_3 \end{array} \right.$$

est $\mathscr{S} = \{(\overline{x}_1, \overline{x}_2), \overline{x_3}\} =$

$$\left\{ \left(\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}} \right) \right\}$$

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

Opérations élémentaires

On commence par trouver des invariants de l'ensemble des solutions. Cela permet de raisonner avec des systèmes équivalents

Opérations élémentaires

On commence par trouver des invariants de l'ensemble des solutions. Cela permet de raisonner avec des systèmes équivalents

Définition - Opérations élémentaires

On appelle <u>opérations élémentaires</u> sur le système dont la ligne i est noté L_i, les opérations suivantes :

- pour tout $i, j \leqslant n$, échange des lignes L_i et L_j codé : $L_i \leftrightarrow L_j$
- pour tout $i \leqslant n$, $\lambda \neq 0$, la multiplication de la ligne L_i par λ codé : $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- pour tout $i, j \leqslant n$, $\alpha \in \mathbb{K}$, l'ajout à la ligne L_i de α fois la ligne L_j codé : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$

Systèmes équivalents

Proposition - Invariant des solutions

Les opérations élémentaires conservent exactement les solutions du système

Proposition - Invariant des solutions

Les opérations élémentaires conservent exactement les solutions du système

Démonstration

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

A bien exploiter

Il reste à bien exploiter ces opérations élémentaires afin de **toujours** trouver la solution d'un système linéaire.

A bien exploiter

Il reste à bien exploiter ces opérations élémentaires afin de **toujours** trouver la solution d'un système linéaire.

Savoir-faire. Algorithme du pivot de GAUSS

Pour résoudre un système linéaire, on applique des opérations élémentaires pour le rendre triangulaire.

1. On cherche un coefficient non nul dans la 1ere colonne (devant la 1ere inconnue) le plus simple (on va devoir diviser par ce nombre). Si tous les coefficients sont nuls, on passe à l'inconnue suivante.
2. On échange la ligne où l'on a trouvé ce coefficient avec L_1.
3. Pour $j \in [\![2, n]\!]$, on effectue l'opération $L_j \leftrightarrow L_j - \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}} L_1$ (ce qui permet d'annuler le coefficient de x_1 en ligne j puis pour toute la colonne).
4. On recommence la première étape, en oubliant la première équation et en s'intéressant à l'inconnue suivante, tant qu'il reste des inconnues.

A bien exploiter

Il reste à bien exploiter ces opérations élémentaires afin de **toujours** trouver la solution d'un système linéaire.

Savoir-faire. Algorithme du pivot de GAUSS

1.
2.
3.
4.

Après avoir appliqué cet algorithme, le système obtenu est triangulaire, et l'on peut déterminer ses solutions en partant de la dernière équation et en remontant à la première.
Il peut arriver que l'on retrouve en dernière équation plus d'une inconnue. Dans ce cas, on garde une seule inconnue, les autres deviennent des variables libres que l'on considère alors en second membre.

$\Rightarrow$ Systèmes équivalents

$\Rightarrow$ Méthode de Cramer

$\Rightarrow$ Algorithme du pivot de Gauss

Applications. Vers la notion de rang

Application Trois systèmes à résoudre :

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{rrrl} x & -y & +z & = 1 \\ -x & -y & +z & = 3 \\ 2x & +y & +z & = 0 \end{array} \right. , S_2 : \left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = 1 \\ 2x & -y & +z & = -1 \\ x & -2y & -z & = -2 \end{array} \right. \text{ et}$$

$$S_3 : \left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = 1 \\ 2x & -y & +z & = -1 \\ x & -2y & -z & = 2 \end{array} \right.$$

Applications. Vers la notion de rang

Application Trois systèmes à résoudre :

$$S_1 : \left\{\begin{array}{rrrl} x & -y & +z & = 1 \\ -x & -y & +z & = 3 \\ 2x & +y & +z & = 0 \end{array}\right. , S_2 : \left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = 1 \\ 2x & -y & +z & = -1 \\ x & -2y & -z & = -2 \end{array}\right. \text{ et}$$

$$S_3 : \left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = 1 \\ 2x & -y & +z & = -1 \\ x & -2y & -z & = 2 \end{array}\right.$$

Remarque Nombre de solution

Applications. Vers la notion de rang

Application Trois systèmes à résoudre :

$$S_1 : \begin{cases} x & -y & +z & =1 \\ -x & -y & +z & =3 \\ 2x & +y & +z & =0 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =-2 \end{cases} \text{ et}$$

$$S_3 : \begin{cases} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =2 \end{cases}$$

Remarque Nombre de solution

Attention. Lorsqu'il y a infinité de solution...

il n'y a pas unicité d'écriture de cet ensemble

Conclusion

Objectifs

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Systèmes équivalents

- Définition de systèmes équivalents

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Systèmes équivalents

- Définition de systèmes équivalents
- Attention, en règle générale, la substitution ne donne qu'une implication (et un inclusion d'ensemble).

Conclusion

Objectifs

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Systèmes équivalents

$\Rightarrow$ Méthode de Cramer

- Déterminant d'un système ou d'une matrice de taille 2×2

Conclusion

Objectifs

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

- Déterminant d'un système ou d'une matrice de taille 2×2
- Résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues par les formules de Cramer (fraction de déterminant de matrices)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Systèmes équivalents

$\Rightarrow$ Méthode de Cramer

- Déterminant d'un système ou d'une matrice de taille 2×2
- Résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues par les formules de Cramer (fraction de déterminant de matrices)
- Généralisation en plus grande dimension ?

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Systèmes équivalents

$\Rightarrow$ Méthode de Cramer

$\Rightarrow$ Algorithme du pivot de Gauss

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Systèmes équivalents

$\Rightarrow$ Méthode de Cramer

$\Rightarrow$ Algorithme du pivot de Gauss

- Pour avoir des systèmes équivalents, exploitons que des opérations élémentaires

Conclusion

Objectifs

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- Pour avoir des systèmes équivalents, exploitons que des opérations élémentaires
- Bien diriger ses opérations élémentaires : appliquons l'algorithme du pivot de Gauss.

Conclusion

Objectifs

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- Pour avoir des systèmes équivalents, exploitons que des opérations élémentaires
- Bien diriger ses opérations élémentaires : appliquons l'algorithme du pivot de Gauss.
- En déduire les formes générales possibles de l'ensemble de solutions.

Conclusion

Objectifs

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : Chap 12 : Relations
- TD de jeudi :
  8h-10h : N°184, 187, 188, 191, 193, 195
  10h-12h : N° 185, 186, 189, 192, 194, 195