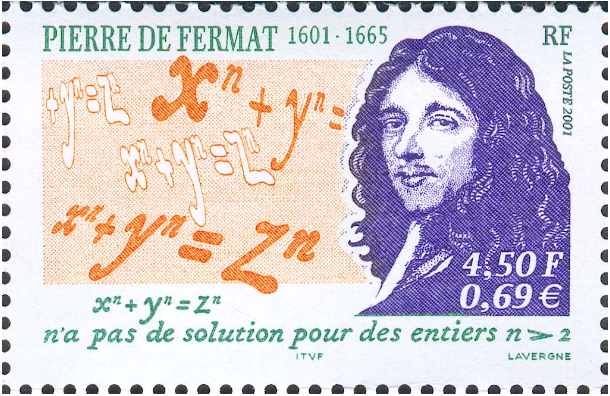

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

12 novembre 2024

⇒Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

⇒Propriétés « analytique »de l'intégrale

Problèmes

Problème Lien primitive/intégrale.
Quel lien entre l'optimisation et le calcul global ?

Problèmes

Problème Lien primitive/intégrale.
Quel lien entre l'optimisation et le calcul global ?

Problème Problèmes historiques.
L'horloge de Claude Perrault

Problèmes

Problème Lien primitive/intégrale.
Quel lien entre l'optimisation et le calcul global ?

Problème Problèmes historiques.
L'horloge de Claude Perrault

Problème Primitivisation des opérations alégébriques.
Intégrale d'une somme ? Facile !
Et pour un produit ? Et une composition ?

Problèmes

Problème Lien primitive/intégrale.
Quel lien entre l'optimisation et le calcul global ?

Problème Problèmes historiques.
L'horloge de Claude Perrault

Problème Primitivisation des opérations alégébriques.
Intégrale d'une somme ? Facile !
Et pour un produit ? Et une composition ?

Problème Fraction rationnelle.
Une méthode pour trouver une primitive à toute fraction rationnelle imaginable !

Problèmes

Problème Implication.

Lien : être continue et admettre une primitive ?

Problèmes

Problème Implication.

Lien : être continue et admettre une primitive ?

Problème Problème de M. Lagoute.

Le fameux oscillateur harmonique

Problèmes

Problème Implication.
Lien : être continue et admettre une primitive ?

Problème Problème de M. Lagoute.
Le fameux oscillateur harmonique

Problème Existence. Unicité
Problème de Cauchy

Problèmes

Problème Implication.
Lien : être continue et admettre une primitive ?

Problème Problème de M. Lagoute.
Le fameux oscillateur harmonique

Problème Existence. Unicité
Problème de Cauchy

Problème Linéarisation.
Que faire si l'équation n'est pas linéaire ?

⇒**Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale**

⇒**Propriétés « analytique »de l'intégrale**

Primitive

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Primitive

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - Primitives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. à valeurs dans $\mathbb{C}$). On appelle primitive de f sur I toute fonction F **dérivable** sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. à valeurs dans $\mathbb{C}$) telle que, sur I, $F' = f$.

Propriétés

Propriété - CNS de primitive sur $\mathbb{C}$

$F : I \to \mathbb{C}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{C}$ si et seulement si $\mathbf{Re}F$ et $\mathbf{Im}F$ sont des primitives de $\mathbf{Re}f$ et $\mathbf{Im}f$ (resp.).

Propriétés

Propriété - CNS de primitive sur $\mathbb{C}$

$F : I \to \mathbb{C}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{C}$
si et seulement si $\mathbf{Re}F$ et $\mathbf{Im}F$ sont des primitives de $\mathbf{Re}f$ et $\mathbf{Im}f$ (resp.).

Propriété - Définition à constante additive près

Deux primitives de f sur l'intervalle I diffèrent d'une constante.
C'est-à-dire que si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est

$$\left\{x \mapsto F(x) + C ; C \in \mathbb{K}\right\}$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$).

Propriétés

Propriété - CNS de primitive sur $\mathbb{C}$

$F : I \to \mathbb{C}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{C}$
si et seulement si $\mathbf{Re}F$ et $\mathbf{Im}F$ sont des primitives de $\mathbf{Re}f$ et $\mathbf{Im}f$ (resp.).

Propriété - Définition à constante additive près

Deux primitives de f sur l'intervalle I diffèrent d'une constante.
C'est-à-dire que si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est

$$\left\{x \mapsto F(x) + C ; C \in \mathbb{K}\right\}$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$).

$\frac{1}{2}$**Démonstration**

⇒**Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale**

⇒**Propriétés « analytique »de l'intégrale**

Tableau (1)

En reprenant simplement le tableau de dérivations des fonctions usuelles, on trouve :

Tableau (1)

Proposition - Tableau des primitives usuelles des fonctions à valeurs réelles (1)

fonction	primitives	fonction	primitives
x^α où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$	$e^{\beta x}$ où $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\dfrac{e^{\beta x}}{\beta} + C$
$\mathrm{sh}\beta x$ où $\beta \neq 0$	$\dfrac{\mathrm{ch}\beta x}{\beta} + C$	$\mathrm{ch}\beta x$ où $\beta \neq 0$	$\dfrac{\mathrm{sh}\beta x}{\beta} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin \beta x$ où $\beta \neq 0$	$-\dfrac{\cos \beta x}{\beta} + C$	$\cos \beta x$ où $\beta \neq 0$	$\dfrac{\sin \beta x}{\beta} + C$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$	$\ln x$	$x \ln x - x + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

(C est une constante réelle)

Tableau (2)

Proposition - Tableau des primitives usuelles des fonctions à valeurs réelles (2)

fonction f de la forme :	primitive F
$u'(x)u(x)^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + C$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + C$

Remarques

Ces formules sont valables sur tout **intervalle** I où f (ou u) est continue.

Remarques

Ces formules sont valables sur tout **intervalle** I où f (ou u) est continue.

Attention. Primitive sur deux intervalles

Si f admet des primitives sur la réunion de deux intervalles disjoints, on peut avoir des constantes différentes sur chacun des deux intervalles.
On rencontrera particulièrement cette situation dans le chapitre sur les équations différentielles.

⇒**Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale**

⇒**Propriétés « analytique »de l'intégrale**

Exponentielles et trigonométrie

Savoir-faire. $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $e^{\alpha x}\sin\beta x$

Pour $f(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $f(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), il suffit de primitver $e^{(\alpha+i\beta)x}$ et récupérer partie réelle ou imaginaire.

Exponentielles et trigonométrie

Savoir-faire. $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $e^{\alpha x}\sin\beta x$

Pour $f(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $f(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$, il suffit de primitver $e^{(\alpha+i\beta)x}$ et récupérer partie réelle ou imaginaire.

Savoir-faire. $\sin^n x\cos^m x$

Pour $f(x) = \sin^n x\cos^m x$, on peut linéariser.
Rappelons que pour cela on utilise les formules de de Moivre :
$\sin^n x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n \ldots$

Exponentielles et trigonométrie

Savoir-faire. $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $e^{\alpha x}\sin\beta x$

Pour $f(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $f(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$ ($\alpha,\beta\in\mathbb{R}$), il suffit de primitver $e^{(\alpha+i\beta)x}$ et récupérer partie réelle ou imaginaire.

Savoir-faire. $\sin^n x\cos^m x$

Pour $f(x)=\sin^n x\cos^m x$, on peut linéariser.
Rappelons que pour cela on utilise les formules de de Moivre :
$\sin^n x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n\ldots$

<u>Exercice</u>

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :
$f_1(x)=e^{3x}\sin(2x)$; $\quad f_2(x)=\sin^3(x)\cos^4(x)$

Exponentielles et trigonométrie

Savoir-faire. $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $e^{\alpha x}\sin\beta x$

Pour $f(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $f(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$ ($\alpha,\beta\in\mathbb{R}$), il suffit de primitver $e^{(\alpha+i\beta)x}$ et récupérer partie réelle ou imaginaire.

Savoir-faire. $\sin^n x\cos^m x$

Pour $f(x)=\sin^n x\cos^m x$, on peut linéariser.
Rappelons que pour cela on utilise les formules de de Moivre :
$\sin^n x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n\ldots$

<u>Exercice</u>

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :
$f_1(x)=e^{3x}\sin(2x);\quad f_2(x)=\sin^3(x)\cos^4(x)$

Remarque Si on a un doute…

Fractions rationnelles (table)

Proposition - Tableau de primitives de certaines fonctions rationnelles (fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$)

fonction	primitives
$\frac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert + C$
$\frac{1}{(x-a)^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{-1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
$\frac{2x+p}{x^2+px+q}$	$\ln\lvert x^2+px+q\rvert + C$
$\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}$ où $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$\frac{-1}{n-1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + C$

(C est une constante réelle)

Fractions rationnelles (table)

Proposition - Tableau de primitives de certaines fonctions rationnelles (fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$)

fonction	primitives
$\frac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert + C$
$\frac{1}{(x-a)^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{-1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
$\frac{2x+p}{x^2+px+q}$	$\ln\lvert x^2+px+q\rvert + C$
$\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}$ où $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$\frac{-1}{n-1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + C$

(C est une constante réelle)

Exercice

A démontrer

Fractions rationnelles (savoir-faire)

Remarque Division euclidienne

Fractions rationnelles (savoir-faire)

Remarque Division euclidienne

Savoir-faire. Fractions rationnelles $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Pour les fractions rationnelles de la forme $f(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0)$:

- si $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines réelles distinctes α et β. On cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \dfrac{\lambda}{x-\alpha} + \dfrac{\mu}{x-\beta}$ et on primitive :
  $F(x) = \lambda \ln|x-\alpha| + \mu \ln|x-\beta| = \ln|(x-\alpha)^\lambda (x-\beta)^\mu|$

Fractions rationnelles (savoir-faire)

Remarque Division euclidienne

Savoir-faire. Fractions rationnelles $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Pour les fractions rationnelles de la forme $f(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0)$:

- si $\Delta > 0$,
  $F(x) = \lambda \ln|x-\alpha| + \mu \ln|x-\beta| = \ln|(x-\alpha)^\lambda (x-\beta)^\mu|$
- si $\Delta = 0$, on a alors $f(x) = \dfrac{1}{a(x-\alpha)^2}$.
  On primitive directement avec la fraction rationnelle :
  $F(x) = \dfrac{1}{a(x-\alpha)}$

Fractions rationnelles (savoir-faire)

Remarque Division euclidienne

Savoir-faire. Fractions rationnelles $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Pour les fractions rationnelles de la forme $f(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0)$:

- si $\Delta > 0$,
  $F(x) = \lambda \ln|x-\alpha| + \mu \ln|x-\beta| = \ln|(x-\alpha)^{\lambda}(x-\beta)^{\mu}|$
- si $\Delta = 0$, $F(x) = \dfrac{1}{a(x-\alpha)}$
- si $\Delta < 0$, on met sous forme canonique $f(x) = \dfrac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$.
  On reconnaît une fonction composée qui se primitive avec $\arctan$: $F(x) = \dfrac{1}{\beta}\arctan\left(\dfrac{x+\alpha}{\beta}\right)$

Fractions rationnelles (savoir-faire)

Remarque Division euclidienne

Savoir-faire. Fractions rationnelles $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Pour les fractions rationnelles de la forme $f(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0)$:

- si $\Delta > 0$,
  $F(x) = \lambda \ln|x-\alpha| + \mu \ln|x-\beta| = \ln|(x-\alpha)^\lambda (x-\beta)^\mu|$
- si $\Delta = 0$, $F(x) = \dfrac{1}{a(x-\alpha)}$
- si $\Delta < 0$, $F(x) = \dfrac{1}{\beta} \arctan\left(\dfrac{x+\alpha}{\beta}\right)$

Exercice

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \frac{1}{(x^2-x-2)}$; $\quad f_2(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$; $\quad f_3(x) = \frac{2x-1}{x^2+x+1}$.

⇒**Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale**

⇒**Propriétés « analytique »de l'intégrale**

Une certaine définition

Définition - Notation

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, pour tout $a < b \in I$, on note

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

l'aire (algébrique) comprise entre les segments de droites $x = a$, $y = 0$, $x = b$ et la courbe $y = f(x)$.
Nous admettons son existence si f est continue sur $[a, b]$

Une certaine définition

Définition - Intégrale de f sur $[a,b]$

Si $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est continue sur $[a,b]$, on appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le nombre complexe

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathbf{Re} f(t)dt + i\int_a^b \mathbf{Im} f(t)\mathrm{d}t.$$

Une certaine définition

Définition - Intégrale de f sur $[a,b]$

Si $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est continue sur $[a,b]$, on appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le nombre complexe

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b \mathbf{Re}f(t)\,dt+i\int_a^b \mathbf{Im}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Attention. Définition ?

Est-ce vraiment une définition ? Non, car on ne sait pas bien ce qu'est ce calcul. Préciser qu'il s'agit du nombre obtenu à partir d'une primitive de f, c'est tourner en rond par rapport au théorème et au corollaire qui suivent.

Une certaine définition

Définition - Intégrale de f sur $[a,b]$

Si $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est continue sur $[a,b]$, on appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le nombre complexe

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathbf{Re} f(t)dt + i\int_a^b \mathbf{Im} f(t)\mathrm{d}t.$$

Attention. Définition ?

A ce stade, on est obligé de prendre ce nombre comme construit à partir de f, a et b. Au second semestre, nous prendrons le temps de bien montrer l'existence et donner un algorithme de calcul de ce nombre. Nous verrons qu'il n'est pas nécessaire que f soit continue (f pourrait être moins régulière)

<u>Exercice</u>

Soit P, polynomiale. On suppose : $\forall\ m\in\mathbb{N}$,
$\int_0^{2\pi} e^{-imt}P(e^{it})\mathrm{d}t = 0$.
Montrer que $P = 0$

Théorème fondamental

Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel

Soit f continue sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $a \in I$.

Alors la fonction

$$\begin{array}{rcl} F: & I & \to K \\ & x & \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable de dérivée continue) sur I et $F' = f$.

C'est de plus l'unique primitive de f nulle en $a \in I$.

Corollaire (1)

Corollaire - Existence de primitive

Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Corollaire (1)

Corollaire - Existence de primitive

Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Attention. Pas toutes les primitives avec cette notation

On n'obtient pas toutes les primitives ainsi.
Ainsi, pour $f(x) = \cos x$, la primitive $F(x) = \sin x + 2$ ne peut s'obtenir ainsi. En effet, on aurait alors $F(x) = \sin x - \sin a$, or il n'existe pas de $a \in \mathbb{R}$ tel que $\sin a = -2$.

Corollaire (2)

Théorème - Calcul fondamental

Soit f continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a et b. Soit F une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b$$

Corollaire (2)

Théorème - Calcul fondamental

Soit f continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a et b. Soit F une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b$$

Démonstration

Notations

Définition - Notation par extension

On notera, par extension des notations précédentes :

- $\int_{.}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, une primitive quelconque de f.
  C'est plutôt l'ensemble de toutes les primitives de f, modulo la constante additive
- $[F(t)]_{.}^{x} = F(x)$

Notations

Définition - Notation par extension

On notera, par extension des notations précédentes :

- $\int_{\cdot}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, une primitive quelconque de f.
  C'est plutôt l'ensemble de toutes les primitives de f, modulo la constante additive
- $[F(t)]_{\cdot}^{x} = F(x)$

Corollaire. Avec f'

Soit f de classe C^1 sur I. Alors

$$\forall (a,x) \in I^2, f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t.$$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

$\Rightarrow$ Propriétés « analytique »de l'intégrale

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

- $f \to f' \iff f \leftarrow F$: primitivisation

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

- $f \to f' \iff f \leftarrow F$: primitivisation
- Tableau de correspondance (**A APPRENDRE**)

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

- $f \to f' \Longleftrightarrow f \leftarrow F$: primitivisation
- Tableau de correspondance (**A APPRENDRE**)
- Et une première série de savoir-faire (exponentielle et trigonométrie)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

- $f \to f' \iff f \leftarrow F$: primitivisation
- Tableau de correspondance (**A APPRENDRE**)
- Et une première série de savoir-faire (exponentielle et trigonométrie)
- $\displaystyle\int_a^b (f)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

$\Rightarrow$ Propriétés « analytique »de l'intégrale

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

⇒ Propriétés « analytique »de l'intégrale

- Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

⇒ Propriétés « analytique »de l'intégrale

- Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.
- Le calcul intégral est bien l'inverse de celui de la dérivation.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

⇒ Propriétés « analytique »de l'intégrale

- Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.
- Le calcul intégral est bien l'inverse de celui de la dérivation.
- Question remise à plus tard : quelles sont les fonctions qui admettent une primitive, finalement.
  C'est un ensemble qui contient strictement l'ensemble des fonctions continues.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

⇒ Propriétés « analytique »de l'intégrale

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 6
  3.2. Quelques propriétés
  3.3 et 3.4. Techniques
- Exercice n° 126 & 127
- TD de jeudi :
  8h-10h : n°128 pair, 129, 132, 136 impair, 138
  10h-12h : n°128 impair, 130, 133, 134, 136 pair, 137