

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

géométique ⇒Propriétés

 $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 

Problèmes

2. FIIIIIIIIVE:

2.2. Primitives usuelles

2.3. Quelques cas particuliers

Intégrales

3.1. Théorème fondamental et

⇒Propriétés « analytique »de l'intégrale

#### 1. Problèmes

#### 2. Primitives

- 2.1. Définitions
- 2.2. Primitives usuelles
- 2.3. Quelques cas particuliers

#### 3. Intégrales

3.1. Théorème fondamental et conséquences

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Propriétés « analytique »

#### 1. Problèmes

- Primitives
  - 2.1. Définitions
- 2.2 Primitivos usuallas
- 3. Quelques cas particuliers

#### . Intégrales

**Problème** Lien primitive/intégrale.

Quel lien entre l'optimisation et le calcul global?

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Proprietes « analytique »

- 1. Problèmes
- 2. Primitive
- 1 Définitions
- 2 Primitives usuelles
- 3. Quelques cas particuliers
- Intégrales

**Problème** Lien primitive/intégrale. Quel lien entre l'optimisation et le calcul global?

**Problème** Problèmes historiques. L'horloge de Claude Perrault Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Proprietes
« analytique

1. Problèmes

2. Primitive:

1. Définitions

2. Primitives usuelles

3. Quelques cas particuliers

. Intégrales

**Problème** Lien primitive/intégrale. Quel lien entre l'optimisation et le calcul global?

**Problème** Problèmes historiques. L'horloge de Claude Perrault

**Problème** Primitivisation des opérations alégébriques. Intégrale d'une somme ? Facile! Et pour un produit ? Et une composition ?

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Proprietes « analytique

1. Problèmes

2. Primitives

2 Primitiuse usuallas

3. Quelques cas particuliers

Intégrales

Problème Lien primitive/intégrale.

Quel lien entre l'optimisation et le calcul global?

Problème Problèmes historiques.

L'horloge de Claude Perrault

**Problème** Primitivisation des opérations alégébriques.

Intégrale d'une somme ? Facile !

Et pour un produit? Et une composition?

Problème Fraction rationnelle.

Une méthode pour trouver une primitive à toute fraction rationnelle imaginable!

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivatior Propriétés

⇒Proprietes « analytique

1. Problèmes

.................

2. Primitives

2 Primitivos usualla

2.3. Quelques cas particulis

Intégrales

integrales

Problème Implication.

Lien : être continue et admettre une primitive ?

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Propriétés « analytique

1. Problèmes

2. Primitive

2.1. Définitions

2.2. Primitives usuelles

3. Quelques cas particuliers

Intégrales

Problème Implication.

Lien : être continue et admettre une primitive ?

**Problème** Problème de M. Lagoute.

Le fameux oscillateur harmonique

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Proprietes
« analytique »

1. Problèmes

.....

2. I IIIIIIIIVE

.1. Definitions

2. Primitives usuelles

latéavalaa

Intégrales

Problème Implication.

Lien : être continue et admettre une primitive ?

**Problème** Problème de M. Lagoute. Le fameux oscillateur harmonique

**Problème** Existence. Unicité Problème de Cauchy

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Proprietes
« analytique »

1. Problèmes

2 Primitive

2.1 Définitions

0.00

Cualquas aas particulis

Intégrales

Problème Implication.

Lien : être continue et admettre une primitive?

**Problème** Problème de M. Lagoute.

Le fameux oscillateur harmonique

**Problème** Existence. Unicité Problème de Cauchy

**Problème** Linéarisation.

Que faire si l'équation n'est pas linéaire?

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Proprietes
« analytique »

1. Problèmes

.....

2. Primitives

2.1. Definitions

2. Primitives usuelles

querques eus partieur

. Intégrales

⇒Propriétés « analytique »de l'intégrale

- 1. Problèmes
- 2. Primitives
  - 2.1. Définitions
  - 2.2 Primitives usuelles
  - 2.3. Quelques cas particuliers
- 3. Intégrales
  - 3.1. Théorème fondamental et conséquences

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

Inverse dérivation Propriétés

géométique

« analytique »

- I. Problèmes
- 2. Primitive
- 2.1. Définitions
- 2.2. Primitives usuelles
- 3. Quelques cas particuliers
- Intégrales

## **Primitive**

I désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Propriétés « analytique »

Problèmes

Primitive:

2.1. Définitions

2 Primitivos usuallos

. Quelques cas particulien

. Intégrales

## **Primitive**

I désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

#### Définition - Primitives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de  $\mathbb R$  à valeurs dans  $\mathbb R$  (resp. à valeurs dans  $\mathbb C$ ). On appelle primitive de f sur I toute fonction F **dérivable** sur I à valeurs dans  $\mathbb R$  (resp. à valeurs dans  $\mathbb C$ ) telle que, sur I, F' = f.

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivatior Propriétés

⇒Propriétés « analytique » : □ → 
□

- . Problèmes
- 2. Primitive
- 2.1. Définitions
- 2.2. Primitives usuelles
- -- ----
- . Intégrales
- Théorème fondamental et conséquences

## Propriétés

## Propriété - CNS de primitive sur ℂ

 $F:I \to \mathbb{C}$  est une primitive de  $f:I \to \mathbb{C}$  si et seulement si  $\mathbf{Re}F$  et  $\mathbf{Im}F$  sont des primitives de  $\mathbf{Re}f$  et  $\mathbf{Im}f$  (resp.).

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

géométique

« analytique »  $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 

- 1. Problèmes
- 2. Primitive
- 2.1. Définitions
  - 2. Primitives usuelles
  - Quelques cas particuliers
- 3.1. Théorème fondamental et

 $F: I \to \mathbb{C}$  est une primitive de  $f: I \to \mathbb{C}$ si et seulement si  $\mathbf{Re}F$  et  $\mathbf{Im}F$  sont des primitives de  $\mathbf{Re}f$  et  $\mathbf{Im} f$  (resp.).

## Propriété - Définition à constante additive près

Deux primitives de f sur l'intervalle I diffèrent d'une constante. C'est-à-dire que si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est

$$\left\{x \mapsto F(x) + C; C \in \mathbb{K}\right\}$$

où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) si f est à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (resp. dans  $\mathbb{C}$ ).

- 2 Primitives
- 2.1 Définitions

## Propriété - CNS de primitive sur ℂ

 $F:I \to \mathbb{C}$  est une primitive de  $f:I \to \mathbb{C}$  si et seulement si  $\mathbf{Re}F$  et  $\mathbf{Im}F$  sont des primitives de  $\mathbf{Re}f$  et  $\mathbf{Im}f$  (resp.).

## Propriété - Définition à constante additive près

Deux primitives de f sur l'intervalle I diffèrent d'une constante. C'est-à-dire que si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est

$$\left\{x \mapsto F(x) + C; C \in \mathbb{K}\right\}$$

où  $\mathbb{K}=\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ) si f est à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (resp. dans  $\mathbb{C}$ ).

## $\frac{1}{2}$ Démonstration

- ⇒Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale
- ⇒Propriétés « analytique »de l'intégrale

- 1. Problèmes
- 2. Primitives
  - 2.1 Définitions
  - 2.2. Primitives usuelles
  - 2.3. Quelques cas particuliers
- 3. Intégrales
  - 3.1. Théorème fondamental et conséquences

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

Inverse dérivation
 Propriétés

⇒Propriétés « analytique »

1. Problèmes

Primitive:

2.1. Définitions

2.2. Primitives usuelles

. Quelques cas particulien

3. Intégrales

## Tableau (1)

En reprenant simplement le tableau de dérivations des fonctions usuelles, on trouve :

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

→ Inverse dérivation. Propriétés

« analytique »

Problèmes

2. Primitive

2.1. Définitions

2.2. Primitives usuelles

3. Intégrales

## Tableau (1)

# Proposition - Tableau des primitives usuelles des fonctions à valeurs réelles (1)

fonction	primitives	fonction	primitives
$x^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\frac{1}{x}$	$\ln  x  + C$
$e^x$	$e^x + C$	$e^{\beta x}$ où $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\frac{e^{\beta x}}{\beta} + C$
$\operatorname{sh}\beta x$ où $\beta \neq 0$	$\frac{\mathrm{ch}\beta x}{\beta} + C$	$\operatorname{ch}\beta x$ où $\beta \neq 0$	$\frac{\sinh \beta x}{\beta} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin \beta x$ où $\beta \neq 0$	$-\frac{\cos\beta x}{\beta} + C$	$\cos \beta x$ où $\beta \neq 0$	$\frac{\sin \beta x}{\beta} + C$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$	$\ln x$	$x \ln x - x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

(C est une constante réelle)

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

Propriétés géométique

>Propriétés analytique × 2 → ℂ

. Problèmes

z. Primilive

2.2. Primitives usuelles

.3. Quelques cas particulien

Intégrales

## Tableau (2)

Proposition - Tableau des primitives usuelles des fonctions à valeurs réelles (2)

fonction $f$ de la forme :	primitive $F$
$u'(x)u(x)^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) +C$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + C$

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés géométique

⇒Propriétés ‹ analytique » : ₹ → ℂ

1. Problèmes

2. Primitive:

Définitions

2.2. Primitives usuelles

Quelques cas particuliers

Intégrales

3.1. Théorème fondamental et

## Remarques

Ces formules sont valables sur tout **intervalle** I où f (ou u) est continue.

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation. Propriétés

« analytique »

1. Problèmes

. Primitive

2.1. Définitions

2.2. Primitives usuelles

B. Quelques cas particuliers

. Intégrales

## Remarques

Ces formules sont valables sur tout **intervalle** I où f (ou u) est continue.

#### Attention. Primitive sur deux intervalles

Si f admet des primitives sur la réunion de deux intervalles disjoints, on peut avoir des constantes différentes sur chacun des deux intervalles.

On rencontrera particulièrement cette situation dans le chapitre sur les équations différentielles.

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

Propriétés géométique

⇒Propriétés « analytique » ℝ → ℂ

Problème:

Primitives

2.1. Definitions
2.2. Primitives usuelles

3. Quelques cas particuliers

Intégrales

- ⇒Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale
- ⇒Propriétés « analytique »de l'intégrale

- 1. Problèmes
- 2. Primitives
  - 2.1 Définitions
  - 2.2 Primitives usualles
  - 2.3. Quelques cas particuliers
- 3. Intégrales
  - 3.1 Théorème fondamental et conséquences

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

Inverse dérivation
 Propriétés

geometique

« analytique » ℝ → ℂ

- 1. Problèmes
- Primitives
  - .1. Définitions
- 2.2. Primitives usuelles
  2.3. Quelques cas particuliers
  - Intégrales

## Exponentielles et trigonométrie

Savoir-faire.  $e^{\alpha x}\cos\beta x$  ou  $e^{\alpha x}\sin\beta x$ 

Pour  $f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$  ou  $f(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$   $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ , il suffit de primitver  $e^{(\alpha + i\beta)x}$  et récupérer partie réelle ou imaginaire.

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

 Inverse dérivati ropriétés éconétique

- 1. Problèmes
- Primitives
  - .1. Définitions
- 2.3. Quelques cas particuliers
  - Intégrales
- 3.1. Théorème fondamental et conséquences

Pour  $f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$  ou  $f(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$   $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ , il suffit de primitver  $e^{(\alpha+i\beta)x}$  et récupérer partie réelle ou imaginaire.

Savoir-faire.  $\sin^n x \cos^m x$ 

Pour  $f(x) = \sin^n x \cos^m x$ , on peut linéariser.

Rappelons que pour cela on utilise les formules de de Moivre :

$$\sin^n x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n \dots$$

⇒Propriétés : analytique »

1. Problèmes

Primitives

.1. Définitions

2.3. Quelques cas particuliers

Intégrales

3.1. Théorème fondamental e

Pour  $f(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$  ou  $f(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$   $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ , il suffit de primitver  $e^{(\alpha+i\beta)x}$  et récupérer partie réelle ou imaginaire.

Savoir-faire.  $\sin^n x \cos^m x$ 

Pour  $f(x) = \sin^n x \cos^m x$ , on peut linéariser.

Rappelons que pour cela on utilise les formules de de Moivre :

$$\sin^n x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n \dots$$

#### Exercice

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{3x} \sin(2x);$$
  $f_2(x) = \sin^3(x) \cos^4(x)$ 

opriétés ométique

⇒rrophetes « analytique : R → C

- Problèmes
- Primitives
  - .1. Définitions
- 2.2. Primitives usuelles

  2.3. Quelques cas particuliers
  - Intégralos
  - Intégrales
- 3.1. Théorème fondamental et conséquences

Pour  $f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$  ou  $f(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$   $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ , il suffit de primitver  $e^{(\alpha+i\beta)x}$  et récupérer partie réelle ou imaginaire.

## Savoir-faire. $\sin^n x \cos^m x$

Pour  $f(x) = \sin^n x \cos^m x$ , on peut linéariser.

Rappelons que pour cela on utilise les formules de de Moivre :

$$\sin^n x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n \dots$$

#### Exercice

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{3x} \sin(2x);$$
  $f_2(x) = \sin^3(x) \cos^4(x)$ 

Remarque Si on a un doute...

I. Problèmes

2. Primitives

.2. Primitives usuelles

2.3. Quelques cas particuliers

Intégrales

## Fractions rationnelles (table)

Proposition - Tableau de primitives de certaines fonctions rationnelles (fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ )

fonction	primitives
$\frac{1}{x-a}$	$\ln x-a +C$
$\frac{1}{(x-a)^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{-1}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
$\frac{2x+p}{x^2+px+q}$	$\ln x^2 + px + q  + C$
$\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} \text{ où } n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$\frac{-1}{n-1} \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + C$

 $(C ext{ est une constante réelle})$ 

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

> Inverse dérivation opriétés

Problèmes

. Primitives

1. Définitions

2.3. Quelques cas particuliers

Intégrales

3.1. Théorème fondamental et

## Fractions rationnelles (table)

## Proposition - Tableau de primitives de certaines fonctions rationnelles (fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ )

fonction	primitives
$\frac{1}{x-a}$	$\ln x-a +C$
$\frac{1}{(x-a)^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{-1}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
$\frac{2x+p}{x^2+px+q}$	$\ln x^2 + px + q  + C$
$\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} \text{ où } n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$\frac{-1}{n-1} \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + C$

 $(C ext{ est une constante réelle})$ 

### Exercice

A démontrer

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

Inverse dérivat

⇒Propriétés « analytique » ® → €

. Problèmes

2 Primitives usuelles

2.3. Quelques cas particuliers

Intégrales

## Fractions rationnelles (savoir-faire)

Remarque Division euclidienne

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Propriétés « analytique »

ℝ → ℂ

- I. Problèmes
- 2. Primitive
- 2.1. Définitions
- 2.3. Quelques cas particuliers
- 3 Intégrales

Remarque Division euclidienne

Savoir-faire. Fractions rationnelles 
$$\frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

Pour les fractions rationnelles de la forme  $f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$  $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0)$ :

si Δ > 0, le trinôme a deux racines réelles distinctes α et β. On cherche  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $f(x) = \frac{\lambda}{x - \alpha} + \frac{\mu}{x - \beta}$  et on primitive:

$$F(x) = \lambda \ln|x - \alpha| + \mu \ln|x - \beta| = \ln|(x - \alpha)^{\lambda}(x - \beta)^{\mu}|$$

Lecon 28 - Fonctions équations différentielles

- 2.3. Quelques cas particuliers

## Savoir-faire. Fractions rationnelles $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$

Pour les fractions rationnelles de la forme  $f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$   $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0)$ :

- si  $\Delta > 0$ ,  $F(x) = \lambda \ln|x - \alpha| + \mu \ln|x - \beta| = \ln|(x - \alpha)^{\lambda} (x - \beta)^{\mu}|$
- si  $\Delta = 0$ , on a alors  $f(x) = \frac{1}{a(x-\alpha)^2}$ . On primitive directement avec la fraction rationnelle:

$$F(x) = \frac{1}{a(x - \alpha)}$$

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Propriétés

1. I TODICITICS

2. Primitives

.2. Primitives usuelles

2.3. Quelques cas particuliers

. Intégrales

# Savoir-faire. Fractions rationnelles $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$

Pour les fractions rationnelles de la forme  $f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$   $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0)$ :

- si  $\Delta > 0$ ,  $F(x) = \lambda \ln|x - \alpha| + \mu \ln|x - \beta| = \ln|(x - \alpha)^{\lambda} (x - \beta)^{\mu}|$
- ► si  $\Delta$  < 0, on met sous forme canonique  $f(x) = \frac{1}{(x+\alpha)^2 + \beta^2}$ . On reconnaît une fonction composée qui se primitive avec  $\arctan: F(x) = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)$

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

- → Inverse dérivation Propriétés géométique
- ⇒Propriétés « analytique » R → C
- 1. Problèmes
- Primitives
  - Définitions
- 2.3. Quelques cas particuliers
- Intégrales
- 3.1. Théorème fondamental et conséquences

## Remarque Division euclidienne

Savoir-faire. Fractions rationnelles 
$$\frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

Pour les fractions rationnelles de la forme  $f(x) = \frac{1}{ax^2 + hx + c}$  $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0)$ :

- ightharpoonup si  $\Delta > 0$ .  $F(x) = \lambda \ln|x - \alpha| + \mu \ln|x - \beta| = \ln|(x - \alpha)^{\lambda}(x - \beta)^{\mu}|$
- ightharpoonup si  $\Delta < 0$ ,  $F(x) = \frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)$

#### Exercice

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{(x^2 - x - 2)};$$
  $f_2(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1};$   $f_3(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + x + 1}.$ 

Lecon 28 - Fonctions équations différentielles

- Primitives
- 2.3. Quelques cas particuliers

- ⇒Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale
- ⇒Propriétés « analytique »de l'intégrale

- 1. Problèmes
- 2. Primitives
  - 2.1 Définitions
  - 2.2 Primitives usuelles
  - 2.3. Quelques cas particuliers
- 3. Intégrales
  - 3.1. Théorème fondamental et conséquences

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

Inverse dérivation Propriétés

geometique

« analytique »

R → C

- I. Problèmes
- 2. Primitives
  - 1 Définitions
- 2.2 Primitivos usuallas
  - 3. Quelques cas particuliers
  - Intégrales

## Une certaine définition

#### **Définition - Notation**

Soit  $f: I \to \mathbb{R}$ , pour tout  $a < b \in I$ , on note

$$\int_{a}^{b} f(t) \mathrm{d}t$$

l'aire (algébrique) comprise entre les segments de droites x = a, y = 0, x = b et la courbe y = f(x).

Nous admettons son existence si f est continue sur [a,b]

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

 Inverse dérivation ropriétés

⇒Propriétés « analytique »

1. Problèmes

O. Duimaitiuma

2.1. Définitions

2.2. Primitives usuelles

.3. Quelques cas particuliers

Intégrales

# Une certaine définition

## Définition - Intégrale de f sur [a,b]

Si  $f:[a,b]\to\mathbb{C}$  est continue sur [a,b], on appelle intégrale de f sur [a,b] le nombre complexe

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathbf{Re} f(t)dt + i \int_a^b \mathbf{Im} f(t)dt.$$

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

→ Inverse dérivation Propriétés

⇒Propriétés « analytique »

#### 1. Problèmes

- Primitives
  - 2.1. Définitions
  - Primitives usuelles
     Ouolauce can particuliare
  - Intégrales

# Une certaine définition

# Définition - Intégrale de f sur [a,b]

Si  $f:[a,b]\to\mathbb{C}$  est continue sur [a,b], on appelle intégrale de f sur [a,b] le nombre complexe

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \mathbf{Re} f(t) dt + i \int_a^b \mathbf{Im} f(t) dt.$$

#### Attention. Définition?

Est-ce vraiment une définition? Non, car on ne sait pas bien ce qu'est ce calcul. Préciser qu'il s'agit du nombre obtenu à partir d'une primitive de f, c'est tourner en rond par rapport au théorème et au corollaire qui suivent.

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivatio Propriétés

⇒Propriétés « analytique » ℝ → ℂ

- 1. Problèmes
- 2. Primitive
- 2.2 Primitivos usuallas
- 2.3. Quelques cas particuliers
- Intégrales
- 3.1. Théorème fondamental et conséquences

Si  $f:[a,b]\to\mathbb{C}$  est continue sur [a,b], on appelle intégrale de f sur [a,b] le nombre complexe

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \mathbf{Re} f(t) dt + i \int_a^b \mathbf{Im} f(t) dt.$$

#### Attention. Définition?

A ce stade, on est obligé de prendre ce nombre comme construit à partir de f, a et b. Au second semestre, nous prendrons le temps de bien montrer l'existence et donner un algorithme de calcul de ce nombre. Nous verrons qu'il n'est pas nécessaire que f soit continue (f pourrait être moins régulière)

#### 1. Problème

- 2. Primitives
  - 1. Définitions
- 2.2. Primitives usuelles
  - Intégrales
- Théorème fondamental et conséquences

#### Exercice

Soit P, polynomiale. On suppose :  $\forall \ m \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^{2\pi} e^{-imt} P(e^{it}) \mathrm{d}t = 0$ . Montrer que P=0



#### Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel

Soit f continue sur I, intervalle de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $a \in I$ .

Alors la fonction

$$F: \quad I \longrightarrow K$$
$$x \mapsto \int_{a}^{x} f(t) dt$$

est de classe  $C^1$  (c'est-à-dire dérivable de dérivée continue) sur I et  $F^\prime=f$  .

C'est de plus l'unique primitive de f nulle en  $a \in I$ .

# Corollaire (1)

Corollaire - Existence de primitive

Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Propriétés « analytique »

1. Problèmes

Primitives

1. Définitions

2. Primitives usuelles

3. Quelques cas particuliers

Intégrales

# Corollaire (1)

# Corollaire - Existence de primitive

Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

# Attention. Pas toutes les primitives avec cette notation

On n'obtient pas toutes les primitives ainsi.

Ainsi, pour  $f(x) = \cos x$ , la primitive  $F(x) = \sin x + 2$  ne peut s'obtenir ainsi. En effet, on aurait alors  $F(x) = \sin x - \sin \alpha$ , or il n'existe pas de  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\sin \alpha = -2$ .

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

- → Inverse dérivation Propriétés
- ⇒Proprietes
  « analytique » :
- 1. Problèmes
- 2 Primitivos
  - 2.1. Définitions
- 2.2 Primitius usuallas
- .3. Quelques cas particuliers
- Intégrales
- 3.1. Théorème fondamental et conséquences

# Corollaire (2)

## Théorème - Calcul fondamental

Soit f continue sur I intervalle de  $\mathbb R$  contenant a et b. Soit F une primitive de f. Alors

$$\int_{a}^{b} f(t) dt = F(b) - F(a) = \left[ F(t) \right]_{a}^{b}$$

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

géométique

⇒Proprietes « analytique » ℝ → ℂ

- 1. Problèmes
- 2. Primitive
  - .1. Définitions
- 2.2. Primitives usuelles
- 2.3. Quelques cas particuliers
- . Intégrales
- Théorème fondamental et conséquences

# Corollaire (2)

#### Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

#### → inverse derivation Propriétés

⇒Propriétés « analytique »

#### 1. Problèmes

- 2. Primitive
- 2.1. Définitions
- 2.2. Primitives usuelles
- 2.3. Quelques cas particuliers
- . Intégrales
- 3.1. Théorème fondamental et conséquences

#### Théorème - Calcul fondamental

Soit f continue sur I intervalle de  $\mathbb R$  contenant a et b. Soit F une primitive de f. Alors

$$\int_{a}^{b} f(t) dt = F(b) - F(a) = \left[ F(t) \right]_{a}^{b}$$

#### Démonstration

On notera, par extension des notations précédentes :

 $\int_{-\infty}^{x} f(t) dt$ , une primitive quelconque de f. C'est plutôt l'ensemble de toutes les primitives de f, modulo la constante additive

 $[F(t)]^x = F(x)$ 

 Inverse dérivation ropriétés

géométique ⇒Propriétés

 $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 

Problèmes

2. Primitive

1. Définitions

2. Primitives usuelles

Intégrales

On notera, par extension des notations précédentes :

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{d}t, \text{ une primitive quelconque de } f.$   $C'est \ plutôt \ l'ensemble \ de \ toutes \ les \ primitives \ de \ f \ , \ modulo \ la \ constante \ additive$
- $[F(t)]_{\cdot}^{x} = F(x)$

## Corollaire. Avec f'

Soit f de classe  $C^1$  sur I. Alors

$$\forall (a,x) \in I^2, f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$

Inverse dérivati opriétés

⇒i rophletes « analytique : R → C

Problèmes

z. Primitive:

2 Primitives usuelles

3. Quelques cas particuliers

Intégrales

#### **Objectifs**

- ⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés
- « géométriques » de l'intégrale
- ⇒ Propriétés « analytique »de l'intégrale

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Proprietes
« analytique »

1. Problèmes

2. Primitive:

1 Définitions

.... Deminions

3. Quelques cas particuliers

Intégrales

### **Objectifs**

⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

▶  $f \rightarrow f' \iff f \leftarrow F$ : primitivisation

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

géométique

" analytique  $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 

1. Problèmes

2. Primitive

2.1. Définitions

2.2. Primitives usuelles

Quelques cas particuliers

3. Intégrales

#### **Objectifs**

- ⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale
  - $f \rightarrow f' \iff f \leftarrow F$  : primitivisation
  - Tableau de correspondance (A APPRENDRE)

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

→ Propriétée

« analytique  $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 

- . Problèmes
- 2. Primitive:
- 2.1. Définitions
- 3. Quelques cas particuliers
- . Intégrales

### **Objectifs**

- ⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale
  - $f \rightarrow f' \iff f \leftarrow F$ : primitivisation
  - ► Tableau de correspondance (A APPRENDRE)
  - Et une première série de savoir-faire (exponentielle et trigonométrie)

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Propriete:
« analytique

1. Problèmes

2. Primitives

1. Définitions

.2. Primitives usuelles

Quelques cas particulie

Intégrales

- ⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale
  - $f \rightarrow f' \iff f \leftarrow F$  : primitivisation
  - ► Tableau de correspondance (A APPRENDRE)
  - Et une première série de savoir-faire (exponentielle et trigonométrie)

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Propriete. « analytique

1. Problèmes

- 2. Primitives
- 2.1. Définitions
- 2.2 Primitives usuelle
  - 3. Quelques cas particuliers
  - Intégrales
- 3.1. Théorème fondamental et conséquences

#### **Objectifs**

- ⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés
- « géométriques » de l'intégrale
- ⇒ Propriétés « analytique »de l'intégrale

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Proprietes « analytique »

1. Problèmes

Primitives

1 Définitions

. I. Delinitions

3. Quelques cas particuliers

Intégrales

#### **Objectifs**

- ⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés
   « géométriques » de l'intégrale
- ⇒ Propriétés « analytique »de l'intégrale
  - Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Propriétés « analytique »

1. Problèmes

2. Primitive:

2.1. Définitions

.2. Primitives usuelles

Quelques cas particul

. Intégrales

### **Objectifs**

- ⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés
   « géométriques » de l'intégrale
- ⇒ Propriétés « analytique »de l'intégrale
  - Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.
  - Le calcul intégral est bien l'inverse de celui de la dérivation.

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Proprietes
« analytique »

1. Problèmes

2. Primitives

.1. Définitions

2. Primitives usuelles

Queiques cas particu

I. Intégrales

#### **Objectifs**

- ⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques » de l'intégrale
- ⇒ Propriétés « analytique »de l'intégrale
  - Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.
  - Le calcul intégral est bien l'inverse de celui de la dérivation.
  - Question remise à plus tard : quelles sont les fonctions qui admettent une primitive, finalement.
     C'est un ensemble qui contient strictement l'ensemble des fonctions continues.

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation Propriétés

⇒Proprietes « analytique » ℝ → ℂ

. Problèmes

2. Primitives

2.1. Définitions

.2. Primitives usuelles

3. Quelques cas particuliers

Intégrales

### **Objectifs**

- ⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés
- « géométriques »de l'intégrale
- ⇒ Propriétés « analytique »de l'intégrale

#### Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 6
  - 3.2. Quelques propriétés
  - 3.3 et 3.4. Techniques
- Exercice n° 126 & 127
- TD de jeudi :

 $8h-10h: n\,^{\circ}128$  pair, 129, 132, 136 impair, 138

10h-12h: n°128 impair, 130, 133, 134, 136 pair, 137

Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

→ Inverse dérivation Propriétés

⇒Proprietes « analytique » □ . . . . . .

1. Problèmes

2. Primitive

2.1. Définitions

2.2. Primitives usuelles

.3. Quelques cas particulien

Intégrales