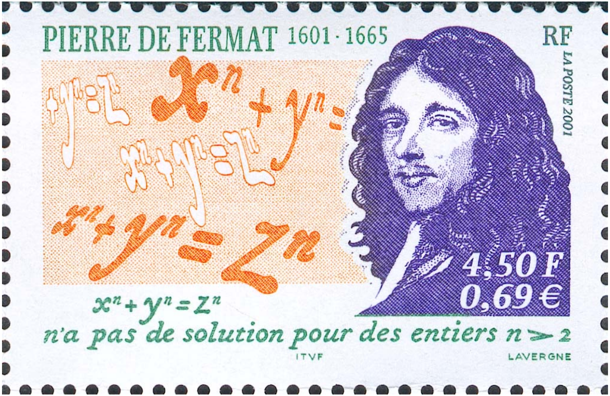

Leçon 29 - Fonctions primitives et équations différentielles

13 novembre 2024

⇒**De l'aire (intégrale) à la primitive**

⇒**Maîtrise de deux techniques**

⇒De l'aire (intégrale) à la primitive

⇒Maîtrise de deux techniques

Théorème fondamental

Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel

Soit f continue sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $a \in I$.

Alors la fonction

$$\begin{aligned} F: \quad I &\to K \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

est de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable de dérivée continue) sur I et $F' = f$.

C'est de plus l'unique primitive de f nulle en $a \in I$.

Corollaire (1)

Corollaire - Existence de primitive

Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Corollaire (1)

Corollaire - Existence de primitive

Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Attention. Pas toutes les primitives avec cette notation

On n'obtient pas toutes les primitives ainsi.
Ainsi, pour $f(x) = \cos x$, la primitive $F(x) = \sin x + 2$ ne peut s'obtenir ainsi. En effet, on aurait alors $F(x) = \sin x - \sin a$, or il n'existe pas de $a \in \mathbb{R}$ tel que $\sin a = -2$.

Corollaire (1)

Corollaire - Existence de primitive

Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Attention. Pas toutes les primitives avec cette notation

On n'obtient pas toutes les primitives ainsi.
Ainsi, pour $f(x) = \cos x$, la primitive $F(x) = \sin x + 2$ ne peut s'obtenir ainsi. En effet, on aurait alors $F(x) = \sin x - \sin a$, or il n'existe pas de $a \in \mathbb{R}$ tel que $\sin a = -2$.

Remarque Démonstration ?

Corollaire (2)

Théorème - Calcul fondamental

Soit f continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a et b. Soit F une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b$$

Corollaire (2)

Théorème - Calcul fondamental

Soit f continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a et b. Soit F une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b$$

Démonstration

Notations

Définition - Notation par extension

On notera, par extension des notations précédentes :

- $\int_{\cdot}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, une primitive quelconque de f.
  C'est plutôt l'ensemble de toutes les primitives de f, modulo la constante additive
- $[F(t)]_{\cdot}^{x} = F(x)$

Notations

Définition - Notation par extension

On notera, par extension des notations précédentes :

- $\int_{\cdot}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, une primitive quelconque de f.
  C'est plutôt l'ensemble de toutes les primitives de f, modulo la constante additive
- $[F(t)]_{\cdot}^{x} = F(x)$

Corollaire. Avec f'

Soit f de classe C^1 sur I. Alors

$$\forall (a,x) \in I^2, f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t.$$

⇒De l'aire (intégrale) à la primitive

⇒Maîtrise de deux techniques

Linéarité, Chasles...

Proposition - Linéarité, croissance, Chasles...

Pour des fonctions continues f et g continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a, pour $a, b \in I$, les propriétés suivantes :

- **linéarité** : si λ et μ sont deux réels,
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$
- **relation de Chasles** : pour $c \in]a, b[$,
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
- **positivité** : si $a \leqslant b$ **et** $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$
- **croissance** : si $a \leqslant b$ **et** $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ alors
$$\int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Application

Truc & Astuce pour le calcul. Encadrer une intégrale

Pour encadrer une intégrale, on encadre la fonction à intégrer (intégrant)

Application

Truc & Astuce pour le calcul. Encadrer une intégrale

Pour encadrer une intégrale, on encadre la fonction à intégrer (intégrant)

Savoir-faire. Inégalité des accroissements finis (avec f de classe $\mathscr{C}^1$)

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b] \subset I$. Notons $M = \sup_{[a,b]} f'$ et $m = \inf_{[a,b]} f'$, on a donc, pour tout $t \in [a,b]$:

$$f'(t) - m \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad M - f'(t) \geqslant 0$$

On intègre sur $[a,b]$, puis par linéarité (ou croissance) :

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

Application

Truc & Astuce pour le calcul. Encadrer une intégrale

Pour encadrer une intégrale, on encadre la fonction à intégrer (intégrant)

Savoir-faire. Inégalité des accroissements finis (avec f de classe $\mathscr{C}^1$)

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b] \subset I$. Notons $M = \sup_{[a,b]} f'$ et $m = \inf_{[a,b]} f'$, on a donc, pour tout $t \in [a,b]$:

$$f'(t) - m \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad M - f'(t) \geqslant 0$$

On intègre sur $[a,b]$, puis par linéarité (ou croissance) :

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

Remarque Combinaison linéaire

Fonction à valeurs complexes

Proposition - Fonctions à valeurs complexes

Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et λ, μ deux complexes. Alors on a les propriétés suivantes :

- **linéarité** :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

- **relation de Chasles** : pour $c \in]a, b[$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Fonction à valeurs complexes

Proposition - Fonctions à valeurs complexes

Soient f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et λ, μ deux complexes. Alors on a les propriétés suivantes :

- **linéarité** :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

- **relation de Chasles** : pour $c \in]a,b[$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Attention Sur $\mathbb{C}$, pas de relation d'ordre...

⇒De l'aire (intégrale) à la primitive

⇒Maîtrise de deux techniques

Enoncé

Théorème - Intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Enoncé

Théorème - Intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Obtenir une primitive

Savoir-faire. Obtenir une primitive avec une IPP cachée

Pour calculer une primitive par IPP de f, notée

$$\int_{\cdot}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(attention, il s'agit d'**une fonction** et non d'un scalaire), on peut écrire

$$\int_{\cdot}^{x} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int_{\cdot}^{x} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Obtenir une primitive

Savoir-faire. Obtenir une primitive avec une IPP cachée

Pour calculer une primitive par IPP de f, notée

$$\int_{\cdot}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(attention, il s'agit d'**une fonction** et non d'un scalaire), on peut écrire

$$\int_{\cdot}^{x} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int_{\cdot}^{x} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

<u>Exercice</u>

Avec une intégration par parties trouver une primitive de $x \longmapsto \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ puis de $x \longmapsto \frac{1}{(x^2+1)^2}$.

Primitives de $P(x)e^{\alpha x}$

Savoir-faire. $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$

Pour $f : t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ où P est une fonction polynomiale, on peut faire $\deg(P)$ intégrations par parties (IPP) en dérivant $v : t \mapsto P(t)$ et en intégrant $u' : t \mapsto e^{\alpha t}$.
On peut appliquer la même méthode pour $f : t \mapsto P(t)\sin(\alpha t)$ ou $f : t \mapsto P(t)\cos(\alpha t)$.

Primitives de $P(x)e^{\alpha x}$

Savoir-faire. $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$

Pour $f : t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ où P est une fonction polynomiale, on peut faire $\deg(P)$ intégrations par parties (IPP) en dérivant $v : t \mapsto P(t)$ et en intégrant $u' : t \mapsto e^{\alpha t}$.
On peut appliquer la même méthode pour $f : t \mapsto P(t)\sin(\alpha t)$ ou $f : t \mapsto P(t)\cos(\alpha t)$.

Remarque Autre méthode

Primitives de $P(x)e^{\alpha x}$

Savoir-faire. $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$

Pour $f : t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ où P est une fonction polynomiale, on peut faire $\deg(P)$ intégrations par parties (IPP) en dérivant $v : t \mapsto P(t)$ et en intégrant $u' : t \mapsto e^{\alpha t}$.
On peut appliquer la même méthode pour $f : t \mapsto P(t)\sin(\alpha t)$ ou $f : t \mapsto P(t)\cos(\alpha t)$.

Remarque Autre méthode

Exercice

Calculer

$$I = \int_0^{\pi/2} t \sin t \,\mathrm{d}t, \quad J = \int_0^1 e^{2x}(6x^2 + 2x - 4)\,\mathrm{d}x$$

Primitives de $P(x)e^{\alpha x}$

Savoir-faire. $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$

Pour $f : t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ où P est une fonction polynomiale, on peut faire $\deg(P)$ intégrations par parties (IPP) en dérivant $v : t \mapsto P(t)$ et en intégrant $u' : t \mapsto e^{\alpha t}$.
On peut appliquer la même méthode pour $f : t \mapsto P(t)\sin(\alpha t)$ ou $f : t \mapsto P(t)\cos(\alpha t)$.

Remarque Autre méthode

Exercice

Calculer

$$I = \int_0^{\pi/2} t \sin t \,\mathrm{d}t, \quad J = \int_0^1 e^{2x}(6x^2 + 2x - 4)\,\mathrm{d}x$$

Exercice

Trouver une formule générale pour calculer $\int_\cdot^x P(t)e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$.

Primitives de $P(x)\ln\left(Q(x)\right)$

Savoir-faire. $f(x) = P(x)\ln\left(Q(x)\right)$

Pour $f : t \mapsto P(t)\ln\left(Q(t)\right)$ où P est une fonction polynomiale, on peut faire une intégrations par parties (IPP) en dérivant $v : t \mapsto \ln\left(Q(t)\right)$ et en intégrant $u' : t \mapsto P(t)$.
On se retrouve alors en présence d'une fraction rationnelle, que l'on sait intégrer, en principe...

Primitives de $P(x)\ln\big(Q(x)\big)$

Savoir-faire. $f(x) = P(x)\ln\big(Q(x)\big)$

Pour $f : t \mapsto P(t)\ln\big(Q(t)\big)$ où P est une fonction polynomiale, on peut faire une intégrations par parties (IPP) en dérivant $v : t \mapsto \ln\big(Q(t)\big)$ et en intégrant $u' : t \mapsto P(t)$.
On se retrouve alors en présence d'une fraction rationnelle, que l'on sait intégrer, en principe...

Exercice
Calculer

$$I_b = \int_0^b x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x.$$

On pourra remarquer que $x^3 = x(x^2+1) - x\ldots$

⇒De l'aire (intégrale) à la primitive

⇒Maîtrise de deux techniques

Changement de variable

Théorème - Changement de variable

Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in I$,
Soient $\phi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\phi(I) \subset J$ et $f : J \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue.
Alors

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Changement de variable

Théorème - Changement de variable

Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in I$,
Soient $\phi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\phi(I) \subset J$ et $f : J \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue.
Alors

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration

Changement de variable

Théorème - Changement de variable

Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in I$,
Soient $\phi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\phi(I) \subset J$ et $f : J \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue.
Alors
$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration

Analyse Deux cas possibles

Savoir-faire

Savoir-faire. Changement de variable - dans la pratique

On veut calculer $\displaystyle\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t$. On pose $t=\phi(x)$ (changement de variable), on remplace alors

- t par $\phi(x)$
- $\mathrm{d}t$ par $\phi'(x)\mathrm{d}x$ $\qquad (\phi'(x)=\dfrac{d\phi(x)}{dx}=\dfrac{dt}{dx})$
- t varie de $\phi(\alpha)$ à $\phi(\beta)$ par x varie de α à β (et inversement)

  On peut faire un tableau

Savoir-faire

Savoir-faire. Changement de variable - dans la pratique

On veut calculer $\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t$. On pose $t = \phi(x)$ (changement de variable), on remplace alors

- t par $\phi(x)$
- $\mathrm{d}t$ par $\phi'(x)\,\mathrm{d}x$ $\quad (\phi'(x) = \dfrac{d\phi(x)}{dx} = \dfrac{dt}{dx})$
- t varie de $\phi(\alpha)$ à $\phi(\beta)$ par x varie de α à β (et inversement)

  On peut faire un tableau

Exercice

Calculer par changement de variables les intégrales suivantes

$$I = \int_0^{\pi/2} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x, \quad J = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Calcul de primitive

Soulignons l'importance que ϕ soit bijective pour exploiter ϕ^{-1}...

Savoir-faire. Calculer une primitive par changement de variable

On cherche une primitive F de f sur I,

- on pose $t = \phi(x)$ et donc $\mathrm{d}t = \phi'(x)\mathrm{d}x$ où ϕ est une **bijection de classe** C^1 de J sur I,
- on cherche une primitive $G(x) = \int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x$ et on prend $F(t) = G(\phi^{-1}(t))$.

Calcul de primitive

Soulignons l'importance que ϕ soit bijective pour exploiter ϕ^{-1}...

Savoir-faire. Calculer une primitive par changement de variable

On cherche une primitive F de f sur I,

- on pose $t = \phi(x)$ et donc $\mathrm{d}t = \phi'(x)\mathrm{d}x$ où ϕ est une **bijection de classe** C^1 de J sur I,
- on cherche une primitive $G(x) = \int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x$ et on prend $F(t) = G(\phi^{-1}(t))$.

Exemple Primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2+a^2}$

Application

Attention. Ne pas oublier de revenir à la variable de départ

Pour éviter les erreurs (oubli de revenir à la variable de départ...) on peut aussi écrire

$$F(x) = \int_{.}^{x} \frac{dt}{t^2 + a^2}$$

Application

Attention. Ne pas oublier de revenir à la variable de départ

Pour éviter les erreurs (oubli de revenir à la variable de départ...) on peut aussi écrire

$$F(x) = \int_{\cdot}^{x} \frac{dt}{t^2 + a^2}$$

<u>Exercice</u>

Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+a^2)^2}$ en faisant le changement de variable $\tan t = \frac{x}{a}$.

On rappelle que $1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$

Application

Attention. Ne pas oublier de revenir à la variable de départ

Pour éviter les erreurs (oubli de revenir à la variable de départ...) on peut aussi écrire

$$F(x) = \int_{.}^{x} \frac{dt}{t^2 + a^2}$$

Exercice

Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+a^2)^2}$ en faisant le changement de variable $\tan t = \frac{x}{a}$.

On rappelle que $1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$

Exercice

Aller plus loin : Donner l'expression des primitives de

$$x \mapsto \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$$

Des morceaux

Savoir-faire. Bijection par morceaux

Lorsque le changement de variables doit être bijectif mais ne l'est que par morceaux, alors

1. on cherche une primitive sur chaque morceau de l'intervalle.
2. on « recolle » chaque morceau en ajustant les constantes de manière à ce que la primitive soit bien continue.

Des morceaux

Savoir-faire. Bijection par morceaux

Lorsque le changement de variables doit être bijectif mais ne l'est que par morceaux, alors

1. on cherche une primitive sur chaque morceau de l'intervalle.
2. on « recolle » chaque morceau en ajustant les constantes de manière à ce que la primitive soit bien continue.

Exercice

Donner l'ensemble de définition et calculer une primitive de

$h : x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos x}$.

On posera $t = \tan \frac{x}{2}$

Fonctions définies à partir de fonctions trigonométrique

Savoir-faire. Calcul pour $f(t) = \sin^n t \cos^m t$ avec n ou m impair

Pour $f(t) = \sin^n t \cos^m t$, on peut linéariser, ou,

- si n est impair, effectuer le changement de variables $u = \cos t$ (ou isoler un $\sin t$ et dans $\sin^{n-1} t$ remplacer $\sin^2 t$ par $1 - \cos^2 t$ puis reconnaître des primitives),
- si m est impair, effectuer le changement de variables $u = \sin t$ (ou remplacer $\cos^2 t$ par $1 - \sin^2 t$).

Fonctions définies à partir de fonctions trigonométrique

Savoir-faire. Calcul pour $f(t) = \sin^n t \cos^m t$ avec n ou m impair

Pour $f(t) = \sin^n t \cos^m t$, on peut linéariser, ou,

- si n est impair, effectuer le changement de variables $u = \cos t$ (ou isoler un $\sin t$ et dans $\sin^{n-1} t$ remplacer $\sin^2 t$ par $1 - \cos^2 t$ puis reconnaître des primitives),
- si m est impair, effectuer le changement de variables $u = \sin t$ (ou remplacer $\cos^2 t$ par $1 - \sin^2 t$).

Exercice
Calculer par changement de variables l'intégrale suivante

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u \cos^3 u \, du$$

Plus généralement

Savoir-faire. Cas général ($\tan\frac{x}{2}$)

D'une manière générale, les changements de variables utiles pour les fonctions construites avec de fonctions trigonométriques sont $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = \tan x$, $t = \tan\frac{x}{2}$.

On rappelle que si $t = \tan\frac{x}{2}$, alors $\cos x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $\sin x = \dfrac{2t}{t^2+1}$ et $\tan x = \dfrac{2t}{t^2-1}$.

Plus généralement

Savoir-faire. Cas général ($\tan \frac{x}{2}$)

D'une manière générale, les changements de variables utiles pour les fonctions construites avec de fonctions trigonométriques sont $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = \tan x$, $t = \tan \frac{x}{2}$.

On rappelle que si $t = \tan \frac{x}{2}$, alors $\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$, $\sin x = \dfrac{2t}{t^2 + 1}$ et $\tan x = \dfrac{2t}{t^2 - 1}$.

<u>Exercice</u>

Calculer par changement de variables l'intégrale suivante

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$$

Simplification des calculs

Théorème - Simplification des calculs

Soit $f : [-a, a] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ une fonction continue :

- si f est paire, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$;
- si f est impaire, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$;
- si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une fonction continue T-périodique,
$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

Simplification des calculs

Théorème - Simplification des calculs

Soit $f:[-a,a]\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$ une fonction continue :

- si f est paire, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t$;
- si f est impaire, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$;
- si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une fonction continue T-périodique, $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\mathrm{d}t$.

Démonstration

Fonction de la borne supérieure

Savoir-faire. Variable dans les bornes de l'intégrale

Il arrive que l'on doit étudier des fonctions de la forme $g : x \mapsto \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} h(t)\mathrm{d}t$ sans pouvoir exprimer explicitement H, une primitive de h.

Néanmoins, la simple existence de H permet d'écrire : $g(x) = H(f_2(x)) - H(f_1(x))$ dont on déduit de nombreuses informations. Par exemple : g est dérivable si f_1 et f_2 le sont. Et dans ce cas :

$$g'(x) = f_2'(x)h(f_2(x)) - f_1'(x)h(f_1(x))$$

Fonction de la borne supérieure

Savoir-faire. Variable dans les bornes de l'intégrale

Il arrive que l'on doit étudier des fonctions de la forme $g : x \mapsto \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} h(t)\mathrm{d}t$ sans pouvoir exprimer explicitement H, une primitive de h.

Néanmoins, la simple existence de H permet d'écrire : $g(x) = H(f_2(x)) - H(f_1(x))$ dont on déduit de nombreuses informations. Par exemple : g est dérivable si f_1 et f_2 le sont. Et dans ce cas :

$$g'(x) = f_2'(x)h(f_2(x)) - f_1'(x)h(f_1(x))$$

Exercice

Soit $H : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$. Etudier la parité de H. Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer H' et dresser le tableau de variations de H.

Déterminer les limites de H en $+\infty$ et $-\infty$.

Conclusion

Objectifs

⇒ De l'aire (intégrale) à la primitive

⇒ Maîtrise de deux techniques

Conclusion

Objectifs

⇒ De l'aire (intégrale) à la primitive

- $$\int_a^b (f)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Conclusion

Objectifs

⇒ De l'aire (intégrale) à la primitive

- $\displaystyle\int_a^b (f)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$
- L'intégrale vérifie des propriétés analytiques fortes (Chasles, croissance et encadrement. . .)

Conclusion

Objectifs

⇒ De l'aire (intégrale) à la primitive

- $\displaystyle\int_a^b (f)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.
- L'intégrale vérifie des propriétés analytiques fortes (Chasles, croissance et encadrement...)
- Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.

Conclusion

Objectifs

⇒ De l'aire (intégrale) à la primitive

- $\displaystyle\int_a^b (f)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$
- L'intégrale vérifie des propriétés analytiques fortes (Chasles, croissance et encadrement. . .)
- Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.
- Question remise à plus tard : quelles sont les fonctions qui admettent une primitive, finalement.
  C'est un ensemble qui contient strictement l'ensemble des fonctions continues.

Conclusion

Objectifs

⇒ De l'aire (intégrale) à la primitive

⇒ Maîtrise de deux techniques

Conclusion

Objectifs

⇒ De l'aire (intégrale) à la primitive

⇒ Maîtrise de deux techniques

- L''intégration par partie : récupérer la primitive d'un produit : $u' \times v \ldots$

Conclusion

Objectifs

⇒ De l'aire (intégrale) à la primitive

⇒ Maîtrise de deux techniques

- L''intégration par partie : récupérer la primitive d'un produit : $u' \times v \ldots$
- Savoir-faire avec des polynômes, exponentielles (trigonométries) et logarithmes

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ De l'aire (intégrale) à la primitive

$\Rightarrow$ Maîtrise de deux techniques

- L'intégration par partie : récupérer la primitive d'un produit : $u' \times v \ldots$
- Savoir-faire avec des polynômes, exponentielles (trigonométries) et logarithmes
- Le changement de variable : récupérer la primitive d'une composition : $u' \circ v \ldots$

Conclusion

Objectifs

⇒ De l'aire (intégrale) à la primitive

⇒ Maîtrise de deux techniques

- L''intégration par partie : récupérer la primitive d'un produit : $u' \times v \ldots$
- Savoir-faire avec des polynômes, exponentielles (trigonométries) et logarithmes
- Le changement de variable : récupérer la primitive d'une composition : $u' \circ v \ldots$
- Savoir-faire (surtout avec des la trigonométrie)

Conclusion

Objectifs

⇒ De l'aire (intégrale) à la primitive

⇒ Maîtrise de deux techniques

- L''intégration par partie : récupérer la primitive d'un produit : $u' \times v \dots$
- Savoir-faire avec des polynômes, exponentielles (trigonométries) et logarithmes
- Le changement de variable : récupérer la primitive d'une composition : $u' \circ v \dots$
- Savoir-faire (surtout avec des la trigonométrie)
- Transmission de propriétés de régularité de fonction (périodicité...)

Conclusion

Objectifs

⇒ De l'aire (intégrale) à la primitive

⇒ Maîtrise de deux techniques

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 6 :
  4. Equation différentielle
- Exercice n°131 & 135