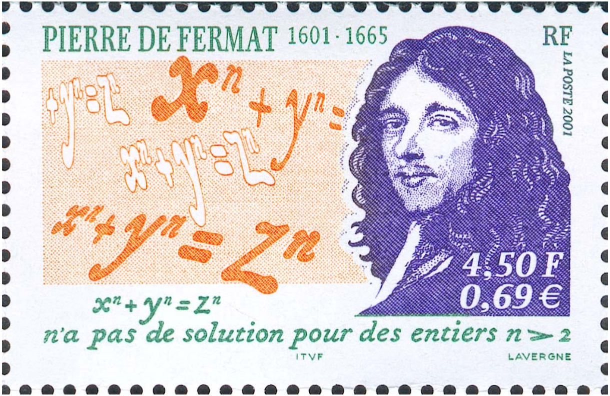

Leçon 30 - Fonctions primitives et équations différentielles

14 novembre 2024

⇒Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles

⇒Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1

⇒**Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles**

⇒**Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1**

Vocabulaire

D'une manière générale on appelle équation différentielle *une équation faisant intervenir les dérivées successives d'une même fonction*, elle est du premier ordre si elle porte sur la fonction et sa dérivée première, du second ordre si elle porte sur la fonction et ses dérivées première et seconde...

Vocabulaire

D'une manière générale on appelle équation différentielle *une équation faisant intervenir les dérivées successives d'une même fonction*, elle est du premier ordre si elle porte sur la fonction et sa dérivée première, du second ordre si elle porte sur la fonction et ses dérivées première et seconde...

La résolution d'un problème de Cauchy est la résolution d'une équation différentielle avec des conditions initiales.

Définition

Définition - Equation différentielle linéaire du premier ordre

Une équation différentielle (E) est dite *linéaire et du premier ordre* si elle s'écrit $\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$ où α, β, γ sont trois fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Elle est dite *normalisée* si elle s'écrit $y' + a(t)y = b(t)$ où a, b sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$b(t)$ (ou $\gamma(t)$) est le *second membre*, l'équation est dite *sans second membre ou homogène* si la fonction b est nulle.

Définition

Définition - Equation différentielle linéaire du premier ordre

Une équation différentielle (E) est dite *linéaire et du premier ordre* si elle s'écrit $\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$ où α, β, γ sont trois fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Elle est dite *normalisée* si elle s'écrit $y' + a(t)y = b(t)$ où a, b sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$b(t)$ (ou $\gamma(t)$) est le *second membre*, l'équation est dite *sans second membre ou homogène* si la fonction b est nulle.

Remarque Mise sous forme normale

Problème de Cauchy

Définition - Problème de Cauchy du premier ordre

On appelle problème de Cauchy du premier ordre la donnée d'une équation différentielle du premier ordre et d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$ où $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$).

Problème de Cauchy

Définition - Problème de Cauchy du premier ordre

On appelle problème de Cauchy du premier ordre la donnée d'une équation différentielle du premier ordre et d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$ où $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$).

Définition - Solutions

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{C}$.
f est solution de $(E) \quad \alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$ si

1. f est dérivable sur I,
2. $\forall t \in I, \quad \alpha(t)f'(t) + \beta(t)f(t) = \gamma(t)$.

On pourra noter S_E l'ensemble des solutions de (E).
Résoudre l'équation différentielle (E) c'est donc déterminer l'ensemble S_E, c'est-à-dire trouver toutes les solutions sur I.
On appelle *courbe intégrale* de (E) la courbe représentative d'une solution de (E).

Solution(s)

Remarque Convention réelle

Solution(s)

Remarque Convention réelle

Définition - Solution d'un problème de Cauchy

Résoudre le problème de Cauchy défini par (E) et $y(t_0) = y_0$, c'est déterminer toutes les solutions f de (E) vérifiant $f(t_0) = y_0$.

Solution(s)

Remarque Convention réelle

Définition - Solution d'un problème de Cauchy

Résoudre le problème de Cauchy défini par (E) et $y(t_0) = y_0$, c'est déterminer toutes les solutions f de (E) vérifiant $f(t_0) = y_0$.

Remarque Une/la solution ?

Solution(s)

Remarque Convention réelle

Définition - Solution d'un problème de Cauchy

Résoudre le problème de Cauchy défini par (E) et $y(t_0) = y_0$, c'est déterminer toutes les solutions f de (E) vérifiant $f(t_0) = y_0$.

Remarque Une/la solution ?

Savoir-faire. Découper I pour avoir des équations normalisées

Si α s'annule sur I, on cherchera à découper I en plusieurs intervalles ouverts sur lesquels elle ne s'annule pas pour se ramener à des équations normalisées.
Ensuite on cherchera les solutions sur I par « recollement », c'est-à-dire que l'on regardera, parmi les fonctions définies par morceaux sur chacun des intervalles, celles qui sont dérivables sur I (problème aux points de recollement, c'est-à-dire ceux où α s'annulait) et vérifient (E) sur I.

Superposition (=linéarité)

Le principe suivant est d'usage fréquent en physique : il permet de s'intéresser à des seconds membres simples.

Proposition - Principe de superposition des solutions

Si le second membre de l'équation (E) est de la forme
$b(t) = b_1(t) + \cdots + b_n(t)$
et si l'on connaît des solutions particulières $\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n$ des équations avec les seconds membres $b_1(t), \ldots, b_n(t)$,
alors une solution particulière de (E) est $\widetilde{y} = \widetilde{y}_1 + \cdots + \widetilde{y}_n$.

Superposition (=linéarité)

Le principe suivant est d'usage fréquent en physique : il permet de s'intéresser à des seconds membres simples.

Proposition - Principe de superposition des solutions

Si le second membre de l'équation (E) est de la forme
$b(t) = b_1(t) + \cdots + b_n(t)$
et si l'on connaît des solutions particulières $\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n$ des équations avec les seconds membres $b_1(t), \ldots, b_n(t)$,
alors une solution particulière de (E) est $\widetilde{y} = \widetilde{y}_1 + \cdots + \widetilde{y}_n$.

Démonstration

⇒**Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles**

⇒**Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1**

Convention

On considère désormais l'équation différentielle linéaire normalisée

$$(E) \qquad y' + a(t)y = b(t)$$

où a et b sont continues sur I, intervalle de $\mathbb{R}$.
Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Convention

On considère désormais l'équation différentielle linéaire normalisée

$$(E) \qquad y' + a(t)y = b(t)$$

où a et b sont continues sur I, intervalle de $\mathbb{R}$.
Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Heuristique. Démonstration et savoir-faire. Que retenir ?

Pour les démonstrations, nous allons décomposer l'application $F_a : \mathscr{F}(\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R})$, $y \mapsto y' + ay$ en applications, plus ou moins inversible. Nous verrons alors que l'équation différentielle est une dérivation « tordue ».
A la fin du cours, nous donnerons une méthode qu'on pourra appliquer directement lors des exercices. Sauf pour les exercices théoriques (du type inégalités différentielles).

Décomposition de F_a

Analyse Décomposition de F_a.

Décomposition de F_a

Analyse Décomposition de F_a.

Remarque Non commutativité de D et de φ_A.

Décomposition de F_a

Analyse Décomposition de F_a.
Remarque Non commutativité de D et de φ_A.
Exercice
Résoudre (E) : $(1+t^2)y'+4ty=0$ sur $I=\mathbb{R}$.

Décomposition de F_a

Analyse Décomposition de F_a.

Remarque Non commutativité de D et de φ_A.

Exercice

Résoudre (E) : $(1+t^2)y' + 4ty = 0$ sur $I = \mathbb{R}$.

Remarque Comment retenir l'ensemble des solutions ?

Décomposition de F_a

Analyse Décomposition de F_a.
Remarque Non commutativité de D et de φ_A.
Exercice
Résoudre (E) : $(1+t^2)y' + 4ty = 0$ sur $I = \mathbb{R}$.
Remarque Comment retenir l'ensemble des solutions ?

Attention. Variable x, variable t ?

Nous avons noté y la fonction de la variable t, mais l'on peut bien évidemment avoir d'autres notations, par exemple y fonction de la variable x (équations différentielles donnant l'ordonnée en fonction de l'abscisse) ou x en fonction de t (équations différentielles donnant l'abscisse en fonction du temps) ou encore z en fonction de t (équations différentielles donnant l'affixe en fonction du temps).

Structures des solutions et méthodes

Théorème - Structure de l'ensemble S_E

La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée (H), ce qui peut aussi s'écrire :
Si $\tilde{y}$ (à lire « y tilde ») est une solution particulière de l'équation (E) alors

$$S_E = \left\{t \mapsto Ce^{-A(t)} + \tilde{y}(t); C \in \mathbb{K}\right\}.$$

Structures des solutions et méthodes

Théorème - Structure de l'ensemble S_E

La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée (H), ce qui peut aussi s'écrire :
Si $\widetilde{y}$ (à lire « y tilde ») est une solution particulière de l'équation (E) alors

$$S_E = \left\{ t \longmapsto Ce^{-A(t)} + \widetilde{y}(t); C \in \mathbb{K} \right\}.$$

Remarque Existence

Structures des solutions et méthodes

Théorème - Structure de l'ensemble S_E

La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée (H), ce qui peut aussi s'écrire :
Si $\widetilde{y}$ (à lire « y tilde ») est une solution particulière de l'équation (E) alors

$$S_E = \left\{t \longmapsto Ce^{-A(t)} + \widetilde{y}(t); C \in \mathbb{K}\right\}.$$

Remarque Existence

Démonstration

Trouver une solution particulière $\tilde{y}$

Analyse Résoudre l'équation.

Trouver une solution particulière $\tilde{y}$

Analyse Résoudre l'équation.
L'enjeu est donc maintenant de trouver une solution particulière.
On doit à Lagrange la méthode de la variation de la constante qui répond explicitement à cette question (parmi d'autres méthodes).

Méthode de la variation de la constante

Savoir-faire. Comment trouver une équation particulière ?
Méthode de « variation de la constante »

D'après le théorème, il reste à trouver une solution particulière.
Sans indication, la méthode classique à suivre est la suivante :

Méthode de la variation de la constante

Savoir-faire. Comment trouver une équation particulière ? Méthode de « variation de la constante »

D'après le théorème, il reste à trouver une solution particulière. Sans indication, la méthode classique à suivre est la suivante :

1. On normalise l'équation différentielle (plusieurs intervalles ?)

Méthode de la variation de la constante

Savoir-faire. Comment trouver une équation particulière ? Méthode de « variation de la constante »

D'après le théorème, il reste à trouver une solution particulière.
Sans indication, la méthode classique à suivre est la suivante :

1. On normalise l'équation différentielle (plusieurs intervalles ?)
2. On résout l'équation différentielle homogène : $y = Ce^{-A(t)}$

Méthode de la variation de la constante

Savoir-faire. Comment trouver une équation particulière ?
Méthode de « variation de la constante »

D'après le théorème, il reste à trouver une solution particulière. Sans indication, la méthode classique à suivre est la suivante :

1. On normalise l'équation différentielle (plusieurs intervalles ?)
2. On résout l'équation différentielle homogène : $y = Ce^{-A(t)}$
3. On cherche une solution particulière :
   - en cherchant une solution évidente,
   - en utilisant le principe de superposition des solutions,
   - en essayant des fonctions simples (polynomiales lorsque a et b le sont, trigonométriques lorsque a et b le sont...),

Méthode de la variation de la constante

Savoir-faire. Comment trouver une équation particulière ? Méthode de « variation de la constante »

D'après le théorème, il reste à trouver une solution particulière.
Sans indication, la méthode classique à suivre est la suivante :

1. On normalise l'équation différentielle (plusieurs intervalles ?)
2. On résout l'équation différentielle homogène : $y = Ce^{-A(t)}$
3. On cherche une solution particulière :
   - en faisant varier la constante C, c'est-à-dire sous la forme $\widetilde{y} : t \longmapsto C(t)e^{-A(t)}$ (La constante C devient variable : « méthode de la variation de la constante »).
     Le calcul (à refaire à chaque fois - il permet de vérifier la bonne résolution de l'équation homogène) conduit à :

     $$C'(t) = b(t)e^{A(t)}$$

     C'est un « simple » calcul de primitive

Méthode de la variation de la constante

Savoir-faire. Comment trouver une équation particulière ? Méthode de « variation de la constante »

D'après le théorème, il reste à trouver une solution particulière. Sans indication, la méthode classique à suivre est la suivante :

1. On normalise l'équation différentielle (plusieurs intervalles ?)
2. On résout l'équation différentielle homogène : $y = Ce^{-A(t)}$
3. On cherche une solution particulière
4. Les solutions générales sont alors de la forme

$$y : t \mapsto (K + C(t))e^{-A(t)}$$

   avec C définie au points précédent

Problème de Cauchy (linéaire d'ordre 1)

Théorème - Problème de Cauchy

Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution sur I de l'équation linéaire normalisée (E) $y' + a(t)y = b(t)$ vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Problème de Cauchy (linéaire d'ordre 1)

Théorème - Problème de Cauchy

Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution sur I de l'équation linéaire normalisée $(E)\ y' + a(t)y = b(t)$ vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Démonstration

Problème de Cauchy (linéaire d'ordre 1)

Théorème - Problème de Cauchy

Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution sur I de l'équation linéaire normalisée $(E)\ y' + a(t)y = b(t)$ vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Démonstration

Remarque Résoudre un problème de Cauchy

Applcations classiques

Exercice

Résoudre $(E) \quad y' + ty = t.$

Applcations classiques

Exercice

Résoudre (E) $\quad y' + ty = t.$

Exercice

Résoudre (E) $\quad z' = (1+i)z - 2it^2 + 2.$

Applcations classiques

Exercice

Résoudre (E) $\quad y' + ty = t$.

Exercice

Résoudre (E) $\quad z' = (1+i)z - 2it^2 + 2$.

Attention. Ensemble des solutions particulières selon le second membre

Attention, si le second membre est colinéaire à la solution homogène, il faut alors chercher une solution particulière de « degré » plus élevé...

Applcations classiques

Exercice

Résoudre $(E)\quad y' + ty = t$.

Exercice

Résoudre $(E)\quad z' = (1+i)z - 2it^2 + 2$.

Attention. Ensemble des solutions particulières selon le second membre

Attention, si le second membre est colinéaire à la solution homogène, il faut alors chercher une solution particulière de « degré » plus élevé...

Exercice

Résoudre (E) : $y' + y = 2e^x + 4\sin x + 3\cos x$.

Inéquation différentielle

Savoir-faire. Etudier une inéquation différentielle

Supposons qu'on ait l'inéquation $y' + ay \leqslant b$.
On reprend les notations précédentes avec
$\varphi_h : y \mapsto (t \mapsto e^{h(t)} \times y(t))$.
On a $\varphi_{-A} \circ D \circ \varphi_A \circ y \leqslant b$, ou encore :

$\forall\ u \in I, (D \circ \varphi_A)(y)(u) \leqslant e^{A(u)} b(u)$ car $e^x > 0$.

Puis par croissance de l'intégration :

$$\varphi_A(y)(t) - \varphi_A(y)(t_0) \leqslant \int_{t_0}^{t} b(u) e^{A(u)} \mathrm{d}u.$$

Et donc $y(t) \leqslant y(t_0) e^{A(t_0)-A(t)} + (B(t_0) - B(t)) e^{-A(t)}$.
La constante t_0 est arbitraire, il faut nécessairement en fixer une !).
On reconnait une solution de l'équation différentielle (cas frontière - d'égalité).

Cas d'une équation non résolue. Problème de recollement

Savoir-faire. Cas non résolue

A résoudre une équation $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ sur I avec a qui s'annule sur I.

1. On étudie l'équation sur des sous-intervalles de I où a ne s'annule pas.
2. On obtient une famille de solutions, paramétrée sur chacun des sous-intervalles par une variable.
3. On essaye de « recoller »les solutions. Pour cela, on regarde les limites de y et de y' au voisinage du point t_0 qui annule a de manière à étudier la continuité et la dérivabilité de y en t_0.
   Souvent ces limites dépendent de la valeur du paramètre.

Dans la suite du cours : les théorème de prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ et les méthodes de calcul asymptotiques seront très utiles pour résoudre ce problème.

Avec recollement

Exercice

Résoudre l'équation $t^2y' + y = 1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (on discutera suivant la position de 0 par rapport à I).

Avec recollement

Exercice

Résoudre l'équation $t^2 y' + y = 1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (on discutera suivant la position de 0 par rapport à I).

Remarque Règle de L'Hospital

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles

- Equation différentielle LINEAIRE ?
  - de la forme $F(ay) = aF(y)\dots$
  - principe de superposition et structure de l'ensemble des solutions

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles

- Equation différentielle LINEAIRE ?
  - de la forme $F(ay) = aF(y)\ldots$
  - principe de superposition et structure de l'ensemble des solutions
- Equation différentielle d'ordre 1, 2. . . .

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles

- Equation différentielle LINEAIRE ?
  - de la forme $F(ay) = aF(y)\dots$
  - principe de superposition et structure de l'ensemble des solutions
- Equation différentielle d'ordre 1, 2. . ..
- Equation différentielle homogène ($= 0$) ou normalisé ($a = 1$)

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles

$\Rightarrow$ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1

- Nomalisation

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1

- Nomalisation
- Résolution explicite de l'équation homogène

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1

- Nomalisation
- Résolution explicite de l'équation homogène
- Une solution particulière

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles
⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 7
  2. Équations différentielles du second ordre à coefficients constants
- Exercice n° 139, 150
- TD de jeudi 21 :
  8h-10h : 140, 144 146, 147, 148, 156
  10h-12h : 142, 141, 149, 157, 152, 158