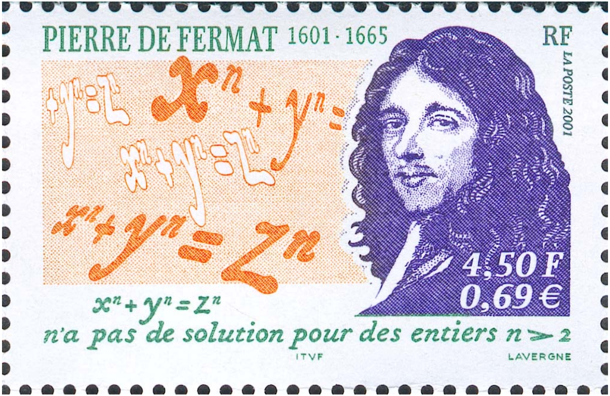

Leçon 31 - Fonctions primitives et équations différentielles

15 novembre 2024

⇒**Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles**

⇒**Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1**

⇒Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles

⇒Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1

Remarque ! !

$\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Insistons : ici a, b, c **sont constants** (l'année prochaine, vous élargirez ce point de vue)

Remarque ! !

$\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Insistons : ici a, b, c **sont constants** (l'année prochaine, vous élargirez ce point de vue)

Définition - Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$ et $u : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants
$(E) \quad ay'' + by' + cy = u(t)$ si

1. f est deux fois dérivable sur I
2. $\forall t \in I, af''(t) + bf'(t) + cf(t) = u(t)$

Ensemble des solutions (structure)

On considère donc l'équation homogène
$(H) \quad ay'' + by' + cy = 0 \quad a \neq 0.$

Ensemble des solutions (structure)

On considère donc l'équation homogène
$(H) \quad ay'' + by' + cy = 0 \quad a \neq 0.$
Analyse Composition $F_{-\alpha} \circ F_{-\beta}$

Ensemble des solutions (structure)

On considère donc l'équation homogène
$(H) \quad ay'' + by' + cy = 0 \quad a \neq 0.$
Analyse Composition $F_{-\alpha} \circ F_{-\beta}$
Cette analyse ne marche pas su $\alpha = \beta$.

Ensemble des solutions (structure)

On considère donc l'équation homogène
$(H) \quad ay'' + by' + cy = 0 \quad a \neq 0.$
Analyse Composition $F_{-\alpha} \circ F_{-\beta}$
Cette analyse ne marche pas su $\alpha = \beta$.

Théorème - Cas complexe

- Si $ar^2 + br + c = 0$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2 alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est :
$$S_H = \left\{ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$
- Si $ar^2 + br + c = 0$ possède une racine double $r_0 \in \mathbb{C}$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est :
$$S_H = \left\{ t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Ensemble des solutions (structure)

On considère donc l'équation homogène
$(H) \quad ay'' + by' + cy = 0 \quad a \neq 0.$
Analyse Composition $F_{-\alpha} \circ F_{-\beta}$
Cette analyse ne marche pas su $\alpha = \beta$.

Théorème - Cas complexe

- Si $ar^2 + br + c = 0$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2 alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est :
  $$S_H = \left\{ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$
- Si $ar^2 + br + c = 0$ possède une racine double $r_0 \in \mathbb{C}$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est :
  $$S_H = \left\{ t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Démonstration

Selon le signe de Δ. Sur $\mathbb{R}$

Pour le cas réel, la partie correspondant aux racines complexes ($\Delta < 0$) est plus subtile.

Théorème - Cas réel

On suppose ici a, b, c réels, $a \neq 0$.

- Si $ar^2 + br + c = 0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est :
$$S_H = \left\{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
- Si $ar^2 + br + c = 0$ possède une racine double $r_0 \in \mathbb{R}$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est :
$$S_H = \left\{t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
- Si $ar^2 + br + c = 0$ possède deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est :
$$S_H = \left\{t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos \beta t + \mu e^{\alpha t} \sin \beta t; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Selon le signe de Δ. Sur $\mathbb{R}$

Pour la démonstration, commençons par un lemme

Lemme - Solution réelle d'une équation réelle

Soit (H) l'équation différentielle homogène $ay'' + by' + cy = 0$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$.
Si f est solution de (H) à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors $\mathbf{Re} f$ est solution de (H) à valeurs réelles.
Plus précisément l'ensemble des solutions réelles de (H) est exactement l'ensemble des parties réelles des solutions complexes de (H).

Selon le signe de Δ. Sur $\mathbb{R}$

Pour la démonstration, commençons par un lemme

Lemme - Solution réelle d'une équation réelle

Soit (H) l'équation différentielle homogène $ay'' + by' + cy = 0$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$.
Si f est solution de (H) à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors $\mathbf{Re} f$ est solution de (H) à valeurs réelles.
Plus précisément l'ensemble des solutions réelles de (H) est exactement l'ensemble des parties réelles des solutions complexes de (H).

Démonstrations

Selon le signe de Δ. Sur $\mathbb{R}$

Remarque Autre expression pour le cas $\Delta < 0$

Selon le signe de Δ. Sur $\mathbb{R}$

Remarque Autre expression pour le cas $\Delta < 0$

Remarque Base d'une espace vectoriel

Selon le signe de Δ. Sur $\mathbb{R}$

Remarque Autre expression pour le cas $\Delta < 0$

Remarque Base d'une espace vectoriel

Exercice

Résoudre les équations différentielles suivantes (on cherchera les solutions réelles).

1. $y'' = \omega^2 y$
2. $y'' = -\omega^2 y$
3. $y'' - 4y' + 13y = 0$
4. $y'' - 4y' + 4y = 0$

Résolution avec second membre

On considère l'équation complète $(E) \quad ay'' + by' + cy = u(t)$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0.$

Théorème - Structure de l'ensemble S_E

La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée (H), ce qui peut aussi s'écrire :
Si $\tilde{y}$ est une solution particulière de l'équation (E) et (f_1, f_2) une base de S_H alors

$$S_E = \left\{ t \mapsto \lambda f_1(t) + \mu f_2(t) + \tilde{y}(t) ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

Résolution avec second membre

On considère l'équation complète $(E) \quad ay'' + by' + cy = u(t)$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$.

Théorème - Structure de l'ensemble S_E

La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée (H), ce qui peut aussi s'écrire :
Si $\tilde{y}$ est une solution particulière de l'équation (E) et (f_1, f_2) une base de S_H alors

$$S_E = \left\{ t \mapsto \lambda f_1(t) + \mu f_2(t) + \tilde{y}(t); (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

Démonstration

Principe général

Proposition - Principe de superposition des solutions

Si le second membre de l'équation (E) est de la forme
$u(t) = u_1(t) + \cdots + u_n(t)$
et si l'on connaît des solutions particulières $\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n$ des équations avec les seconds membres $u_1(t), \ldots, u_n(t)$,
alors une solution particulière de (E) est $\widetilde{y} = \widetilde{y}_1 + \cdots + \widetilde{y}_n$.

Principe général

Proposition - Principe de superposition des solutions

Si le second membre de l'équation (E) est de la forme
$u(t) = u_1(t) + \cdots + u_n(t)$
et si l'on connaît des solutions particulières $\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n$ des équations avec les seconds membres $u_1(t), \ldots, u_n(t)$,
alors une solution particulière de (E) est $\widetilde{y} = \widetilde{y}_1 + \cdots + \widetilde{y}_n$.

Remarque Démonstration

Avec second membre : exponentielle-polynôme

On va s'intéresser au cas où $u(t) = e^{mt}P(t)$ avec $m \in \mathbb{C}$ et P une fonction polynomiale à valeurs complexes.
Le théorème qui suit peut être lu comme un savoir-faire.

Avec second membre : exponentielle-polynôme

On va s'intéresser au cas où $u(t) = e^{mt}P(t)$ avec $m \in \mathbb{C}$ et P une fonction polynomiale à valeurs complexes.
Le théorème qui suit peut être lu comme un savoir-faire.

Théorème - Second membre $e^{mt}P(t)$

Soit $m \in \mathbb{C}$ et P une fonction polynomiale de degré n. Alors on peut trouver une solution particulière de l'équation

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = e^{mt}P(t)$$

de la forme $\widetilde{y}(t) = e^{mt}Q(t)$ où Q est une fonction polynomiale

- de degré n si m n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- de degré $n+1$ si m est racine simple de $ar^2 + br + c = 0$
- de degré $n+2$ si m est racine double de $ar^2 + br + c = 0$

Avec second membre : exponentielle-polynôme

On va s'intéresser au cas où $u(t) = e^{mt}P(t)$ avec $m \in \mathbb{C}$ et P une fonction polynomiale à valeurs complexes.
Le théorème qui suit peut être lu comme un savoir-faire.

Théorème - Second membre $e^{mt}P(t)$

Soit $m \in \mathbb{C}$ et P une fonction polynomiale de degré n. Alors on peut trouver une solution particulière de l'équation

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = e^{mt}P(t)$$

de la forme $\widetilde{y}(t) = e^{mt}Q(t)$ où Q est une fonction polynomiale

- de degré n si m n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- de degré $n+1$ si m est racine simple de $ar^2 + br + c = 0$
- de degré $n+2$ si m est racine double de $ar^2 + br + c = 0$

Démonstration

Polynôme× fonction trigonométrique

Analyse Polynôme trigonométrique

Polynôme× fonction trigonométrique

Analyse Polynôme trigonométrique

Savoir-faire. Second membre de la forme $e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)$

On peut trouver (par identification) une solution particulière de l'équation

$$(E)\quad ay'' + by' + cy = e^{\alpha t}(P(t)\cos t\beta t) + Q(t)\sin t\beta t))$$

de la forme $\tilde{y}(t) = e^{\alpha t}(T(t)\cos t\beta t) + R(t)\sin t\beta t))$ où T et R sont des fonctions polynomiales

- de degré $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$ si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- de degré $n+1 = \max(\deg(P), \deg(Q)) + 1$ si $\alpha + i\beta$ est racine simple de $ar^2 + br + c = 0$

Exercices

Exercice

1. Résoudre $y'' - y' - 2y = 3e^{-t} + 1$.
2. Résoudre $y'' + 2y' + 5y = \cos^2 t$.

Avec conditions initiales (problème de Cauchy)

Théorème - Conditions initiales

Soit $(E)\quad ay''+by'+cy=u(t)$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3, a\neq 0$ et $u:I\to\mathbb{K}$ de l'une des formes précédentes. Soit $(t_0,y_0,y'_0)\in I\times\mathbb{K}\times\mathbb{K}$.
Alors il existe une unique solution $f:I\to\mathbb{K}$ telle que $f(t_0)=y_0$ et $f'(t_0)=y'_0$.

Avec conditions initiales (problème de Cauchy)

Théorème - Conditions initiales

Soit $(E) \quad ay'' + by' + cy = u(t)$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$ et $u : I \to \mathbb{K}$ de l'une des formes précédentes. Soit $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.
Alors il existe une unique solution $f : I \to \mathbb{K}$ telle que $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y_0'$.

La démonstration est simple : les deux conditions initiales fixent les deux valeurs des deux variables libres λ et μ.

Avec conditions initiales (problème de Cauchy)

Théorème - Conditions initiales

Soit $(E)\quad ay''+by'+cy=u(t)$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3, a\neq 0$ et $u:I\to\mathbb{K}$ de l'une des formes précédentes. Soit $(t_0,y_0,y'_0)\in I\times\mathbb{K}\times\mathbb{K}$.
Alors il existe une unique solution $f:I\to\mathbb{K}$ telle que $f(t_0)=y_0$ et $f'(t_0)=y'_0$.

La démonstration est simple : les deux conditions initiales fixent les deux valeurs des deux variables libres λ et μ.

Exercice

Résoudre le problème de Cauchy : $y''-2y'+y=te^t$ avec les conditions $y(0)=0$ et $y'(0)=1$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

$\Rightarrow$ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Conclusion

Objectifs

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

- Recollement

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

- Recollement
- Application aux inégalités différentielles : rectification de la torsion, et exploitant la positivité d'une dérivée.

Conclusion

Objectifs

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

- Recollement
- Application aux inégalités différentielles : rectification de la torsion, et exploitant la positivité d'une dérivée.

Conclusion

Objectifs

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

$\Rightarrow$ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

- Structure des solutions : espace affine

Conclusion

Objectifs

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

- Structure des solutions : espace affine
- Equation homogène

Conclusion

Objectifs

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

- Structure des solutions : espace affine
- Equation homogène
- Résolution explicite : résolution d'un trinôme à coefficients constants (cas sur $\mathbb{C}$)

Conclusion

Objectifs

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Conclusion

Objectifs

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Conclusion

Objectifs

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Pour la prochaine fois

- Exercice n°145