Chapitre 14

Construction d'ensembles numériques : des entiers à la droite réelle

Résumé -

Ce chapitre est comme une application du chapitre e sur les relations pour donner une assise mathématique satisfaisante aux ensembles bien connus des élèves car largement utilisés. Dans l'histoire, ces constructions se sont passés à la fin du XIX siècle. Cela faisait des siècles (voire des millénaires) que certains de ces ensembles étaient exploités...
Il n'y a au fond qu'un seul problème : comment donner du sens aux ensembles : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *?*
Quelques vidéos sur internet :

— *Yvan Monka - Ils sont fous, ces nombres ! - Classification - https ://www.youtube.com/watch ?v=kL-eMNZiARM*
— *Exo7Maths - Nombres réels - https ://www.youtube.com/watch ?v=NCWWVven9Cs*
— *Science4all - La diagonale dévastatrice de Cantor - https ://www.youtube.com/watch ?v=xqSKawORrPo*

Sommaire

1. Problèmes

? Problème 63 - Construction des entiers naturels

Au milieu du XIXième siècle, les mathématiciens se sont rendus compte que leurs sens leur faisaient défaut lorsqu'ils ont découvert les géométrie non euclidienne. Il a fallu tout reconstruire sur des bases très solides. Comment construire l'ensemble des entiers sans équivoque !

? Problème 64 - Construction des entiers relatifs, des rationnels

Une fois que les entiers $1, 2, 3\dots$ sont définis, ainsi que le 0, comment définir proprement les nombres entiers négatifs.
A savoir que dans l'histoire, les fractions sont apparues bien avant les nombres négatifs !
Nous verrons en algèbre générale qu'il est souvent préférable d'avoir un corps plutôt qu'un anneau (tous les éléments sont inversibles).
Comment définir alors proprement l'ensemble des fractions $\frac{a}{b}$ et justifier l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors que $a \neq c$ et $b \neq d$?
Une fois que la construction est acquise (avec les lois $+$ et $\times$), comment généraliser sur $\mathbb{Q}$ la relation d'ordre $\leqslant$ définie sur $\mathbb{Z}$?

? Problème 65 - Construction des réels

Pour le familier de la calculatrice (ou de Python), les nombres réels sont obtenus en écrivant les nombres décimalement quitte à ce que cette écriture soit infini. Cela marche bien ; la preuve : le sur-développement des ordinateurs et autres objets numériques.
Comment faire cette construction et surtout comment gérer la problématique $1 - 0,999\dots9\cdots = 0$, donc la non unicité d'écriture de certains nombres réels.
Là aussi : comment définir la relation d'ordre ?

? Problème 66 - Construction des réels

Une autre possibilité : exploiter le principe de la dichotomie. Cela rappelle la méthode des coupures de DEDEKIND, en séance de cours-TP.
Pouvons-nous dès maintenant anticiper cette méthode ?

? Problème 67 - Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

La construction de $\mathbb{R}$ conduit à voir tous les éléments de $\mathbb{R}$ comme limite d'éléments de $\mathbb{Q}$.
On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (associé à la continuité, c'est une propriété très forte !).
Et pourtant, les cardinaux de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont-ils comparables ? Existe-t-il une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$? de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$?

2. Nombres algébriques

2.1. Nombres entiers

Nombres entiers naturels

On commence par admettre la construction de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Heuristique - Nombres entiers naturels

La construction suivante est dûe à Péano. Soit E un ensemble non vide, possédant un élément de référence et dont tous les éléments ont un unique successeur (différent de l'élément de référence).
Cet élément de référence se note 0 (ou 1, selon). Puis on définit l'addition +1 comme le passage d'un nombre à son successeur.
On a ainsi les bases pour un raisonnement par récurrence et l'ensemble des entiers.
Ce qui suit est en fait assez naturel, même si cela peut paraître un peu compliqué la première fois qu'on le voit...

Théorème - Construction de Péano
Il existe un ensemble $\mathbb{N}$ non vide, munie d'une loi s (comme successeur) telle que :

- $\mathbb{N}$ étant non vide, il admet une élément premier noté 0.
- Pour tout élément $a \in \mathbb{N}$, il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = s(a)$.
- s est injective ($s(a) = s(a') \Rightarrow a = a'$)

Remarque - Addition $+1$
$s(a)$ correspond à la classique addition $+1$.
L'habitude consiste à associer à l'élément $s \circ s \circ \cdots s(0)$, le nombre n égal au nombre de fois que s est utilisé

Proposition - Opérations sur $\mathbb{N}$
On définit l'addition sur $\mathbb{N}$ par : $a + b = s^a(0) + s^b(0) = s^{a+b}(0)$.
On a $a + b = b + a$.
La multiplication est alors la répétition de l'addition : $a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ fois}}$
On a $a \times b = b \times a$.

Proposition - Relation d'ordre
$\mathbb{N}$ est naturellement ordonné (récursivement) :
$\forall\, a, b \in \mathbb{N}^*,\ a \leqslant b \iff s^{-1}(a) \leqslant s^{-1}(b)$.
L'ordre est total.

Et il existe un algorithme, qui termine, permettant de connaître le plus petit entre a et b :

Informatique - Ordre

```python
def petit(a,b):
    c,d=a,b
    while c>0 and d>0 :
        c,d=c-1,d-1
    if c==0:
        return(a)
    else :
        return(b)
```

Nombres entiers naturels

Ensuite on construit l'ensemble des entiers relatifs. On propose ici un exercice.

Heuristique - Problématique

La problématique : l'addition à trou (ou recherche d'une opération réciproque) n'est qu'à moitié possible. En effet, elle dépend de la relation d'ordre entre les nombres soustraits.
Il faut donc créer un premier ensemble, afin que toute soustraction de nombres entiers soit possible.
Mais certaines soustractions peuvent conduire à un « même » résultat

Exercice
Sur $\mathbb{N}^2$,

1. Montrer que $\sim_1$ définie par :
$$(a,b)\sim_1(c,d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a+d=c+b$$
est une relation d'équivalence.
2. Montrer que tout couple (a,b) est dans la classe d'un couple $(0,d)$ ou $(d,0)$ selon que $a\leqslant b$ ou $a\geqslant b$
3. En déduire la construction de $\mathbb{Z}$ comme équivalent à l'ensemble $\dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$

Exemple - Le nombre -2

Proposition - Opération sur $\mathbb{Z}$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'ensemble $\dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ (des classes d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$ de la loi $\sim_1$).
On définit alors la relation d'ordre $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ par :
$$\overline{(a,b)}\leqslant_{\mathbb{Z}}\overline{(c,d)}\Longleftrightarrow a+d\leqslant_{\mathbb{N}}c+b$$
L'addition est alors simplement : $\overline{(a,b)}+_{\mathbb{Z}}\overline{(c,d)}=\overline{(a+_{\mathbb{N}}c,b+_{\mathbb{N}}d)}$
La multiplication est plus compliquée :
$\overline{(a,b)}\times_{\mathbb{Z}}\overline{(c,d)}=\overline{(a\times_{\mathbb{N}}c+_{\mathbb{N}}b\times_{\mathbb{N}}d,b\times_{\mathbb{N}}c+_{\mathbb{N}}a\times_{\mathbb{N}}d)}$

Remarque - La difficulté : l'indépendance au représentant

Il faut bien vérifier que chacune de ces définitions est indépendantes du représentant de la classe d'équivalence.
Ainsi : si $\overline{(a,b)}=\overline{(a',b')}$ et $\overline{(c,d)}+\overline{(c',d')}$,
alors $(a+c)+(b'+d')=(a+b')+(c+d')=(a'+b)+(c'+d)=(a'+c')+(b+d)$.
donc on a bien : $(a+c,b+d)\sim_1(a'+c',b'+d')$.
Ainsi la définition de $+_{\mathbb{Z}}$ est bien indépendante des représentants choisis.

Exemple - Multiplication

Démonstration

Exercice
Montrer que l'ordre est total

2.2. Nombres rationnels

La construction de $\mathbb{Q}$ est en tout point équivalente à la construction de $\mathbb{Z}$, mais pour un problème lié à la multiplication (et donc division) au lieu de l'addition (et donc la multiplication).

Exercice
Sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

1. Montrer que $\sim_2$ définie par :
$$(a,b) \sim_2 (c,d) \quad \Longleftrightarrow \quad a \times_{\mathbb{Z}} d = c \times_{\mathbb{Z}} b$$
est une relation d'équivalence.
2. Montrer la construction de $\mathbb{Q}$ comme équivalent à l'ensemble $\dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}}{\sim_2}$
3. Montrer que $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ définie par $(a,b) \leqslant_{\mathbb{Q}} (c,d)$ ssi $a \times_{\mathbb{Z}} d \leqslant_{\mathbb{Z}} b \times_{\mathbb{Z}} c$ définie bien une relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$
4. Comment définir $+_{\mathbb{Q}}$ et $\times_{\mathbb{Q}}$

Il faudrait vérifier que $\mathbb{Q}$ est bien un corps (addition, multiplication inversible) compatible avec $\leqslant_Q$. Cela se fait sans grande difficultés...

Proposition - Opération sur $\mathbb{Q}$
L'ensemble $\mathbb{Q}$ est l'ensemble $\dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*}{\sim_2}$ (des classes d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ de la loi $\sim_2$).
On définit alors la relation d'ordre $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ par :
$$\overline{(a,b)} \leqslant_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)} \Longleftrightarrow a \times_{\mathbb{Z}} d \leqslant_{\mathbb{Z}} c \times_{\mathbb{Z}} b$$
La multiplication est alors simplement : $\overline{(a,b)} \times_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)} = \overline{(a \times_{\mathbb{Z}} c, b \times_{\mathbb{Q}} d)}$
L'addition est plus compliquée : $\overline{(a,b)} +_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)} = \overline{(a \times_{\mathbb{Z}} d +_{\mathbb{Z}} b \times_{\mathbb{Z}} c, b \times_{\mathbb{Z}} d)}$.
L'ordre est total (démonstration comme pour comme pour $\leqslant \mathbb{Z}$).

Pour aller plus loin - Comment définir π simplement ?
Nous savons que le périmètre d'une forme régulière est proportionnel à son agrandissement.
Donc pour un cercle, il existe une constante telle que son périmètre est égale au produit de cette constante par le diamètre : $p = C \times d$. Par définition, on peut appeler pi1 π_1 cette constante.
Ou bien, de même nous savons que la surface d'une forme régulière est proportionnel au carré de son agrandissement.
Donc pour un disque, il existe une constante telle que son aire est égale au produit de cette constante par le carré du rayon : $S = C' \times r^2$. Par définition, on peut appeler π_2 cette constante.
L'enjeu : montrer que $\pi_1 = \pi_2$...

Pour aller plus loin - Généralisation
Ce principe qui permet de passer de l'anneau $\mathbb{Z}$ au corps des fractions $\mathbb{Q}$ est un principe régulièrement repris en mathématiques.
On suivra exactement ce même principe pour décrire le corps des fractions de polynômes $\mathbb{K}(X)$ à partir de l'anneau des polynômes : $\mathbb{K}[X]$

2.3. Nombres algébriques

La plupart du temps les nombres se définissent par une phrase, qui elle même se traduit en une équation (polynomiale).
On définit alors :

Définition - Nombre algébrique
Un nombre r est un nombre algébrique si il existe une fonction polynomiale P à coefficients entiers telle que $P(r) = 0$.
Si n est le plus petit degré d'un polynôme vérifiant cette relation, on dit que r est algébrique d'ordre n

Exemple - Nombres rationnels

Pour aller plus loin - Nombres irrationnels
Ce fut un choc dans l'antiquité lorsqu'on compris que $\sqrt{2}$, qui existe bien (longueur de la diagonale du carré de côté 1), n'est pas une nombre rationnel. Quel type de nombre est-ce ?
Si l'on considère des nombres irrationnels (i.e. non rationnels) dans leur singularité, on n'en trouve pas beaucoup, ils sont en effet difficile à définir.

Exemple - Nombres quadratiques

D'autres nombres, toujours « naturels » ne s'expriment pas à partir d'une équation polynomiale à coefficients entiers. C'est le cas de π ou de e.

Définition - Nombre transcendant
Si r n'est pas algébrique, on dit qu'il est transcendant.

Démontrer qu'un nombre donné est transcendant n'est pas une mission évidente.

Pour aller plus loin - Problème ouvert
Est-ce que γ est un nombre transcendant ou algébrique ?
Par définition, $\gamma = \lim(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n)$

3. Propriétés de $\mathbb{R}$

3.1. Principe de construction de $\mathbb{R}$

Heuristique - Un principe : les coupures de DEDEKIND. Rappel
$\mathbb{Q}$ est un ensemble, relativement naturel, muni d'une relation d'ordre totale $\leqslant$.
$\mathbb{R} \sim \mathscr{C}(\mathbb{Q})$ est l'ensemble des sections ouvertes commençantes sur $\mathbb{Q}$.

$$\mathscr{C}(\mathbb{Q}) = \left\{T \subset \mathbb{Q} \mid \forall\ a \in T, b \leqslant a \Rightarrow b \in T \,\&\, \nexists\ m \in \mathbb{Q} \text{ tel que } T = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant m\}\right\}$$

L'addition est assez naturellement prolongée, ainsi que la relation d'ordre totale.
La multiplication par des positifs est simple, ensuite c'est la règle des signes.
On obtient ensuite quelques résultats topologiques, nouveaux principes de bases ici. Cela est fondamentalement lié au fait qu'il existe des rationnels infiniment proches.

Pour aller plus loin - Autre complétion
L'ensemble $\mathbb{R}$ est l'ensemble que l'on obtient naturellement, à partir limites de suites de rationnels (éléments de $\mathbb{Q}$), limites définies à partir de la distance $d(a,b) = |a-b|$ où l'on retrouve la valeur absolue classique.
Mais il existe une (seule) autre façon de faire. On fixe un nombre premier p et on mesure la distance $d\left(\frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2}\right) = p^{v_p(s_1)+v_p(s_2)-v_p(r_1 s_2 - r_2 s_1)}$ où pour $a \in \mathbb{Z}$, $v_p(a) = \max\{\alpha \mid p^\alpha | a\}$.
A partir de cette distance, en complétant $\mathbb{Q}$ de limite de suite (de Cauchy) rationnelles, on trouve l'ensemble des nombres p-adique.

3.2. Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

<u>Valeur absolue</u>

Définition - Valeur absolue
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (plus grand des deux réels x et $-x$).

$d(x,y) = |x-y|$ mesure la distance entre deux réels x et y de la droite réelle.

Définition - Partie positive, partie négative

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $x^+ = \max(x,0)$ (partie positive du réel x)
et $x^- = \max(-x,0)$ (partie négative du réel x).
Ces deux réels sont POSITIFS.

Exercice

Ecrire $|x|$ en fonction de x^+ et x^-.
Ecrire x^+ en fonction de $|x|$ et de x.

Proposition - Encadrements à connaître

$$|x| \leqslant M \Longleftrightarrow -M \leqslant x \leqslant M$$

$$|x| \geqslant M \Longleftrightarrow (x \geqslant M \text{ ou } x \leqslant -M)$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| = |x|\,|y|$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big||x|-|y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, d(x,y) \geqslant d(|x|,|y|) \text{ ou } |x-y| \geqslant \big||x|-|y|\big|$$

Démonstration

Partie entière

Proposition - Corps archimédien
Comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ est archimédien :

$$\forall\ (a,A) \in\in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \qquad \exists\ n \in \mathbb{N},\ \text{tel que } na \geqslant A$$

Avec $a=1$, cela conduit à la définition :

Définition - Partie entière
Soit $x\in\mathbb{R}$. Il existe un unique $n\in\mathbb{Z}$ vérifiant $n\leqslant x<n+1$.
n s'appelle la partie entière de x, on la note $\lfloor x\rfloor$. On a donc

$$\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1 \quad \text{et} \quad x-1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x.$$

Démonstration

Exercice
Pour tout entier $n\geqslant 1$, montrer :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

En déduire la partie entière du réel $A = 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{10\,000}}$.

Savoir faire - Travailler avec la partie décimale
Fréquemment, on exploite également la fonction partie décimale θ : $\theta(x) = x - \lfloor x\rfloor$.
On voit que $\theta(x)\in[0,1[$, pour tout $x\in\mathbb{R}$

Exercice
Pour tout réel x, déterminer la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor}{n^2}$

4. Parties de $\mathbb{R}$ et topologie

4.1. Bornes supérieure et inférieure

On commence par quelques rappels de définitions, mais adaptés ici au cas réel :

Pour aller plus loin - Rappels
Un majorant M est le plus grand élément de A si et seulement si il appartient également à A.
Un minorant m est le plus petit élément de A si et seulement si il appartient à A

Définition - Sous-ensemble majoré, minoré, borné
Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que :
— A est majoré s'il existe un réel M tel que, pour tout x de A, on ait $x\leqslant M$.
  M est alors un majorant de A.

— A est minoré s'il existe un réel m tel que, pour tout x de A, on ait $m \leqslant x$.
m est alors un minorant de A.
— Si A est majoré et minoré, on dit qu'il est borné.

Remarque - Ensemble $\mathbb{N}$
Pour l'ensemble $\mathbb{N}$, on a quelques propriétés :
— Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
— Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Ce résultat n'est pas vrai si l'on remplace $\mathbb{N}$ par $\mathbb{R}$.
Rappels :

Pour aller plus loin - Récurrence
C'est la première propriété ici (avec un raisonnement par l'absurde) qui permet de montrer l'exactitude du raisonnement par récurrence (et aussi de la descente infinie) et aussi la méthode du variant de boucle en informatique.

Définition - Borne inférieure, borne supérieure
Soit $A \subset \mathbb{R}$.
— Si l'ensemble des majorants de A est non vide
et si il admet un plus petit élément a,
alors a est appelé borne supérieure de A, on note $a = \sup A$.
Formellement :

$$\sup A := \min\{M \in \mathbb{R} \mid \forall\ a \in A, a \leqslant M\} \text{ (si non vide)}$$

— Si l'ensemble des minorants de A est non vide
et si il admet un plus grand élément b,
alors b est appelé borne inférieure de A, on note $a = \inf A$.
Formellement :

$$\inf A := \max\{m \in \mathbb{R} \mid \forall\ a \in A, a \geqslant m\} \text{ (si non vide)}$$

Attention - Borne supérieure
Comme son nom ne l'indique pas, la borne supérieure est par définition le plus **petit** élément d'un certain ensemble (celui des majorants).

L'exercice suivant donne des exemples à toujours bien garder dans un coin de sa tête...

Exercice
Déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure, la borne inférieure (sur $\mathbb{R}$) des parties suivantes :

$$A = [0,1], \quad B = [0,1[, \quad C = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Proposition - Condition d'existence de la borne supérieure
Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. On suppose que A possède un plus grand élément a (resp. plus petit élément b).
Alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et $\sup A = a$ (resp $\inf A = b$).

Savoir faire - Etudier une borne supérieure
En règle générale, pour obtenir une égalité sur la borne supérieure, on exploite deux inégalités :
— $\forall\ a \in A$, $a \leqslant \sup A$ (minoration de $\sup A$)
— $\forall\ M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ a \in A$, $a \leqslant M$, alors $M \geqslant \sup A$
(majoration de $\sup A$, par tous les majorants de A)

On a évidemment des relations symétriques pour la borne inférieure…

Exercice

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ admettant des bornes supérieures. Montrer que

$$A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B.$$

Donner un résultat similaires avec les bornes inférieures.

Les deux propositions suivantes donnent des caractérisations *opératoires* (avec lesquelles travailler dans les démonstrations) et donc un nouveau savoir-faire :

Proposition - Caractérisation de la borne sup.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$
Alors $x = \sup A$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall\ a \in A,\ a \leqslant x \\ \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ a_\epsilon \in A \mid,\ x - \epsilon < a_\epsilon \end{cases}$$

Proposition - Caractérisation de la borne inf.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$
Alors $x = \inf A$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall a \in A,\ x \leqslant a \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists a_\epsilon \in A \mid a_\epsilon < x + \epsilon \end{cases}$$

Démonstration

Le théorème suivant est parfois pris comme caractérisation de $\mathbb{R}$. Nous en avons vu la démonstration dans le cours-TD (il faut une défintion pour $\mathbb{R}$)

Théorème - Existence de la borne supérieure
Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Attention - Propriété non vérifiée par $\mathbb{Q}$

Cette propriété différencie $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$:

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ admet une borne supérieure (dans $\mathbb{R}$), que l'on notera : $\sqrt{2}$
- mais $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (non existence d'un plus petit élément dans $\mathbb{Q}$ de l'ensemble des majorants rationnels).

Heuristique - Manipuler l'ensemble des majorants et non l'ensemble E lui-même

L'ensemble E peut être très compliqué, un ensemble à trous par exemple $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[(1+\frac{1}{n})^n - \frac{1}{n^2};(1+\frac{1}{n})^n + \frac{1}{n^2}\right]$.

Il vaut mieux raisonner sur l'ensemble des majorants $\mathcal{M}$: celui-ci est nécessairement un intervalle :

Mieux (mais on ne le sait pas encore) il s'agit de l'intervalle fermé $[\sup E, +\infty[$.

Exercice

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{M}(A)$, l'ensemble des majorants de A.

A quoi ressemble $\mathcal{M}(A)$?

Pour aller plus loin - Démonstration de ce résultat

$E = \{r \in \mathbb{Q}^+ \mid r^2 < 2\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ en considérant $s = \frac{p}{q} \mapsto \frac{3p+4q}{2p+3q}$.

Si $s = \frac{p}{q} \in E$, alors $\frac{p^2}{q^2} < 2$ et $s' = \frac{3p+4q}{2p+3q} \in \mathbb{Q}$.

Par ailleurs, $s^2 < s'^2 < 2$.

En effet : $s' > 0$ et $s < s' \Leftrightarrow p(2p+3q) < q(3p+4q) \Leftrightarrow 2p^2 < 4q^2 \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} < 2$

et $s'^2 < 2 \Leftrightarrow (3p+4q)^2 < 2(2p+3q)^2 \Leftrightarrow 9p^2 + 16q^2 + 24pq < 8p^2 + 18q^2 + 24pq \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} < 2$

Par conséquent, si $s = \frac{p}{q}$ est le plus petit des majorants de E, alors nécessairement $s \notin E$.

Mais de même si $s = \frac{p}{q} \notin E$, alors $\frac{p^2}{q^2} > 2$ puis $s' = \frac{3p+4q}{2p+3q} \notin E$ est un majorant plus petit !

Il n'est donc pas possible de trouver un majorant, le plus petit, de E dans $\mathbb{Q}$.

Corollaire - Critère de nullité d'un nombre

Un réel a vérifiant $\forall \epsilon > 0$, $|a| \leqslant \epsilon$ est nul.

Démonstration

On avait déjà fait une démonstration ici par contraposée.

4.2. Densité de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Ensemble $\mathbb{D}$

Définition - Ensemble des décimaux

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On dit que x est un nombre décimal s'il existe $p \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \dfrac{p}{10^n}$.

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux. On a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Remarque - Un nombre décimal...

... c'est tout simplement un nombre qui s'écrit avec une virgule et une fin dans le développement.

Par exemple : $25,456394 = \dfrac{25\,456\,394}{10^6}$

Définition - Valeur décimale approchée

Si $p \in \mathbb{Z}$ est tel que $\dfrac{p}{10^n} \leqslant x \leqslant \dfrac{p+1}{10^n}$,

on dit que $\dfrac{p}{10^n}$ (resp. $\dfrac{p+1}{10^n}$) est une valeur décimale approchée par défaut (resp. par excès) de x à la précision 10^{-n}.

Proposition - Obtenir la valeur décimale approchée
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ (resp. $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$) est une valeur approchée de x par défaut (resp. par excès) à la précision 10^{-n}.

Démonstration

$\mathbb{D}$ (et $\mathbb{Q}$) denses dans $\mathbb{R}$

Heuristique - Une partie dense ?

Une partie X est dense dans $\mathbb{R}$ si elle peut toucher (à $\epsilon > 0$ près - choisi par avance, aussi petit qu'on veut) tous les éléments de $\mathbb{R}$ avec les propres de X.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \forall \epsilon > 0, \exists r \in X, |x - r| < \epsilon$$

Analyse - Vers une définition équivalente

Définition - Partie dense dans $\mathbb{R}$
Une partie non vide X de $\mathbb{R}$ est dite dense dans $\mathbb{R}$
si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide,
c'est-à-dire si pour deux réels a et b, $a < b$, il existe $x \in X \cap]a, b[$.

Théorème - Parties denses dans $\mathbb{R}$
$\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Démontrons la densité de $\mathbb{D}$ et celle de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, on en déduira la densité de $\mathbb{Q}$

Démonstration

Par l'absurde :

Corollaire -
Tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient donc au moins un rationnel et un irrationnel.
On en déduit qu'il y a un rationnel (ainsi qu'un irrationnel) « aussi proche que l'on veut » d'un réel x donné :

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} \quad : \quad \forall \epsilon > 0, \exists r \in \mathbb{Q}, |x - r| < \epsilon, \qquad \exists \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |x - \xi| < \epsilon$$

5. Bilan

Synthèse

- Les ensembles numériques classiques (de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$), se déduisent les uns des autres à partir de relation d'équivalence, qui permet d'étendre la relation d'ordre $\leqslant$ toujours totale sur chaque ensemble. Au commencement, l'ensemble $\mathbb{N}$ est la répétition (récursive) de l'addition $+1$.
- Nous proposons ici une construction originale et complète de $\mathbb{R}$, à partir de suite de bissecantes de rationnels. Le processus n'est pas nécessairement à retenir, mais il permet de TOUT démontrer, là où le programme demande d'admettre le théorème de la borne supérieure sur $\mathbb{R}$.
- On termine par définir la fonction valeur absolue, la partie entière sur $\mathbb{R}$. On étend aussi la notion d'intervalle numérique en sur-ensemble et sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Savoir-faire - Manipuler des nombres réels
- Savoir-faire - Travailler avec la partie décimale
- Savoir-faire - Etudier une borne supérieure

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\lvert x\rvert$	Valeur absolue de x, $\lvert x\rvert = \max(x, -x)$,	$\lvert x\rvert \geqslant 0$	On note $x_+ = \max(x,0)$, $x_- = \max(-x,0)$. Alors $\lvert x\rvert = x_+ + x_-$, $x = x_+ - x_-$ et $x_+ \geqslant 0$, $x_- \geqslant 0$
$\lfloor x \rfloor$	Partie entière de x. $\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant x\}$	$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$ et $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$	On note $\theta = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$, partie fractionnaire ou décimale de x.
$\sup A$	Borne supérieure de A.	Le plus PETIT des éléments plus grand que TOUS les éléments de A	$m = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, a \in A, a \leqslant m \\ M \geqslant a, \forall\, a \in A \Rightarrow M \leqslant m \end{cases}$

Retour sur les problèmes

62. Par récurrence...
63. Vu en cours (avec deux relations d'équivalence)
64. Vu en cours (avec une relation d'équivalence)
65. Vu en TD-cours
66. Bien que $\overline{Q} = \mathbb{R}$, on a une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$, mais pas de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$.
    D'après un théorème de Bernstein, il suffit de montrer qu'il existe une injection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{N}$.
    On peut prendre $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, $(\frac{a}{b}) \mapsto 2^{[a \geqslant 0]} 3^{|a|} 5^b$, injective (non surjective),
    on voit qu'en fait pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^q$ s'injecte dans $\mathbb{N}$ (infinité de nombres premiers).

Par ailleurs, si il existe $\varphi : \mathbb{N} \to [0,1]$ bijective. On note $\varphi(i) = x_i = 0, x_1^i x_2^i \dots x_n^i \dots \in [0,1]$ (écriture décimale)

Considérons alors le nombre $X = 0, X_1 X_2, \dots X_n \dots$ tel que $X_i \equiv \varphi(i)_i + 5[10]$.

Nécessairement, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\varphi(i)_i \neq X_i$, donc $\varphi(i) \neq X$.

Ainsi φ n'est pas surjective. Contradiction.