Quatrième partie

Analyse réelle

Chapitre 18

Suites numériques

Résumé -

Les suites sont au coeur des mathématiques : il s'agit souvent d'étudier des valeurs numériques successives (i.e. dans une temporalité discrète ou paramétrée par $\mathbb{N}$). Ce sont donc des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ (ou un sous-corps de $\mathbb{C}$).
Certaines sont classiques : les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes à deux termes (par lesquelles on commence ici) ou définies implicitement, définies par une relation de récurrence (par lesquelles on termine ici). Entre ces deux types, on se concentre sur la question de la limite d'une suite. C'est un cas simple : un seule est possible et c'est toujours pour n tendant vers l'infini. On termine par étudier les propriétés topologiques de $\mathbb{R}$ (et $\mathbb{C}$) avec le langage des suites.
Quelques liens (inégaux) sur youtube :
- *netprof - Suites numériques réelles, définition. https ://www.youtube.com/watch ?v=Dvo4vgjRS7g*
- *[[UT#23]] - Calcul de limite - développement asymptotique. https ://www.youtube.com/watch ?v=T8kkTBTpM8Y*
- *Science4all* - 1+2+3+4+5+... = −1/12 - *https ://www.youtube.com/watch ?v=vMnkmBCvGQc*

Sommaire

1. Problèmes . . . 330
2. Exemples fondamentaux . . . 331
2.1. Suites arithmético-géométriques . . . 331
2.2. Suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2 . . . 331
3. Suites extraites . . . 332
3.1. Rappels . . . 332
3.2. Valeur d'adhérence d'une suite . . . 333
3.3. Application 1 : Contraire de « à partir d'un certain rang » . . . 334
3.4. Application 2. Lemme des pics . . . 335
4. Limite d'une suite réelle . . . 335
4.1. Suite convergente . . . 335
4.2. Suites divergentes . . . 337
4.3. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre 338
4.4. Extension aux suites à valeurs complexes . . . 343
4.5. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites . . . 345
5. Analyse asymptotique . . . 347
5.1. Hiérarchie de suites . . . 347
5.2. Suites équivalentes . . . 349
5.3. Suites dominées . . . 354
6. Bilan . . . 358

1. Problèmes

? Problème 79 - Suite de Fibonacci

Le mathématicien italien du XIV-ième, Leonardo FIBONACCI a introduit la suite suivante définie par une double récurrence pour modéliser la reproduction des lapins :
$F_0 = F_1 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Comment calculer F_{100} ?
Il semble qu'il faut calculer tous les termes précédents, on peut exploiter un programme informatique.
Existe-t-il une formule fermée de F_n (expression directe et calculatoire de F_n directement en fonction de n) ?

? Problème 80 - Forme fermée (ou forme close)

Au problème précédent, la réponse est affirmative, nous la verrons dans le cours.
De manière générale, quelles sont les types de suites pour lesquelles on peut trouver une forme fermée (expression directe en fonction de n) ?
Souvenons-nous que la définition naturelle d'une suite est plutôt sous forme d'une récurrence.
(Nous verrons une autre famille de suites importantes : celles pour lesquelles chaque terme est la solution d'une équation dépendant de n).

? Problème 81 - Suites convergentes

Dans beaucoup de problèmes (au concours par exemple), il faut démontrer qu'une certaine suite converge.
Il est bon de faire la liste des méthodes. Quelles sont toutes les méthodes pour montrer qu'une suite converge ?
On se rend compte qu'il existe deux grandes familles de réponses à cette question : les méthodes qui donne également la limite et celle qui montre la convergence sans donner vraiment d'information quant à la valeur de la limite.

? Problème 82 - Suite divergente vers l'infini

La somme de deux suites convergentes est une suite convergente dont la limite est la somme des deux suites qui la constituent.
Il existe également une règle avec l'une, voir les deux suites divergentes vers $+\infty$.
On peut multiplier les études en sous-cas (avec $+\infty$, avec $-\infty$, avec, avec...). Est-il possible de réunir en une seule formulation ?
On se rend compte dans ces cas là que la divergence vers l'infini est en fait plus proche de la convergence vers a que d'une divergence par absence de limite...

? Problème 83 - Suite qui ne ... pas à partir d'un certain rang

Quelle stratégie mettre en place pour manipuler des suites qui ne font pas telle ou telle chose à partir d'un certain rang ?

2. Exemples fondamentaux

2.1. Suites arithmético-géométriques

On verra plus loin (lorsque nous disposerons d'autres outils) le cas des suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
En dehors des suites géométriques et arithmétiques, il y a quelques autres types de suites à savoir étudier.

Définition - Suites arithmético-géométrique
Une suite (u_n) (réelle ou complexe) est dite arithmético-géométrique si elle est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 0, a \neq 1, b \neq 0$.

Savoir faire - Etudier une suite arithmético-géométrique
Pour étudier une telle suite,

1. on cherche un point fixe c : tel que $c = ac + b$
2. on introduit la suite $(v_n) = (u_n - c)$. Elle est géométrique de raison a.

On a donc $u_n = a^n(u_0 - c) + c$

Exercice
Etudier la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3}$.

2.2. Suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2

Définition - Suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2
On appelle suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 toute suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) définie par

$$u_0, u_1 \in \mathbb{K} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0, c \neq 0$.
On lui associe une équation dite caractéristique : $ax^2 + bx + c = 0$

Théorème - Etude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2
Notons $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique.
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (a, b, c complexes) :

— si $\Delta \neq 0$ et r_1, r_2 racines de l'équation caractéristique,

$$E = \{\lambda(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

— si $\Delta = 0$ et r unique racine,

$$E = \{\lambda(r^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (a, b, c réels) :

— si $\Delta > 0$ et r_1, r_2 racines de l'équation caractéristique,

$$E = \{\lambda(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

— si $\Delta = 0$ et r unique racine,

$$E = \{\lambda(r^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}; (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

— si $\Delta < 0$ et $r = \rho e^{i\theta}, \bar{r}$ racines complexes,

$$E = \{\lambda(\mathfrak{Re}(r^n))_{n\in\mathbb{N}} + \mu(\mathfrak{Im}(r^n))_{n\in\mathbb{N}}; (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\}$$
$$= \{\lambda(\rho^n \cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(\rho^n \sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}; (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Pour aller plus loin - Méthode américaine

Si on note r_1 et r_2 les racines de l'équation caractéristique.

1. *On considère $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, alors $(a+bx+cx^2)f(x) = a(u_0+u_1x)+bu_0x+\sum_{n=0}^{+\infty}(au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n)x^{n+2} = a(u_0+u_1x)+bu_0x$.*
2. *On pratique une décomposition en élément simple : $f(x) = \dfrac{au_0+(au_1+bu_0)x}{a(1+r_1x)(1+r_2x)} = \dfrac{A}{1+r_1x} + \dfrac{B}{1+r_2x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(Ar_1^n + Br_2^n)x^n$.*
3. *Puis on peut identifier $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$*

Savoir faire - Etudier une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Pour étudier une telle suite,

1. on définit l'équation caractéristique associée
2. on calcule le discriminant :
   — Si $\Delta > 0$, les racines sont r_1 et r_2,
   $\exists\, A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n$.
   — Si $\Delta = 0$, la racine double est r
   $\exists\, A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = (A_1 + A_2 n) r^n$.
   — Si $\Delta < 0$, les racines sont $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$,
   $\exists\, A \in \mathbb{C}$ tels que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = Ar_1^n + \overline{A} r_2^n$. $\exists\, A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \rho^n(A_1\cos(n\theta) + A_2\sin(n\theta))$.

Savoir faire - Et s'il y a un second membre?

La résolution se fait comme pour les EDL2 à coefficients constants.

1. On cherche une solution particulière (de la même forme que le second membre et par tâtonnement)
2. On cherche l'ensemble des solutions du problème homogène

L'ensemble des solutions est la somme (affine) de la solution particulière et de l'espace des solutions du problème homogène (ce qui forme un espace affine).

Remarque - Démonstrations

Il existe au moins trois démonstrations classiques de ce résultat :
— par récurrence. On peut le faire (mais attention à la question de l'unicité de la suite)
— par la force de l'algèbre linéaire. Nous ferrons cette démonstration dans le cours d'algèbre linéaire (second semestre)
— par les séries géométriques (voir plus loin)

3. Suites extraites

3.1. Rappels

La définition a déjà été donnée, il s'agit de considérer seulement certains éléments (mais en nombre inifini) de (u_n), une suite donnée.

Définition - Suite extraite

On dit que (v_n) est une suite extraite de (u_n) (ou une sous-suite),
si $\exists\, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemple - Extraction paire

Attention - Double extraction
Si (w_n) est une extraction de (v_n), elle-même une extraction de u_n,
$\exists\, \varphi_1, \varphi_2$ tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_{\varphi_2(n)}$ et $v_n = u_{\varphi_1(n)}$,
et donc $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_{\varphi_2(n)} = u_{\varphi_1(\varphi_2(n))}$, l'extractrice est donc $\varphi_1 \circ \varphi_2$.

On a vu également (élargi ici) :

Proposition - Sous-ensemble infini et suite extraite
Soit $A \subset \mathbb{R}$, on a les équivalences :

i. $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in A\}$ est infini

ii. $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in A\}$ n'est pas majoré

iii. $\exists\,(v_n)$ extraite de (u_n) telle que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n \in A$

iv. $\exists\, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow\nearrow$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in A$

On dit (en probabilité, en particulier) que $u_n \in A$ infiniment souvent, écris : $(u_n) \in A i.s.$ (ou $(u_n) \in A i.o.$ (infinitely often)).

Démonstration

Remarque - Dans la démonstration...
Pour l'implication $[i.] \Rightarrow [iv.]$, on a refusé d'écrire : « A est infini, inclus dans $\mathbb{N}$, donc dénombrable ou énumérable.

$$A = \{i_0, i_1, i_2, i_3 \dots\}$$

Et il suffit de prendre $\varphi : n \mapsto i_n$. » Pour deux raisons, rien ne prouve que l'énumération est croissante (pour $\mathbb{Q}$ dénombrable, c'est par exemple compliqué) et ensuite, cela serait une tautologie : il faudrait bien démontrer ce résultat une fois pour toute. La démonstration proposée donne donc cette démonstration « une fois pour toute ».

3.2. Valeur d'adhérence d'une suite

Définition - Valeur d'adhérence (d'une suite)
Si a est limite d'une suite extraite de (u_n), alors, on dit que a est une valeur d'adherénce de la suite (u_n).

Théorème - Limite d'une suite extraite
Toute suite extraite d'une suite tendant vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ est une suite tendant vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Autrement écrit : si $(u_n) \to \ell$, alors (u_n) n'admet qu'une seule valeur

d'adhérence : ℓ.

Démonstration

3.3. Application 1 : Contraire de « à partir d'un certain rang »

Analyse - Contraire de : « A partir d'un certain rang »

Théorème - Suite extraite
Soit (u_n) une suite numérique et $B \subset \mathbb{R}$.
Si on n'a pas : $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in B$,
i.e. on a : $\forall\ N \in \mathbb{N}, \exists\ n \geqslant N, u_n \notin B$
Alors, il existe une sous-suite (v_n) de (u_n) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \notin B$

Démonstration

Exemple - Non suite nulle à partir d'un certain rang

On exploite aussi des suites extraites pour étudier des suites non majorées :

Proposition - Suite non majorée
(u_n) n'est pas majorée ssi il existe une suite extraite de (u_n) tendant vers $+\infty$.
i.e. il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\nearrow\nearrow$ telle que $(u_{\varphi(n)}) \to +\infty$

Démonstration

Exercice

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $[a,b]$.

Soient $\epsilon > 0$ et $n = \left\lfloor \dfrac{b-a}{\epsilon} \right\rfloor$

1. $[a,b]$ peut s'écrire comme une réunion de n intervalles de taille inférieur à $\epsilon > 0$.
2. Montrer qu'il existe un ensemble $A \subset [a,b]$, de taille inférieur à ϵ et une suite extraite de (u_n) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in A$

3.4. Application 2. Lemme des pics

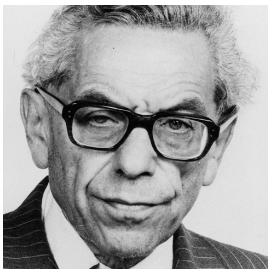
Proposition - Lemme des pics
Soit E, un ensemble totalement ordonné.
Toute suite de E admet une sous-suite croissante ou une sous-suite décroissante.

C'est encore plus fin ici, car l'ensemble A n'est pas fixe, d'une certaine façon... On travaille donc sur N directement et on doit adapter la démonstration.

Démonstration

Remarque - Le lemme de ERDÖS-SZEKERES
LE DS10 2020-2021 donne un algorithme pour trouver, à partir d'une suite finie de $pq+1$ éléments ou bien une suite extraite croissante de $p+1$ éléments ou une suite décroissante de $q+1$ éléments.
Une forme d'optimalité finie.

Histoire - Paul Erdös



Paul Erdös (1913-1996) est un mathématicien hongrois en exil permanent. Très prolifique, il s'intéresse à l'arithmétique, théorie des graphes et probabilités ou encore l'analyse. Un de ses leitmotivs : « Another roof, another proof ». Il campait chez l'un ou l'autre des mathématiciens quelques jours pour trouver des résultats intéressants, puis il s'en allait.
Une autre citation intéressante : « Il faut parfois compliquer un problème pour en simplifier la solution. »
On peut lire : Erdös, l'homme qui n'aimait que les nombres.

4. Limite d'une suite réelle

4.1. Suite convergente

Heuristique - Expression en français

On dit qu'une suite (u_n) converge vers ℓ,
si à toute précision fixée a priori et notée ϵ,
la suite u_n est proche de ℓ à ϵ près, à partir d'un certain rang...

Définition - Limite (réelle)

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \epsilon$$

Remarque - Suite convergente vers 0

On a $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff (u_n - \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On pourrait donc restreindre notre cours à l'étude des suites convergentes vers 0.

Remarque - Strict ou non

On a aussi $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| < \epsilon$$

Exercice

Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge vers 0.

Attention - Dépendance de N à ϵ

On remarquera bien sur cet exercice le fait important et fréquent :
N dépend de la valeur de ϵ choisie a priori.
On pourrait noter à la physicienne : $N(\epsilon)$

Proposition - Unicité de la limite

Soit (u_n) une suite réelle. Si (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ', alors $\ell = \ell'$.
On note alors $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Démonstration

Définition - Suites convergente, divergente

Soit (u_n) une suite réelle.
S'il existe un réel ℓ tel que la suite converge vers ℓ, on dit que (u_n) est convergente.
ℓ (unique d'après ce qui précède) est appelé la limite de la suite.

Proposition - Suite convergente donc bornée
Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

4.2. Suites divergentes

Il y a deux types de non convergence (=divergence) :
- les suites tendant vers ∞ (premier type de divergence - en fait convergence dans $\overline{\mathbb{R}}$).
- les suites ne tendant vers rien (deuxième type de divergence).

Définition - divergente
Si la suite n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente.

On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$ ce qui donne la définition suivante.

Définition - Limite infinie
On dit que la suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant A.$$

On dit que la suite réelle (u_n) tend vers $-\infty$ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant A.$$

Remarque - Limite infinie et suite divergente

- Une suite admettant une limite infinie est une suite divergente. On ecrit toutefois $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty(-\infty)$ lorsque $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty(-\infty)$ et on dit que la suite diverge vers $+\infty$ $(-\infty)$.
- Si (u_n) tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$.

<u>Exercice</u>
Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite (n^α) diverge vers $+\infty$.

Attention - Dépendance de N à A
On remarquera bien sur cet exercice le fait important et fréquent :
N dépend de la valeur de A choisie a priori.
On pourrait noter à la physicienne : $N(A)$

Attention - Cas pathologiques
Il existe
- des suites divergentes qui ne tendent pas vers $+\infty$ (ni vers $-\infty$) ;
- des suites non bornées qui ne divergent pas vers $+(-)\infty$.
- des suites convergentes non monotones.

Savoir faire - Montrer la divergence (deuxième type) d'une suite, par suites extraites

Soit (u_n) une suite réelle.
On suppose qu'il existe deux suites extraites $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ convergeant respectivement vers ℓ et ℓ', avec $\ell \neq \ell'$. Alors la suite (u_n) est divergente.

Exercice
Donner des exemples de telles suites

Exercice
Rappeler et démontrer les résultats sur la convergence des suites arithmétiques ou géométriques en fonction de leur raison.

4.3. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

Ordre et limites

Proposition - Convergence et signe de la suite
Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$). Alors la suite est strictement positive (resp. strictement négative) à partir d'un certain rang.

Démonstration

Et réciproquement, si $u_n > 0$, a-t-on $\lim(u_n) > 0$?

Attention - Les inégalités sont élargies !
Les inégalités strictes ne passent pas à la limite, elles se transforment en inégalités larges.
Par exemple $u_n = \frac{1}{n} > 0 = v_n$ et pourtant $\lim(u_n) = \lim(v_n) = 0$

Théorème - Passage à la limite dans les inégalités
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui convergent respectivement vers les réels ℓ et ℓ'. On suppose qu'à partir d'un certain rang on a $u_n \leqslant v_n$. Alors $\ell \leqslant \ell'$.

Remarque - Dans $\overline{\mathbb{R}}$
Le résultat reste vrai avec des suites ayant des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration

Heuristique - Petit bilan... et mieux !
Dans le cadre des suites convergentes dans $\overline{R}$, on peut résumer d'une certaine façon, ce qu'on a vu en :

- Le passage à la limite conserve l'ordre large.
- Réciproquement (strict) : si $\lim u_n < \lim v_n$,

alors $u_n < v_n$ à partir d'une certain rang.
Le théorème d'encadrement est un peu plus fort : il assure aussi la convergence.

Théorème - Théorème de convergence par encadrement, dit "des gendarmes"
Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n, \text{ et que } \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$$

alors la suite (v_n) converge vers ℓ.

Avec $(u_n) = (-w_n)$:

Corollaire - Encadrement en valeur absolue
Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que l'on a (α_n) une suite de réels positifs qui converge vers 0 et un réel ℓ tels qu'à partir d'un certain rang $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$. Alors (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration

Savoir faire - A partir de deux certains rangs
Si on a, à partir d'un certain premier rang une propriété vraie : $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant n_1, \mathscr{P}_n$.
Et à partir d'un certain second rang une propriété vraie : $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant n_1, \mathscr{P}'_n$.
Alors, à partir d'un certain (autre) rang : $n_3 = \max(n_1, n_2)$, $\forall\, n \geqslant n_3$, $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}'_n$ sont vraies.

Exercice

Montrer que la suite $\left(\frac{2^n}{n!}\right)$ converge vers 0.

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

Théorème - Théorème de divergence (vers $\pm\infty$) par encadrement
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$. Alors

$$(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow (v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \tag{18.1}$$

$$(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \Rightarrow (u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \tag{18.2}$$

Exercice

Soit (S_n) la suite définie par $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, comparez $\frac{1}{k}$ avec $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. En déduire que (S_n) diverge.
2. Prouver que $\left(\frac{S_n}{\ln n}\right)$ converge et donner sa limite.

Savoir faire - Convergence par encadrement/Divergence par minoration (majoration)

L'encadrement est souvent à la base de toute démonstration d'analyse.
Pour démontrer que $u_n \to \ell$, on démontre qu'à partir d'un certain rang
$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ avec $\lim(v_n) = \lim(w_n) = \ell$.
ou $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$ avec $\lim(\alpha_n) = 0$.
Pour démontrer que $u_n \to +\infty$, on démontre qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$ et $v_n \to +\infty$.

Pour $u_n \to -\infty$, on démontre qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant w_n$ et $w_n \to -\infty$.

Opérations sur les limites

Définition - $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ comme une algèbre
On définit les opérations suivantes sur l'ensemble des suites réelles :
- Addition : $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$
- Multiplication par un réel : $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$
- Multiplication de deux suites : $(u_n) \times (v_n) = (u_n \times v_n)$

Addition et multiplication de deux suites sont des "lois internes" sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la multiplication est une "loi externe".

On commence par deux lemmes qui simplifieront les démonstrations

Lemme -
Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.
— Si $(u_n) \to 0$ et (v_n) est bornée, alors $(u_n \times v_n) \to 0$.
— Si $(u_n) \to +\infty$ et (v_n) est minorée, alors $(u_n + v_n) \to +\infty$

Démonstration

Théorème - Opérations sur les limites
Soit (u_n) une suite tendant vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et (v_n)une suite tendant vers $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors, lorsque le calcul dans $\overline{\mathbb{R}}$ a du sens :
- la suite $(|u_n|)$ tend vers $|\ell|$;
- la suite $(u_n + v_n)$ tend vers $\ell + \ell'$;
- pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (λu_n) tend vers $\lambda \ell$;
- la suite $(u_n v_n)$ tend vers $\ell\ell'$;
- si $\ell' \neq 0$, la suite $(\dfrac{u_n}{v_n})$ tend vers $\dfrac{\ell}{\ell'}$

Savoir faire - A savoir compléter

Plus généralement les tableaux suivants, complétés, permettent de connaître les limites des suites $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$, $(\dfrac{1}{u_n})$, $(\dfrac{u_n}{v_n})$ connaissant les limites, éventuellement infinies, des suites (u_n) et (v_n).
ℓ et ℓ' sont des réels.

1. **Limite d'une somme**

(u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
(v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite						

2. **Limite d'un produit**

(u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
(v_n) a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $(u_n v_n)$ a pour limite				

Pour déterminer s'il s'agit de $+\infty$ ou de $-\infty$ on applique la règle des signes.

3. **Limite de l'inverse**

(u_n) a pour limite	$\ell \neq 0$	0 avec $u_n > 0$	0 avec $u_n < 0$	∞
alors $(\dfrac{1}{u_n})$ a pour limite				

4. **Limite d'un quotient**

(u_n) a pour limite	ℓ	0	$\ell \neq 0$	ℓ
(v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0 en restant de signe constant	∞
alors $(\dfrac{u_n}{v_n})$ a pour limite				

(u_n) a pour limite	∞	∞	∞
(v_n) a pour limite	0 en restant	∞	$\ell \neq 0$
alors $(\dfrac{u_n}{v_n})$ a pour limite			

Démonstration

Savoir faire - Gérer ϵ

Il faut bien différencier un « montrer que $\forall\ \epsilon$ » et « exploiter un $\forall\ \epsilon$ ».

1. S'il s'agit de **montrer** que $\forall\ \epsilon > 0\ldots$.
   a. On prend $\epsilon > 0$, fixé et quelconque
   b. et on agit avec lui. . . .
2. S'il s'agit de **exploiter** que $\forall\ \epsilon > 0\ldots$.
   On considère arbitrairement un $\epsilon > 0$, fixé et quelconque, *bien choisi.*

Application - Lemme de Cesaro

Pour aller plus loin - Convergence au sens de Cesaro

Si (u_n) converge vers ℓ, alors $\mathscr{C}(u_n) \to \ell$ également.
Et si (u_n) ne converge pas, comme $u_n = (-1)^n$?
$\mathscr{C}(u_n) = \frac{1}{n+1}[n,\ pair] \to 0.$
Donc si $(-1)^n$ converge, sa limite serait 0 (au sens de Cesaro)

4.4. Extension aux suites à valeurs complexes

Définition - Cas des suites complexes (bornées...)
Soit (u_n) une suite de complexes.
- On dit que la suite (u_n) est bornée si la suite réelle des modules $(|u_n|)$ est majorée.
- Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ si la suite réelle $(|u_n - \ell|)$ converge vers 0. On note $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Définition - Convergence
La suite complexe (u_n) converge vers le complexe ℓ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \epsilon$$

Attention $|u_n - \ell|$ désigne ici le module du complexe $u_n - \ell$.

A partir de cette définition, on voit que bon nombre de résultats subsistent pour les suites complexes :

Proposition - Généralisation
• la limite, lorsqu'elle existe, est unique ;
• si $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$ où (α_n) est une suite réelle qui converge vers 0, alors (u_n) converge vers ℓ ;
• les opérations (somme, produit, inverse, quotient) sur les limites restent valables ;
• toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite ;
• si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors la suite (u_n) converge.

Attention - Relation d'ordre dans $\mathbb{C}$?
En revanche les résultats liés à la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ n'ont plus de sens ici (inégalités).

Savoir faire - Souvent pour l'étude de suites complexes
On peut également, pour étudier une suite complexe, se ramener à deux suites réelles, selon la proposition qui suit...
Et si on veut raisonner pour la convergence par encadrement (vers 0), on note que :

$$|\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n| \qquad \text{et} \qquad |\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|$$

$$|u_n| = \sqrt{|\mathrm{Re}(u_n)|^2 + |\mathrm{Im}(u_n)|^2} \leqslant |\mathrm{Re}(u_n)| + |\mathrm{Im}(u_n)|$$

On notera qu'il s'agit du module de u_n mais de la valeur absolue de $\mathfrak{Re}(u_n)$ ou de $\mathfrak{Im}(u_n)$.

Proposition - Utilisation de deux suites complexes
Soit (u_n) une suite complexe.
(u_n) est convergente (respectivement bornée) si et seulement les suites réelles $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ le sont toutes les deux.
En cas de convergence on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = (\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n)) + i(\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n)).$$

Exercice
Montrer par deux méthodes que la suite complexe $(\overline{u_n})$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge et donner alors une relation entre les limites.

Démonstration

Exercice
Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que la suite géométrique (z^n) est convergente si et seulement si $|z| < 1$ ou $z = 1$.
2. Montrer que la suite (S_n) définie par $S_n = 1 + z + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k$ (on dit que (S_n) est une série géométrique) converge si et seulement si $|z| < 1$ et que la limite vaut alors $\dfrac{1}{1-z}$.

4.5. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Convergence par encadrement

Rappelons le résultat suivant. C'est le plus naturel lorsqu'il faut démontrer la convergence ET donner la limite.

Proposition - Convergence par encadrement (ou gendarme)
Si pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
et pour (u_n) et (w_n) converge vers la même limite ℓ.
Alors (v_n) converge et $\lim(v_n) = \ell$

Proposition - Divergence par minoration
Si pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n$
et pour (u_n) diverge vers $+\infty$.
Alors (v_n) diverge et $\lim(v_n) = +\infty$

Proposition - Divergence par majoration
Si pour tout entier n, $v_n \leqslant w_n$
et pour (w_n) diverge vers $-\infty$.
Alors (v_n) diverge et $\lim(v_n) = -\infty$

Exploitation des suites extraites

Théorème - Convergence par suites extraites totales
Soit (u_n) une suite réelle.
On suppose que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ. Alors (u_n) converge vers ℓ

Pour aller plus loin - Suites extraites totales
On peut démontrer mieux :
(u_n) converge vers ℓ ssi toute suite extraite de (u_n) convergent vers ℓ

Remarque - Si $\ell = \infty$
Le résultat est encore valable pour les suites admettant une limite infinie.

Démonstration

Exercice
On considère une suite réelle (u_n) telle que les suites $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent.
Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Suites monotones

Théorème - Théorème de la limite monotone
Soit (u_n) une suite croissante. On a les deux possibilités suivantes :

1. Si (u_n) est majorée, alors (u_n) est convergente (et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$).
2. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration

Exercice

Démontrer directement le théorème de la limite monotone, avec les coupures de Dedekind

Corollaire - Version décroissante
Soit (u_n) une suite décroissante. On a les deux possibilités suivantes :

1. Si (u_n) est minorée, alors (u_n) est convergente (et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$).
2. Si (u_n) n'est pas minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Suites adjacentes

Définition - Suites adjacentes
Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

— les deux suites sont monotones de sens contraire ;
— la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Pour aller plus loin - Encadrement par les suites $\sup$ ***et*** $\inf$***. Définition de*** $\limsup$ ***et*** $\liminf$

On exploite parfois aussi les suites suivantes associées à (u_n).
$M_n = \sup\{u_k, k \geqslant n\}$. M_n est bien définie si (u_n) majorée.
$m_n = \inf\{u_k, k \geqslant n\}$. M_n est bien définie si (u_n) minorée.
On démontre (M_n) est décroissante et (m_n) est croissante.
Or elles sont bornées, donc convergentes.
On note : $\limsup(u_n) = \lim(M_n)$ et $\liminf(u_n) = \lim(m_n)$.
Il est possible d'extraire de (u_n) des suites qui convergent l'une vers $\limsup(u_n)$ et l'autre vers $\liminf(u_n)$... Ce sont donc des valeurs d'adhérence de la suite.

Théorème - Convergence pour suites adjacentes
Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Démonstration

Exercice

Soit les suites de terme général $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune est un irrationnel.

Savoir faire - Montrer la convergence avec deux sous-suites adjacentes

Il arrive souvent que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) soient adjacentes (dans ce cas il faut le démontrer), on en déduit alors la convergence de (u_n) d'après le critère de convergence par suites extraites totales. C'est le cas :

— si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante et $|f'| < 1$

— si $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ avec $(u_k) \searrow 0$ (critère de Leibniz)...

5. Analyse asymptotique

Dans cette partie, nous donnons un peu des vocabulaire.
La manipulations des suites équivalentes, négligeables... et des développements limités auront lieu plus tard...

5.1. Hiérarchie de suites

Remarque - Autant en emporte···

En terminale, une habitude est de dire qu'« une fonction l'emporte sur une autre ». Sans définition claire, cela n'a pas de sens; par ailleurs nous verrons plus tard, pour les fonctions qu'il est toujours nécessaire au voisinage de quel point. Ici nous nous concentrons sur des suites, le voisinage est toujours $n \to +\infty$.
L'idée est donc d'obtenir une relation d'ordre. Telle suite croit plus vite, vers l'infini, qu'une autre.

Définition et critère d'application

Définition - Suites négligeables
Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).
On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \geqslant N, |u_n| \leqslant \epsilon |v_n|.$$

On note alors $u_n = o(v_n)$ (lu u_n est un petit o de v_n) ou parfois $(u_n) \ll (v_n)$.

Proposition - Comparaison à une constante
Soit (u_n) une suite numérique.

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ u_n = o(\lambda) \text{ ssi } (u_n) \to 0$$

Démonstration

Définition - Suites régulièrement nulles
Soit (u_n) une suite numérique. On note $\mathcal{Z}_u = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n = 0\} = u^{-1}(\{0\})$.

Attention - Cas d'étude

- Si $\mathcal{Z}_u$ est fini, alors (u_n) n'est jamais nulle à partir d'un certain rang. C'est pratique.
  Il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{Z}_u \cap [n_0, +\infty[= \emptyset$.
- Si (u_n) est nulle à partir d'un certain rang. Cela n'est pas intéressant.
  Il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $[\![n_0, +\infty [\![\subset \mathcal{Z}_u$.
  Cela correspond à la situation où le complémentaire de $\mathcal{Z}_u$ est fini.
- Le cas pénible : $\mathcal{Z}_u$ est infini mais pas de la forme contenant $[\![n_0, +\infty [\![$.

- $\mathcal{Z}_u$ et son complémentaire sont infinis

Proposition - Négligeabilité avec la limite
Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$u_n = o(v_n) \Longleftrightarrow \lim_{n\notin\mathcal{Z}_v} \frac{u_n}{v_n} = 0, \text{ et } \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{Z}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{Z}_u$$

Démonstration

On a un critère (savoir-faire) assez simple lorsque (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang.

Savoir faire - $u_n = o(v_n)$ avec la notation des limites
Si v_n est non nulle à partir d'un certain rang, alors on utilise l'une des deux implications suivantes :

$$u_n = o(v_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \longrightarrow 0$$

Relation d'ordre

Proposition - Relation d'ordre strict
$o()$ ou $\ll$ est une relation d'ordre strict sur l'ensemble des suites non (totalement) nulles à partir d'un certain rang : elle est transitive et antiréflexive (pour tout x, on n'a jamais $x\mathcal{R}x$).

Pour aller plus loin - Ordre strict
Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre strict, alors $\overline{\mathcal{R}}$ définie par $x\overline{\mathcal{R}}y$ ssi $x\mathcal{R}y$ ou $x = y$ est une relation d'ordre.
Et réciproquement, étant donnée une relation d'ordre, on peut définit une relation d'ordre strict en supprimant le cas d'égalité

Démonstration

Remarque - Notations
Pour une relation d'ordre, il est peu malin d'exploiter une notation avec un signe d'égalité...
Nous verrons plus loin en quel sens cette notation peut néanmoins être pratique. En attendant, on peut préférer la notation $\ll$.
On peut aussi penser qu'il s'agit d'une relation d'appartenance : $u_n = o(v_n)$ signifie :

$$u_n \in \{(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \frac{a_n}{v_n} \to 0\}$$

Croissance comparée

Il s'agit simplement d'écrire avec la nouvelle notation des résultats déjà connus sur les fonctions de référence.

Proposition - Croissance comparée
Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < p < q$, $a > 1$, on a

$$((\ln n)\beta) \ll (n^\alpha), (n^p) \ll (n^q), (n^\alpha) \ll (a^n), (a^n) \ll (n!)$$

5.2. Suites équivalentes

On cherche à définir ce que pourrait être deux suites égales à l'infini.

Définition et critère d'application

Définition - Suites équivalentes
Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).
On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si $u_n - v_n = o(v_n)$
On note alors $(u_n) \sim (v_n)$ (lu u_n est équivalente à v_n).

Proposition - Equivalence avec la limite
Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$(u_n) \sim (v_n) \Longleftrightarrow \lim_{n \notin \mathcal{Z}_v} \frac{u_n}{v_n} = 1, \text{ et } \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{Z}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{Z}_u$$

Démonstration

Si v_n est constante (différente de 0) et donc jamais nulle

Proposition - Comparaison à une constante
Soit (u_n) une suite numérique.
$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*$ (non nul!), $u_n \sim \lambda$ ssi $(u_n) \to \lambda$

Démonstration

On a un critère (savoir-faire) assez simple lorsque (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang.

Savoir faire - $(u_n) \sim (v_n)$ avec la notation des limites

Si v_n est non nulle à partir d'un certain rang, alors on utilise l'une des deux implications suivantes :

$$(u_n) \sim (v_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \longmapsto 1$$

Relation d'équivalence

Proposition - Relation d'équivalence
$\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites numériques.

Pour aller plus loin - Croissance à la même vitesse
On note parfois $u_n \asymp v_n$ pour signifier que $\frac{u_n}{v_n}$ est bornée.
On dit qu'elles croissent à la même vitesse.
C'est une notion importante dans l'étude asymptotique des suites, même si elle ne figure pas au programme.

Démonstration

Exercice
Refaire la démonstration en exploitant le savoir-faire précédent dans le cas où les suites sont non nulles à partir d'un certain rang.

***Pour aller plus loin - Propriété de* Hardy**
Hardy *a introduit la notion de classe des suites logarithmico-exponentielles que l'on peut définir comme la plus petite famille $\mathscr{L}$ de fonctions qui satisfont les propriétés suivantes :*
- *pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite constante $(\alpha)_n \in \mathscr{L}$.*
- *la suite identité $(n) \in \mathscr{L}$*
- *si (u_n) et $(v_n) \in \mathscr{L}$, alors $(u_n - v_n) \in \mathscr{L}$*
- *si $(u_n) \in \mathscr{L}$ alors $(\exp(u_n))_n \in \mathscr{L}$*
- *si $(u_n) \in \mathscr{L}$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang n_0, alors $(\ln(u_n))_{n \geqslant n_0} \in \mathscr{L}$*

Il démontre alors : si $(u_n), (v_n) \in \mathscr{L}$, alors ou bien $u_n \ll v_n$ ou $v_n \ll u_n$ ou $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \sim A v_n$.
D'une certaine façon la hiérarchie est totale parmi ces suites.

Suites équivalentes

Analyse - Equivalence en action

```
def



    for    in range

        if
```

Heuristique - Objectif premier

Dans de nombreuses situations, trouver un équivalent signifie trouver une expression fermée, analytique notée v_n (dépendant de n) et permettant de remplacer (car très proche) u_n et avantageusement (car plus simple à calculer).

Les résultats suivants sont spectaculaires. Ils ne doivent pas vous détourner de l'objectif principal…

Proposition - Equivalences classiques

On a les comparaisons classiques suivantes :

$n^2 = o(n^3)$ et plus généralement $n^p = o(n^q)$ pour $0 < p < q$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$$

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ formule de Stirling

Démonstration

Exercice

$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$. Nous allons essayer de trouver un équivalent de série, pour avoir des idées pour trouver un équivalent de $n!$.

1. (a) Montrer que $1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - n\ln n - n \leqslant n\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(n+1)$

   (b) En déduire $\ln(n!) \sim n\ln n - n$.

   On peut supposer que $n! = K_n \times n^n \times e^{-n}$, avec $\ln(K_n) = o(n\ln n)$.

   (c) Montrer que la fonction logarithme est concave. Calculer l'équation de la tangente à $y = \ln(x)$ en $x = k$.

   (d) En déduire que pour tout $x \in [k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}]$, $\ln(x) \leqslant \frac{1}{k}(x-k) + \ln k$ (on pourra faire un dessin).

   (e) Montrer alors que $\ln k \leqslant \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t \mathrm{d}t$ (approximation du point milieu).

   Puis que $\ln(n!) \geqslant ln(n^n\sqrt{n}e^{-n}\sqrt{2})$

   (f) On note $u_n = \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$.

   Montrer que (u_n) est décroissante, puis convergente, on note K la limite de (u_n).

   (g) Donner un équivalent de $n!$ exploitant K.

2. Intégrale de Wallis.

   On définie les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$ pour compléter le résultat précédent (i.e. trouver la valeur de la constante).

   (a) Calculer W_0 et W_1.

   (b) Donner relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n.

   (c) En déduire une expression de W_{2n} et de W_{2n+1} en utilisant les factorielles.

   (d) Par ailleurs, montrer que W_n et W_{n+1} sont équivalentes.

   (e) En déduire la formule de Stirling (i.e. la valeur de K), en supposant que $n! \sim Kn^n e^{-n}\sqrt{n}$

Calculer avec des relations d'équivalence

Théorème - Signe d'une suite
Si la suite (u_n) est équivalente à (v_n), alors à partir d'un certain rang, les deux suites sont de même signe (strict).

Démonstration

Attention - Evidemment si (u_n) tend vers $0\ldots$

... et que le signe de (u_n) n'est jamais stabilisé ; on ne peut rien dire

Théorème - Equivalents et limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$;
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$, alors $u_n \sim \ell$.

Démonstration

Attention - Equivalence à 0

Ne pas écrire $u_n \sim 0$, cela n'a pas de sens avec la première définition et avec celle qui suit cela signifie que (u_n) est nulle à partir d'un certain rang (ce qui est bien rare...), usuellement ce genre d'écriture provient d'une somme (ou d'une soustraction) d'équivalents, ce qui n'est pas autorisé. Ne pas confondre $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème - Opérations sur les équivalents

Soient $(u_n), (v_n), (x_n), (y_n)$ quatre suites telles que $u_n \sim x_n$ et $v_n \sim y_n$. Alors

- $u_n v_n \sim x_n y_n$;
- si (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{x_n}{y_n}$;
- si les suites sont à valeurs strictement positives et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $u_n^\alpha \sim x_n^\alpha$.

Exercice

A démontrer.

Heuristique - Recherche des équivalents

Déterminer un équivalent d'une suite consiste à chercher un équivalent écrit comme produit ou quotient de suites de références (n^α, a^n, $(\ln(n))^\beta$, $n!$...) a priori sans somme (dans une somme, l'un des termes est négligeable devant l'autre et s'enlève de l'équivalent) en laissant les constantes multiplicatives (si on les supprime, la limite du quotient ne sera plus 1). Par exemple :

$$2(n^3+n) \sim \qquad ; \quad \frac{\pi}{2n+1} \sim \qquad ; \quad e^{n^3+n+1/n} \sim \qquad ; \quad \ln(3n^5+n+2) \sim \qquad .$$

Exemple - Problème d'addition…

Attention - Ce qui ne marche pas
D'une manière générale, les équivalents ne passent ni aux sommes, ni aux exponentielles, ni aux logarithmes.

Pour aller plus loin - Erreur relative / erreur absolue
Lorsqu'on écrit : $u_n = v_n + o(w_n)$, on parle d'une erreur absolue en $o(w_n)$.
Lorsqu'on écrit : $u_n = v_n(1+o(w_n))$, on parle d'une erreur relative en $o(w_n)$ (absolue en $o(v_n w_n)$).

Savoir faire - Comment faire si on veut additionner des équivalents?
Dans ces cas-là, et dans toute opération un peu compliquée,
on remplace $u_n \sim v_n$ par $u_n = v_n + o(v_n) = v_n(1+\epsilon_n)$ avec $\epsilon_n \to 0$,
comme il s'agit d'égalités (LA VRAIE!), on peut alors faire des opérations.
L'enjeu : que les parties principales de disparaissent pas comparativement à la suite de domination.

5.3. Suites dominées

Mais pour le calcul asymptotique, le notation vraiment pratique est la suivante. C'est avec elle que l'on fera les calculs.

Définition et critère d'application

Histoire - Edmund Landau

Toutes ces notations : o, O et $\sim$ ont été popularisées par Edmund Landau. Edmund Landau (1877-1938) est un mathématicien allemand passionné de théorie des nombres. C'est dans ce cadre de réflexion qui développe ses notations O et o.
Cette approche est finalement assez récente dans l'histoire des mathématiques

Définition - Suite dominée
Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).
On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si
$\exists\, C>0, \exists\, N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall\, n\geqslant N$, $|u_n|\leqslant C|v_n|$.
On note $(u_n) = O\big((v_n)\big)$ qui se lit « u_n est un grand O de v_n ».
On dit aussi parfois que (v_n) est prépondérante à (ou domine) (u_n).

Exemple - Relations avec les notations précédentes

Proposition - Domination avec la limite
Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$(u_n) = O(v_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathcal{Z}_v} \text{ bornée, et } \exists\, N\in\mathbb{N} \mid \mathcal{Z}_v \cap [N,+\infty[\subset \mathcal{Z}_u$$

Exercice
Faire la démonstration

On a un critère (savoir-faire) assez simple lorsque (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang.

Savoir faire - $u_n = O(v_n)$ avec la notation des limites

Si v_n est non nulle à partir d'un certain rang, alors on utilise l'une des deux implications suivantes ($\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$) :

$$(u_n) = O(v_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est bornée}$$

Proposition - Implication sur les limites
Soit (u_n) une suite réelle. On a
$u_n = O(1) \Longleftrightarrow (u_n)$ est bornée

Relation de préordre

Proposition - Relation de préordre
O est une relation de préordre (réflexive et transitive) sur l'ensemble des suites numériques.

Pour aller plus loin - ***Croissance à la même vitesse***
En revanche on a l'équivalence :
$[(u_n) = O\big((v_n)\big)$ *et* $(v_n) = O\big((u_n)\big)]$
$\Longleftrightarrow$
$(u_n) \asymp (v_n)$

Exercice
Faire la démonstration

Remarque - La relation d'équivalence naturelle à associer à $O(\cdot)$
Pour que cela soit une relation d'ordre, il faudrait que l'égalité des suites correspondent à la notation $\asymp$, c'est-à-dire l'égalité des vitesses de croissance, ou au fait que (u_n) et (v_n) soit d'ordre comparable.
Autrement écrit : cela signifie que dans le cadre de l'analyse asymptotique, si la relation d'ordre intéressante est celle de la domination $\big(O()\big)$, alors la relation d'équivalence intéressante est celle de $\asymp$.

Manipuler $O(\cdot)$

Heuristique - Une première formule commentée

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
On a alors $H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$.
Cela signifie que le n-ieme nombre harmonique est égal à $\ln n$ additionné de la constante $\gamma \approx 0{,}577\,215\,664\,9$ d'Euler et d'un terme d'une autre suite, inconnue, mais dont on sait que divisé par $\frac{1}{n}$ (c'est-à-dire multiplié par n) elle reste bornée ou encore une suite que ne dépasse pas un nombre constant de fois $\frac{1}{n}$.

Remarque - Addition, multiplication
Même si on ignore toujours qui est précisément (a_n) caché derrière un $O(v_n)$.
On peut néanmoins faire des calculs avec des O...
Il faut alors se rappeler que $O(v_n)$ n'est pas forcément optimal (par exemple : $n^2 = O(n^{10\,000})$).

Analyse - Que signifie $O(\frac{1}{n}) + O(\frac{1}{n^2})$?

Avant de passer aux théorèmes et démonstrations, deux petites remarques complémentaires :

Truc & Astuce pour le calcul - Pour manipuler une opération avec $O(a_n)$

Lorsque vous rencontrer $O(a_n)$ (avec (a_n) non nulle à partir d'un certain rang), vous pouvez le remplacer par $(u_n) = (a_n \times \epsilon_n)$ avec ϵ_n bornée.

Attention - Rappel : il ne s'agit pas d'une relation d'équivalence

Rappelons que même s'il y a une égalité : il n'y a pas de symétrie.
On a $O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n})$, mais on n'a pas $O(\frac{1}{n}) = O(\frac{1}{n^2})$.
Toute suite dominée par $(\frac{1}{n^2})$ est dominée par $\frac{1}{n}$ mais la réciproque est fausse.
Ce symbole $= O()$ est plutôt à voir comme une relation d'ordre, voir une inclusion d'ensemble.
L'ensemble des suites dominées par $(\frac{1}{n^2})$ est inclus dans l'ensemble des suites dominées par $(\frac{1}{n})$.

Proposition - Opérations entre les relations

Soient $(u_n), (v_n), (w_n), (x_n)$ quatre suites réelles.

- Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$
- Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $w_n = O(u_n) \Leftrightarrow w_n = O(v_n)$.
- Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n + v_n = O(w_n)$.
  Autrement écrit : $O(w_n) + O(w_n) = O(w_n)$
- Si $u_n = O(v_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u_n = O(v_n)$
  Autrement écrit : $\lambda \times O(v_n) = O(v_n)$
- Si les termes u_n et v_n ne s'annulent pas et $u_n = O(v_n)$
  alors $\dfrac{1}{v_n} = O(\dfrac{1}{u_n})$.
- Si $u_n = O(v_n)$ et alors $u_n \times x_n = O(v_n \times x_n)$.
- Si $u_n = O(v_n)$ et $w_n = O(x_n)$ alors $u_n \times w_n = O(v_n \times x_n)$.
- Si les termes u_n et v_n sont > 0 avec $u_n = O(v_n)$, alors pour $\alpha > 0$ on a $u_n^\alpha = O(v_n^\alpha)$.

Les propriétés sont encore vraies en remplaçant les « O » par des « o ».

Démonstration

Proposition - Comparaison logarithmique
Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes strictement positifs telles qu'à partir d'un certain rang on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
Alors $u_n = O(v_n)$.

Corollaire - Demi-critère de D'Alembert
Soit (u_n) est une suite à termes positifs, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1 \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 1 \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Démonstration

6. Bilan

Synthèse

- ⇝ Des phénomènes récurrent conduisent à des suites. Certaines se calculent explicitement : les suites arithmético-géométrique, récurrente d'ordre 2. Et d'autres non.
- ⇝ On cherche alors des expressions approchantes et toujours explicites. Ces expressions se devinent à partir de la fin, donc de la limite. Ainsi, il nous faut réfléchir (beaucoup) à la limite de suites, à l'arithmétique associé, à truc et astuce pour déterminer ces limites.
- ⇝ On est parfois malheureusement contraint d'étudier uniquement des suites extraites.
- ⇝ Tout est maintenant en place pour pouvoir étudier deux familles de suites typiques (en TD-cours) : les suites définies implicitement (à partir d'une équation), ou les suites définies par une relation d'équivalence. Comme ailleurs, cela conduit à de nombreux savoir-faire à apprendre. . .

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Etudier une suite arithmético-géométrique
— Savoir-faire - Etudier une suite récurrente linéaire d'ordre 2
— Savoir-faire - Et s'il y a un second membre ?
— Savoir-faire - Montrer la divergence (deuxième type) d'une suite, par suites extraites
— Savoir-faire - A partir de deux certains rangs
— Savoir-faire - Convergence par encadrement/Divergence par minoration (majoration)
— Savoir-faire - A savoir compléter
— Savoir-faire - Gérer ϵ
— Savoir-faire - Souvent pour l'étude de suites complexes
— Savoir-faire - Montrer la convergence de deux sous-suites adjacentes
— Savoir-faire - $u_n = o(v_n)$ avec la notation des limites.
— Savoir-faire - $u_n \sim (v_n)$ avec la notation des limites.
— Savoir-faire - Comment faire si on veut additionner des équivalents ?
— Savoir-faire - $u_n = O(v_n)$ avec la notation des limites.
— Truc & Astuce pour le calcul - Pour manipuler une opération avec $O(a_n)$

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$(u_n) \to \ell$ (ou $\lim(u_n) = \ell$	u_n converge vers ℓ ou diverge vers $\ell = +\infty$ ou $-\infty$	si $\ell \in \mathbb{R} : \forall\, \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \geqslant N, \lvert u_n - \ell\rvert \leqslant \epsilon$ si $\ell = +\infty : \forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \geqslant N, u_n > A$	On accepte $u_n \to \ell$
$\mathscr{C}(u)$	La transformation de Cesaro de (u_n)	$\forall\, n \in \mathbb{N}, \big(\mathscr{C}(u)\big)_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$	Si $\lim(u_n) = \ell$, alors $\lim(\mathscr{C}(u)) = \ell$

Retour sur les problèmes

78. Cours : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$.
79. Si on savait répondre à ce genre de question, on serait heureux. Mais comme on n'y arrive pas, on cherche des développements limités explicites et exactes (à un certain ordre près).
80. Les théorème de simple existence de limite utilisent les théorème de convergence monotone, suites adjacentes et plus tard Bolzano-Weierstrass. Aussi les comparaisons de séries positives (plus tard)
Les théorème qui donne la limite exploite la convergence par encadrement, ou les suites extraites. Aussi les séries avec télescopage.
81. La formulation qui fusionne les convergences et divergences vers $\pm\infty$ sera étudiée au chapitre suivant.
82. On exploite les suites extraites. Il y a nécessairement une sous-suite qui ne vérifie pas la propriété en question.