Chapitre 19

Questions topologiques interprétées sur $\mathbb{R}$

Résumé -

Nous commençons par définir la notion de voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$ afin de pouvoir offrir (au chapitre suivant) une définition unifié de la notion de limite de fonction.
Nous ouvrons la porte de la topologie à cette occasion. Nous nous contenterons d'une interprétation de ces idées (topologiques) dans $\mathbb{R}$, ce qui rend les choses assez simple : c'est une question d'intervalle, fermé si besoin. Nous reviendrons sur ces notions en fin d'année...

Sommaire

1. Problèmes

? Problème 84 - Extension aux suites de la propriété de la borne supérieure

On sait que toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. Mais comment « prendre » cette borne supérieure, qui par définition existe mais est insaisissable ? Est-ce que les suites peuvent nous aider ?

? Problème 85 - Voisinage

La continuité en un point signifie qu'on peut regarder au-delà (ou en-deça) de ce point mais pas nécessairement trop loin.
Si la notion de voisinage du point conceptualise cette idée, quelle définition formelle faut-il donner au voisinage d'un point ?
Et si ce point était $+\infty$, est-ce très différent d'un nombre $a \in \mathbb{R}$, quelconque ?

? Problème 86 - Pas de trou

Pour définir proprement la continuité de f, il faut qu'il n'y ait pas de trou dans l'ensemble de départ de f...
Comment formaliser/définir les ensembles qui sont en un seul tenant ?

? Problème 87 - Principe de dichotomie

Pour construire $\mathbb{R}$, nous nous sommes inspirés de l'algorithme de dichotomie vu au lycée. On « piège » le nombre cherché entre deux nombres maitrisés, puis on réduit de moitié l'intervalle dans lequel il se trouve.
Comment généraliser ce principe pour étudier directement des problèmes. Nous pensons évidemment à la recherche d'une solution d'une équation (polynomiale ou autre) à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.
Quelle méthode générale peut-on tirer de ce principe ? Que peut-on démontrer à l'aide de ce principe ?

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

Voisinage

Heuristique - Exemple de limite de suites

On a vu que pour les suites il y a deux formalismes différents selon qu'elle converge vers un nombre ℓ ou diverge vers l'infini :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \mid \forall\ n \geqslant N, |u_n - \ell| < \epsilon$$

$$\forall\ A > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \mid \forall\ n \geqslant N, u_n > A$$

- $n \geqslant N$, correspond à l'ensemble des voisinages entiers de $+\infty$,
- $\forall\ A, \cdots > A$ à l'ensemble des voisinages réels de $+\infty$
- $\forall\ \epsilon > 0, |\cdots - \ell| < \epsilon$ à l'ensemble des voisinage de ℓ.

Il est préférable d'unifier en une notation ces différents types de voisinage.

Définition - Voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Soit $a \in \mathbb{R}$.
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de a s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \subset V$.
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $[A, +\infty[\subset V$
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, B] \subset V$
Une propriété est dite vraie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
si elle est vraie sur un voisinage de a.
On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages du point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Exemple - $[2,3] \cup]4,6[$

Remarque - Voisinage avec des ouverts

Dans la définition précédente, nous avons considéré des intervalles fermés ($[a-\epsilon, a+\epsilon]$ ou $[A, +\infty[$).
Les définitions restent vraies (et équivalentes) pour des intervalles ouverts car

$$]a - \frac{1}{2}\epsilon, a + \frac{1}{2}\epsilon[\subset [a-\epsilon, a+\epsilon] \subset]a - 2\epsilon, a + 2\epsilon[$$

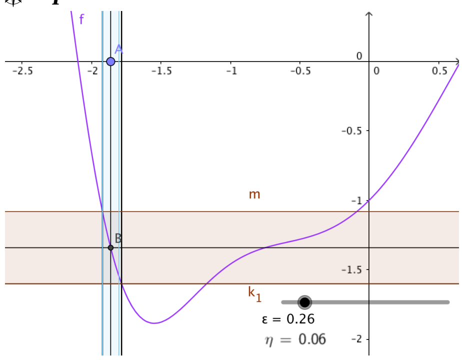
Pour aller plus loin - Halo de a

En analyse non standard (cf. wikipedia), on parle de halo de a pour exprimer la même idée que celle de voisinage et on travaille directement avec...
C'est plus pratique lorsqu'il s'agit d'exploiter des infinitésimaux, comme Newton le faisait.

Proposition - Stabilité de voisinage par intersection

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \{-\infty, +\infty\}$ (i.e. $a \in \overline{\mathbb{R}}$).
- Pour tout voisinage V de a (i.e. $V \in \mathcal{V}_a$), $a \in V$.
- Si $V \in \mathcal{V}_a$ et $V \subset W$, alors $W \in \mathcal{V}_a$.
- L'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a (non vide) :
  $\forall\ V_1, V_2 \in \mathcal{V}_a,\ V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_a$.
- $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_a} = \{a\}$ (borne inférieure...) - *qui n'est pas un voisinage de a.*

Représentation - Illustration



Démonstration

Exercice

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que :
Si $\forall\ V \in \mathcal{V}_{\ell_1}, \ell_2 \in V$ (i.e $V \in \mathcal{V}_{\ell_2}$), alors $\ell_1 = \ell_2$.

2.2. Intérieur, adhérence

Intérieur

Pour nous, le but des définitions qui suivront est de donner le vocabulaire le plus adaptée aux questions qui se poseront pour définir avec précision la continuité (mais aussi la dérivabilité) des fonctions numériques.

Pour aller plus loin - Généralisation des définitions
Ici, on donne des définitions adaptées à ℝ, elles seront généralisés à tout espace normé en fin d'année.
Dans ce cadre là, nous raisonnerons sur les ensembles directement, et non sur les points comme ici.

Définition - Point intérieur à une partie de ℝ
Soit A une partie de ℝ.
On dit que a est un point intérieur de A, si il existe $\epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \subset A$.
Ou encore si A est un voisinage de a. On note alors $a \in \mathring{A}$.
$\mathring{A}$ est l'ensemble des points intérieurs de A.

Exemple - Cas d'un intervalle semi-ouvert

Proposition - Stabilité
Soit A_1, A_2 deux parties de ℝ telles que $A_1 \subset A_2$.
Alors $\mathring{A}_1 \subset \mathring{A}_2$.

Démonstration

Adhérence et point d'accumulation

Définition - Point adhérent à une partie de ℝ
Soit A une partie de ℝ.
On dit que a est un point adhérant de A, si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A \neq \emptyset$.
On note alors $a \in \overline{A}$.
$\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents de A.

Attention - Ne pas confondre...
Point adhérent à une partie et valeur d'adhérence d'une suite.

Exemple - Cas d'un intervalle semi-ouvert

Pour aller plus loin - Ouverts et fermés de ℝ
Globalement, les ensembles ouverts sont les ensembles A qui vérifient $A = \mathring{A}$.
Les ensembles fermés sont les ensembles A qui vérifient $A = \overline{A}$.

Proposition - Stabilité
Soit A_1, A_2 deux parties de ℝ telles que $A_1 \subset A_2$.
Alors $\overline{A_1} \subset \overline{A_2}$.

Démonstration

On a parfois besoin d'une suite convergente vers a, tout en étant différente de a.

Définition - Point d'accumulation
On dit que a est un point d'accumulation de A
si $\forall\, \epsilon > 0$ tel que $\big[[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A\big] \setminus \{a\} \neq \emptyset$.
Autrement écrit a est un point d'accumulation ssi $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$.

Remarque - Points isolés
Comme $\big[[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A\big] \setminus \{a\} \subset \big[[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A\big]$, tout point d'accumulation de A est un point adhérent de A.
Les points adhérents qui ne sont pas d'accumulation sont appelés points isolés.

Exemple - Point d'accumulation de $A = \{0\} \cup [1, 4[$

Exercice

Montrer que si a est un point d'accumulation, alors dans chaque voisinage de a, il existe une infinité de points de A.

Les points adhérents sont les points que l'on peut approcher par des points de A, ou encore pour lesquels la question du calcul de $\lim\limits_{x \to a, x \in A}$ a un sens.
Les points d'accumulation sont les points que l'on peut approcher par des points de $A \setminus \{a\}$, ou encore pour lesquels la question du calcul de $\lim\limits_{x \to a, x \in A, x \neq a}$ a un sens.

Proposition - Suite convergente d'éléments de A
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit $a \in A$
a est adhérent à A si et seulement si il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a = \lim(a_n)$.
Les points adhérents de A sont toutes les limites possibles d'éléments de A.

Démonstration

Complément sur la borne supérieure (inférieure)

Proposition - Borne supérieure
Soit X une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Soit M un majorant de X.
$M \in \overline{X}$ (M est adhérent de X). Plus précisément, c'est le seul majorant adhérent à X : Alors $M = \sup X$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de X qui converge vers M.

Exercice

Donner la caractérisation équivalente pour $m = \inf X$

Démonstration

Densité dans $\mathbb{R}$

Remarque - Rappel de la définition de la densité
On dit qu'une partie X est dense dans $\mathbb{R}$,
si pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $\forall\ \epsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $|a - x| < \epsilon$.
ssi pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $\forall\ \epsilon > 0$, $]a-\epsilon, a+\epsilon[\cap X \neq \emptyset$

Proposition - Densité
Une partie X de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$
ssi $\overline{X} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est égal à l'adhérence de X.)
ssi pour tout a réel il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n) \to a$.

Démonstration

Proposition - Densité des rationnels dans $\mathbb{R}$
La densité des rationnels dans $\mathbb{R}$ permet d'affirmer que :
tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.

Remarque - On a mieux encore...
Mieux encore : tout réel est limite d'une suite décroissante (resp. croissante) de rationnels.
Cette dernière affirmation est laissé en exercice, on peut reprendre le lemme des pics...

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

Le but est donné un nom propre aux ensembles « continues », i.e. sans trou afin d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Définition - Ensemble séparé
Soient A et B, deux parties de $\mathbb{R}$.
On dit A et B sont séparés si $A \cap \overline{B} = \emptyset$ et $\overline{A} \cap B = \emptyset$.
Aucun point de A n'est dans l'adhérence de B, aucun point de B n'est dans l'adhérence de A.

Exemple - Cas de $A =]0,1[$ **et** $B =]1,2]$ **ou** $B = [1,2]$

Définition - Ensemble connexe
Soit E une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que E est connexe, si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux sous-ensembles séparés non vide.

Exemple - Réunion d'intervalle

Exercice
Faire la démonstration de $[0,4]$ est connexe.

La méthode s'adapte à tout intervalle. Ainsi, dans $\mathbb{R}$, tous les intervalles (même ouverts) sont connexes.

Pour aller plus loin - Connexe par arcs
La stratégie classique dans les espaces plus grands que $\mathbb{R}$, pour démontrer qu'un ensemble A est connexe, est de montrer qu'il est « connexe par arcs », i.e. pour tout $a, b \in A$, il existe une application γ (dite chemin) continue de $[0,1]$ dans A tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Savoir faire - Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est connexe
La méthode consiste souvent à faire un raisonnement par l'absurde et à travailler à partir du nombre x_0 qui est obtenu comme borne supérieure d'un ensemble A (à inventer) et élément de B ou bien élément de A et borne inférieure de B.
A partir de ce x_0, trouver une contradiction.

3.2. Intervalle réel

Intervalles

Définition - Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$
Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si il vérifie :
$$\forall\, x < y \in I, \qquad \{t \in \mathbb{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\} \subset I$$
(I est une partie convexe de $\mathbb{R}$).
On notera, ensuite, plus simplement $[x, y]$ l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\}$ dont il est question dans la définition.

Exemple - Ensemble des majorants d'une partie majorée

Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$
Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de la forme (a,b), avec $a<b$ et $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$.
Par notation "(", ")" $\in$ {"[", "]"}.
Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ tel que $]a,b[\subset I\subset[a,b]$.

Démonstration

On a vu que dans $\mathbb{R}$, les intervalles étaient connexes. La réciproque est vraie .

Proposition - Les connexes de $\mathbb{R}$
Si X est un connexe de $\mathbb{R}$, alors X est un intervalle.

Démonstration

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

Heuristique - Donner une borne supérieure à une partie non majorée
Cela correspond à donner une borne supérieure : $+\infty$ à une partie non majorée de $\mathbb{R}$ et une borne inférieure : $-\infty$ à une partie non minorée de $\mathbb{R}$.
Cela permet d'écrire certaines propriétés de manière plus simple en différenciant moins de cas.
Par exemple, le théorème fondamental n'est plus : *toute partie bornée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure*, mais il devient *toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure*

Définition - Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$
On définit : $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ où $-\infty,+\infty\notin\mathbb{R}$
et on prolonge la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant

$$\forall x\in\overline{\mathbb{R}},\ x\leqslant+\infty \text{ et } x\geqslant-\infty.$$

***Pour aller plus loin* - $\overline{R}_+$**
On verra dans le chapitre sur les séries (et d'une certaine façon sur l'intégrale), que l'ensemble $\overline{R}_+=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ est intéressant pour construire certains objets : séries/intégrales.
En effet, pour cet ensemble, toute suite croissante est nécessairement convergente...

Attention - Mais il y a un coût...
Il est difficile d'étendre les opérations $+$ et $\times$ à $\overline{\mathbb{R}}$ sans aboutir à des incohérences;
pour « $0\times+\infty$, $0\times-\infty$ et $(+\infty)+(-\infty)$ ».

Ce que l'on gagne :

Proposition - Existence de la borne supérieure
Dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute partie de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure

Démonstration

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

Segment

Définition - Segment
On appelle segment de $\mathbb{R}$, tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.

Remarque - Listes
Les segments de $\mathbb{R}$ sont exactement les ensembles $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ et $]-\infty,+\infty[$, où $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a\leqslant b$.
En revanche $[a,b[$ n'est pas fermé donc n'est pas un segment.
Et $[a,b]\cup[c,d]$ avec $b<c$ n'est pas non plus un segment

Suite de segments emboités de limite nulle

En exploitant les suites adjacentes réelles :

Proposition - Théorème des segments emboîtés de longueur tendant vers 0
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments emboîtés (i.e. $I_{n+1}\subset I_n$), de longueur tendant vers 0 (i.e. si $I_n=[a_n,b_n]$ alors $b_n-a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).
Alors leur intersection est un singleton :

$$\exists \ell\in\mathbb{R} \mid \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n=\{\ell\}.$$

Démonstration

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

Fonctions d'intervalles

Définition - Fonctions d'intervalles. Sous-additivité

On appelle fonction d'intervalles de (a,b) une application F de l'ensemble des sous-intervalles de (a,b) dans $\mathbb{R}$.
On dit que F est sous-additive sur (a,b) si

$$\forall\ \alpha < \beta < \gamma \in [a,b], \qquad F(\alpha,\gamma) \leqslant F(\alpha,\beta) + F(\beta,\gamma)$$

Histoire - (Frigyes (Frederic) Riesz

Frigyes Riesz (1781-1848) est un mathématicien hongrois à l'origine d'une grande école de mathématiques hongroise (analyse et arithmétique et plus) qui a subit une forme de "dispora" entre les deux guerres mondiales.
Il formalise avec Nagy, la notion de fonctions d'intervalles dans l'ouvrage Leçons d'analyse fonctionnelle.

Exemple - L'intégrale de f

Définition - Fonction paramétrée par une famille de propositions

Soit $(\mathscr{P}_I)_{I\subset[a,b]}$, une famille de propositions sur les sous-intervalles de $[a,b]$.
L'application $f_{\mathscr{P}} : (\alpha,\beta) \mapsto [\mathscr{P}_{[\alpha,\beta]}] = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathscr{P}_{[\alpha,\beta]} \text{ vraie} \\ 0 & \text{si } \mathscr{P}_{[\alpha,\beta]} \text{ fausse} \end{cases}$ est une fonction d'intervalles.

Savoir faire - Sous-additivité pour un fonction d'intervalle définie par une propriété

Dans ce cas, on doit vérifier :

$$\forall\ \alpha,\beta,\gamma \in [a,b], \qquad f_{\mathscr{P}}(\alpha,\gamma) \leqslant f_{\mathscr{P}}(\alpha,\beta) + f_{\mathscr{P}}(\beta,\gamma)$$

Or $f_{\mathscr{P}}$ est à valeurs dans $\{0,1\}$. Donc la sous-additivité est équivalente au fait que

$$f_{\mathscr{P}}(\alpha,\beta) = f_{\mathscr{P}}(\beta,\gamma) = 0 \Longrightarrow f_{\mathscr{P}}(\alpha,\gamma) = 0$$

Principe de Dichotomie

Le principe suivant nous sera utile plusieurs fois par la suite, toujours à propos de résultats très fins sur $\mathbb{R}$ (Bolzano-Weierstrass, Cousin, valeurs intermédiaires...)

Pour aller plus loin - Récurrence

Il s'agit d'une sorte de raisonnement en descente infinie (donc non constructive...) basée sur une partie (fermé et bornée) de $\mathbb{R}$ et non sur $\mathbb{N}$ entier

Proposition - Processus de dichotomie

Soit $[a,b]$ un segment (intervalle fermé et borné) de $\mathbb{R}$.
Soit $(\mathscr{P}_I)$, une famille de propositions définie sur l'ensemble des sous-segments de $[a,b]$.
Supposons que $f_{\mathscr{P}}$ la fonction d'intervalles paramétrée par $(\mathscr{P}_I)$ est sous-additive.
Si $f_{\mathscr{P}}(a,b) = 1$, il existe (a_n), (b_n) adjacentes dans $[a,b]$ (ou une suite de segments $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ emboités de longueur tendant vers 0) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{\mathscr{P}}(a_n,b_n) = 1$.

Remarque - Simplification des notations

Souvent $\mathscr{P}$ n'apparaitra pas dans la notation. Voyons en action ce principe, même si les objets suivants ne sont pas encore bien définis.
La structure d'application est proche de celle de la récurrence ou plutôt de la méthode de la descente infinie de FERMAT.

Application - Anticipation : TVI

Démonstration

Remarque - Longueur de I_n

On peut même affirmer, avec la même démonstration, que $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.
Analysez bien les deux types d'applications du processus de dichotomie du savoir-faire. Dans quel cas se trouve l'application qui conduit au TVI ?

Savoir faire - Comment exploiter le « processus de dichotomie ».

De manière générale, on exploite le processus de dichotomie de deux façons :

— Pour mettre en avant un objet x qui vérifie une propriété particulière. On le construit en tant que limite des suites adjacentes qui émergent. On suit un mouvement descendant.
(C'est le cas de la démonstration du théorème de BOLZANO-WEIERSTRASSS).

— Pour montrer une propriété vraie sur un intervalle compact (global). On le couple à un raisonnement par l'absurde. On suit un mouvement ascendant.
(C'est le cas de la démonstration du lemme de COUSIN).

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass
De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

On a le corollaire (équivalent) :

Corollaire - Suite de points d'un segment
Soit (u_n) une suite de points du segment $[a,b]$. Alors il existe une suite extraite convergente.

Pour aller plus loin - Propriété de compacité
Un ensemble est compact, s'il est complet et précompact, c'est-à-dire ***fini à ϵ-près****.*
Une autre définition possible pour la compacité est celle de pouvoir vérifier le critère de Bolzano-Weierstrass...
Tout segment de $\mathbb{R}$ est compact (donc fini à ϵ-près - nous en reparlerons avec le lemme de Cousin).
Nous prendrons une définition générale en fin d'année lorsqu'on étudiera la topologie sur $\mathbb{R}^2$ voire $\mathbb{R}^n$. Il faudra alors généraliser ce que l'on voir ici...

Démonstration

On pourrait également exploiter le lemme des pics. Mais il est hors-programme, il faut donc d'abord commencer par le (re)démontrer.

Histoire - Bernard Bolzano

Bernard Bolzano (1781-1848) est un prêtre mathématicien tchèque.
Il formalise, seul, les notions de continuité en analyse. Ses oeuvres ont été découvertes à la fin de sa vie.

Savoir faire - Suite-extraite dans N_k
Dans la démonstration, on a exploité une idée intéressante à savoir reformaliser.
S'il existe une suite (N_k) de sous-ensembles de $\mathbb{N}$, tel que pour tout k, N_k est infinie.
Alors, il existe une suite (v_k) strictement croissante telles que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $v_k \in N_k$.
Il suffit de prendre $v_{k+1} := \min(N_{k+1} \cap [\![v_k+1, +\infty [\![)$.

Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass
De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Pour la démonstration, on exploite le critère précédent.
La subtilité : il y a deux suites extraites, a priori.

Démonstration

4.4. Lemme de Cousin

Heuristique - Pourquoi le lemme de Cousin?

Le lemme de Cousin est une formulation particulièrement efficace des propriétés de compacité de $\mathbb{R}$.
Bien qu'il ne soit pas au programme officiel de la MPSI (ni de la MP), il figure dans ce cours car

- Il est vrai
- Il est commode. Nous l'exploiterons à quelques reprises dans le prochain chapitre de cours
- Il est nécessaire à la construction d'une intégrale robuste sur $\mathbb{R}$: l'intégrale de Kurzweil-Henstock que nous construirons au deuxième semestre.

Cela commence par deux définitions.

Définition - Subdivision pointée

Soit $I = [a, b]$, un segment de $\mathbb{R}$.
On appelle subdivision pointée de I la donnée

- d'une subdivision (finie!) $\sigma = (x_0, x_1, \dots x_n)$ de $[a, b]$,
  $\forall\ i \in \mathbb{N}_{n-2},\ a = x_0 \leqslant x_i \leqslant x_{i+1} \leqslant x_n = b$
- un pointage de cette subdivision $t_1, t_2, \dots t_n \in I$ tels que
  $\forall\ i \in \mathbb{N}_n,\ t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

On la notera $\sigma_p = \{([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$, on appelera les (t_i) les points de marquage de σ_p.

Définition - Subdivision pointée adaptée à un jauge

Un pas ou une jauge est une application $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$.
Une subdvision $\sigma_p = \{([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$ est dite adaptée au pas δ ou δ-fine, si

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n, \qquad [x_{k-1}, x_k] \subset \left[t_k - \frac{\delta(t_k)}{2}, t_k + \frac{\delta(t_k)}{2}\right]$$

On remarquera que $0 \leqslant x_k - x_{k-1} \leqslant \delta(t_k)$

Histoire - Pierre Cousin

Pierre Cousin (1867-1933) est un mathématicien français.
Peu (re)connu, cet élève d'Henri Poincaré a pourtant eu des intuitions prémonitoires concernant le théorèmes de Borel et Lebesgue. Sa vie reste un mystère (pas de iconographie reconnue, par exemple)

Attention - Strictement positif

Il est important que $\delta(\cdot) > 0$, comme on va le voir dans la démonstration du lemme de Cousin.
Par contre, il n'est pas nécessaire que δ soit continue

Remarque - Compacité

On voit bien sur ces définitions l'importance de voir I, comme une réunion finie de sous-ensemble défini à un pas (variable) près

Théorème - Lemme de Cousin

Pour tout δ, jauge sur $[a, b]$, il existe une subdivision pointée
$\sigma_p = \{([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$, adaptée à δ (δ-fine)

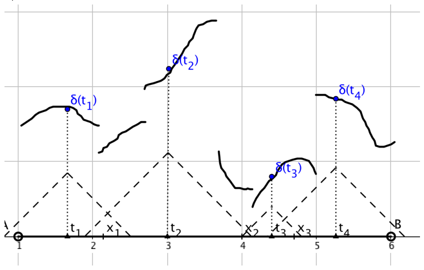
Remarque - Une question de recouvrement

Etant donné δ, l'existence d'une subdivision pointée δ-fine signifie que $[a,b]$ est recouvert par deux réunions finies :

— $[a,b] = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_n} [x_{i-1}, x_i]$, réunion disjointe (aux extrémités près)

— $[a,b] \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}_n} \left[t_i - \dfrac{\delta(t_i)}{2}, t_i + \dfrac{\delta(t_i)}{2}\right]$, réunion débordante mais bien résumée par δ en un nombre fini de points.

***Représentation - Lemme de* COUSIN**



Exercice

Formaliser le lemme de COUSIN

Démonstration

***Pour aller plus loin - Théorème de* HEINE**

Une application classique du lemme de COUSIN *est la démonstration du théorème de* HEINE.

Nous verrons également le théorème de HEINE-BOREL *(ou Borel-Lebesgue) en exercice.*

C'est dans ce même esprit que ce lemme est exploité pour construire l'intégrale de KURZWEIL-HENSTOCK...

Savoir faire - Exploiter le lemme de Cousin

Il y a deux façons d'exploiter le lemme de Cousin.

• On peut exploiter le lemme de Cousin par l'absurde.

On doit vérifier une certaine propriété $\mathscr{P}$.

On démontre alors que sa contradiction conduit à l'existence d'une jauge δ sur un segment fermé qui n'admet pas de subdivision δ-fine, ou une contradiction sur la finitude de la subdivision.

Trouver δ n'est pas toujours évident. (On a une application de cette méthode plus bas).

• Une jauge δ est naturellement donnée (exemple, la jauge de continuité).

Alors l'utilisation du lemme de Cousin conduit à couper l'intervalle en un nombre **fini** d'intervalles dont on maitrise le « centre » (t_i).

Il reste ensuite à considérer un max et non un sup. (On applique cette méthode pour démontrer le théorème de Heine).

Exemple - Nouvelle démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

Heuristique - Mise en place du concept

La difficulté avec les suites, c'est que pour démontrer leur convergence, on doit connaître la limite (la définition nécessite le calcul $|u_n - \ell|$).
Que peut-on dire si la suite ne « bouge » plus, visiblement après un certain nombre de calculs ? CAUCHY propose de s'intéresser à ces suites là en particulier (on les appelle suite de CAUCHY). Sont-elles nécessairement convergentes ? famille de suites
Autre définition avec u_N au lieu de u_q, plus naturelle. Puis équivalence des deux défintions.
Interprétation avec $\epsilon = 10^{-k}$

Définition - Suites de CAUCHY
On dit que la suite (u_n) vérifie le critère de CAUCHY si elle verifie l'un des deux critères suivants équivalents :

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall\, p \geqslant n_0, |u_p - u_{n_0}| < \epsilon$$

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, p, q \geqslant N, |u_p - u_q| < \epsilon$$

Pour aller plus loin - Notion hors-programme
... mais elle est vraie et elle est essentielle en mathématiques.
On dit qu'un ensemble (espace) E qui vérifie le principe suivant :
toute suite de E est convergente ssi elle est de Cauchy est un espace complet.
On va voir que $\mathbb{R}$ est complet

Montrons que les deux critères sont équivalents.

Démonstration

Application - Suite, écrite décimalement

Pour aller plus loin - Construction de $\mathbb{R}$
La stratégie de Cauchy pour construire $\mathbb{R}$, formalisée par CANTOR, consiste à dire que $\mathbb{R}$ est l'ensemble obtenu à partir de $\mathbb{Q}$ et des limites des suites rationnelles vérifiant le critère de CAUCHY.
Nous avons choisi une technique plus proche de la méthode historique de BOLZANO.
Une troisième stratégie consiste à définir puis exploiter les coupures de DEDEKIND.
Une quatrième stratégie est d'étudier les développements décimaux...

5.2. ℝ est complet

L'idée de CAUCHY est de trouver un critère de suite convergente sans avoir à connaître la limite.

Proposition - Condition nécessaire
Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente, alors elle vérifie le critère de Cauchy

Démonstration

Proposition - Condition suffisante
Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy, alors elle est convergente.

Pour aller plus loin - Ensemble complet
Un ensemble dont les suites de Cauchy sont nécessairement convergentes s'appelle un espace complet.

La démonstration de la proposition est faite dans l'exercice suivant
Exercice

1. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2. Montrer que toute suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente, converge vers cette même limite.
3. Conclure, en exploitant le théorème de Bolzano-Weiertrass.

6. Bilan

Synthèse

- ⇝ Nous abordons beaucoup de définition importante ici pour comprendre les passages à la limite dans ℝ : voisinage, puis intérieur ou adhérence.
- ⇝ On retrouve ensuite la notion de connexe : ensemble en un seul tenant. Dans ℝ, il s'agit des intervalles. Cela nous donnera une bonne base pour le TVI.
- ⇝ On parle ensuite des compacts : ensemble que l'on peut découper en un nombre fini de morceaux suffisamment grand (et choisi a priori). Dans ℝ, il s'agit des fermés bornés, donc en particulier des segments (=intervalle, fermé et borné).
- ⇝ Par curiosité, nous parlons ici de la notion de complétude qui permet d'assurer l'existence d'une limite d'une suite (ou de tout autre) car un critère qui ne nécessite pas de connaître a priori cette valeur de limite.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Montrer qu'une partie de ℝ est conenxe
— Savoir-faire - Sous-additivité pour une fonction d'intervalle définie par une propriété
— Savoir-faire - Comment exploiter le « processus de dichotomie »
— Savoir-faire - Suite extraire dans N_k
— Savoir-faire - Exploiter le lemme de Cousin

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\overline{\mathbb{R}}$	Droite réelle achevée	$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$	C'est l'adhérence de $\mathbb{R}$. Le théorème de borne supérieure est toujours vrai.
$\mathcal{V}_a$	Ensemble des voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$	Si $a = +\infty$. $V \in \mathcal{V}_a$ si $\exists\, A \in \mathbb{R}$ tel que $[A, +\infty[\subset V$ Si $a \in \mathbb{R}$. $V \in \mathcal{V}_a$ si $\exists\, \epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \subset V$	
$\mathring{A}$	Intérieur de l'ensemble A	$\{a \in I \mid \exists\, \epsilon > 0 \mid [a-\epsilon, a+\epsilon] \subset A\}$	
$\overline{A}$	Adhérence de l'ensemble A	$\{a \in I \mid \forall\, \epsilon > 0 \mid]a-\epsilon, a+\epsilon[\cap A \neq \emptyset$	Si $a \in \overline{A}$, il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $(u_n) \to a$.
$\sigma_p = ([x_{i-1}, x_i], t_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$	Subdivision pointée du segment $I = [x_0, x_n]$	$\forall\, i \in \mathbb{N}_n,\ x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$	Elle est δ-fine si en plus : $\forall\, i \in \mathbb{N}_n$, $t_i - \frac{\delta(t_i)}{2} \leqslant x_{i-1} \leqslant x_i \leqslant t_i + \frac{\delta(t_i)}{2}$

Retour sur les problèmes

83. Voir cours
84. Voir définition de voisinage.
85. Voir définition de connexité.
86. Voir cours