

# Chapitre 20

## Continuité

### Résumé -

Nous formalisons ici la notion de continuité. Suivant Bolzano puis Weierstrass qui au XIX<sup>e</sup> siècle ont défini proprement la continuité, il est nécessaire de suivre l'ordre suivant : 1. notion de limite de fonction ; 2. notion de continuité en un point ; 3. notion de continuité sur un intervalle.

Nous verrons qu'en considérant  $f$  continue globalement sur son ensemble de définition (intervalle voire segment), nous obtenons des résultats importants d'existence (théorèmes des valeurs intermédiaires, de Weierstrass, de Heine).

Le chapitre se termine par l'extension aux fonctions à valeurs complexes.

Des liens youtube :

- Jaicompris Maths - fonctions continues : comprendre la définition - le cours et les propriétés. <https://www.youtube.com/watch?v=uuw1DYw49h4>
- Maths Adulte - Théorème des valeurs intermédiaires et applications. <https://www.youtube.com/watch?v=xgENfRQvPrA>
- Bibmaths.net - Théorème de Bolzano-Weierstrass. [https://www.youtube.com/watch?v=5WqLT\\_J8T4s](https://www.youtube.com/watch?v=5WqLT_J8T4s)

### Sommaire

<b>1. Problèmes</b>	<b>380</b>
<b>2. Limites (de fonctions)</b>	<b>380</b>
2.1. Définitions	380
2.2. Ordre et limites	384
2.3. Opérations sur les limites	385
2.4. Cas des fonctions monotones	387
2.5. Continuité en un point	388
<b>3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)</b>	<b>389</b>
3.1. Fonctions continues sur $I$	389
3.2. Prolongement par continuité	391
3.3. Théorème des valeurs intermédiaires	392
3.4. Cas de l'image d'un segment par $f$ continue	392
3.5. Théorème de la bijection (bis)	395
3.6. Continuité uniforme	396
<b>4. Généralisation aux fonctions à valeurs dans <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>398</b>
4.1. Opérations classiques sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$	398
4.2. Fonctions bornées	398
4.3. Limites	399
4.4. Opérations sur les limites	400
4.5. Continuité	400
<b>5. Bilan</b>	<b>401</b>

## 1. Problèmes

### ? Problème 88 - Limite. Propriété algébrique.

Un célèbre ouvrage de mathématique (L'analyse au fil de l'histoire) commence par la citation : « *Qu'est-ce qu'une dérivée? une limite. Qu'est-ce qu'une intégrale? Une limite. Qu'est-ce qu'une limite? Un nombre* »

La notion de limite (on pourrait ajouter de borne supérieure) est au coeur de l'analyse mathématique réelle ou complexe.

Que peut-on faire avec les limites? En particulier quelles sont les propriétés algébriques du passage à la limite (passage à la limite d'une combinaison linéaire, par exemple)?

De cette réponse découlera beaucoup de propriétés d'analyse.

### ? Problème 89 - Qu'est-ce qu'une fonction continue ?

Le théorème des valeurs intermédiaires dont on parle au problème précédent, s'appuie sur l'hypothèse essentielle de continuité.

Mais qu'est-ce qu'une fonction continue? Si l'on visualise bien la réponse : une fonction que l'on trace « sans lever le crayon », cette réponse ne semble pas passer les canons des définitions mathématiques en MPSI. On aimerait également une réponse que ne soit pas vraiment associé à une représentation graphique.

Comment formaliser la définition de la continuité d'une fonction ?

### ? Problème 90 - Fonction nulle part continue.

| Existe-t-il des fonctions définies en tout point, mais continue nulle part ?

### ? Problème 91 - Image d'un intervalle par une fonction continue ?

| Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  continue sur  $I$ .

Que peut-on dire de  $f(I)$ ? En particulier, est-il borné?

Si  $f(I)$  est bornée, alors  $\sup(f(I))$  existe. A-t-on nécessairement :  $\exists x_0 \in I$  tel que  $f(x_0) = \sup f(I)$ ?

| Faut-il ajouter des conditions nécessaires, suffisantes supplémentaires?

### ? Problème 92 - Continuité prolongée

| Qu'est-ce que la continuité pour des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ ?

## 2. Limites (de fonctions)

Par la suite  $I$  est toujours un intervalle.

### 2.1. Définitions

#### Limite

**Définition - Limite**

Soient  $f$  une fonction définie sur  $I \subset \mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $a$  un élément d'accumulation ou adhérent de  $I$ .

On dit que  $f$  tend vers  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  quand  $x$  tend vers  $a$  si :

$$\forall W \in \mathcal{V}_\ell, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid f(I \cap V) \subset W$$

ou de manière équivalente :

$$\forall W \in \mathcal{V}_\ell, f^{-1}(W) := \{x \in I \mid f(x) \in W\} \in \mathcal{V}_a$$

On note  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ .

L'avantage : on a créé une définition unifiée. Mais on peut la voir en 9 parties.

**STOP Remarque - Rappel sur les images réciproques**

On note en réalité  $f^{-1}(W)$  l'ensemble  $\{x \in I \mid f(x) \in W\}$ .

On peut aussi trouver la notation vue pour les variables aléatoires :  $[f \in W]$

ou  $[f = a] = \{x \in E \mid f(x) = a\} = f^{-1}(\{a\})$ .

On a alors presque trivialement :  $f(f^{-1}(B)) = f(\{x \in I \mid f(x) \in B\}) \subset B$  et  $B \subset [f \in B] = f^{-1}(B)$ .

**🔍 Analyse - Pourquoi ces deux définitions sont équivalentes?****🔍 Pour aller plus loin - Point d'adhérent ou d'accumulation**

Un point isolé, donc adhérent, ne serait pas un bon candidat pour regarder la limite (on aurait  $f^{-1}(W) = \{a\} \notin \mathcal{V}_a$ ).

Mais comme ici, on se situe dans un intervalle, il n'y a pas de point isolé et on ne peut pas différencier les points adhérents de points d'accumulation.

**🍃 Exemple -  $x \mapsto x \ln x$** **⚠️ Attention - L'importance de l'intervalle de définition**

Notons que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$  n'est pas continue en 0.

En revanche,  $f_1 : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$  est continue en 0. Puisqu'ici, par définition de  $I$ , la limite de  $f$  en 0, impose de regarder  $x \rightarrow 0^-$ .

Ainsi si une fonction  $f$  n'est pas définie sur un intervalle (mais une réunion, par exemple), il faudrait préciser la continuité selon quel intervalle. On pourrait écrire ici que  $f$  est continue en 0, selon (l'intervalle)  $\mathbb{R}_-$ .

**Attention à l'ordre des quantificateurs**

**Remarque - Ordre et quantificateurs**

On souligne l'ordre des objets et les quantificateurs associés :

1.  $\forall$  associé au voisinage image
2.  $\exists$  associé au voisinage des antécédents (et qui dépend donc du voisinage image fixé en 1.).

**Remarque - Selon la nature de  $a$  et de  $\ell$**

Cette définition recouvre en fait plusieurs définitions suivant que  $a$  ou  $\ell$  sont réels ou infinis.

•  $a \in \mathbb{R}, \ell \in \mathbb{R} : f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

•  $a \in \mathbb{R}, \ell = +\infty : f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$  si

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A$$

•  $a \in \mathbb{R}, \ell = -\infty : f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$  si

$$\forall A < 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq A$$

•  $a = +\infty, \ell \in \mathbb{R} : f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

•  $a = +\infty, \ell = +\infty : f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  si

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$$

•  $a = +\infty, \ell = -\infty : f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$  si

$$\forall A < 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \leq A$$

On peut le résumer en un tableau (à compléter)

	$\ell = -\infty$ $\forall A < 0 \dots f(x) < A$	$\ell \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0 \dots  f(x) - \ell  < \varepsilon$	$\ell = +\infty$ $\forall A > 0 \dots f(x) > A$
$a = -\infty$ $\dots \exists B < 0$ tq $x < B \Rightarrow \dots$			
$a \in \mathbb{R}$ $\dots \exists \eta > 0$ tq $ x - a  < \eta \Rightarrow \dots$			
$a = +\infty$ $\dots \exists B > 0$ tq $x > B \Rightarrow \dots$			

**Remarque - Inégalités larges ou strictes**

Selon une remarque précédente, les inégalités larges dans les définitions peuvent être remplacées par des inégalités strictes et les voisinages fermés par des voisinages ouverts.

**Unicité**

La seconde partie de la définition est plus efficace, mais elle cache le rôle joué par l'ensemble  $I$  de définition de  $f$ . Pour la démonstration du théorème qui suit, on exploitera plutôt la première définition.

**Théorème - Unicité**

Si  $f$  admet une limite en  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , celle-ci est unique.

Lorsque  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  ( $(a, \ell) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ ), cette proposition permet donc de parler de « la » limite de  $f$  en  $a$  et de noter  $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Cette limite peut être à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Démonstration****Proposition - Limite finie donc bornée**

Toute fonction admettant une limite finie en  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  est bornée sur un voisinage de  $a$ .

**Démonstration****Limite à droite, limite à gauche****Définition - Limite à gauche, à droite**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

- On suppose que  $a \in \mathbb{R}$  n'est pas la borne inférieure de  $I$ . On dit que  $f$  admet  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  pour limite à gauche si la fonction  $f|_{I \cap ]-\infty, a[}$  admet  $\ell$  pour limite en  $a$ , c'est-à-dire :

$$(\text{cas } \ell = -\infty) : \forall A < 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in I, a - \eta \leq x < a \Rightarrow f(x) < A$$

$$(\text{cas } \ell \in \mathbb{R}) : \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in I, a - \eta \leq x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon.$$

$$(\text{cas } \ell = +\infty) : \forall A > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in I, a - \eta \leq x < a \Rightarrow f(x) > A$$

On note  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x < a} \ell$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \ell$ .

- On suppose que  $a \in \mathbb{R}$  n'est pas la borne supérieure de  $I$ . On dit que  $f$  admet  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  pour limite à droite si la fonction  $f|_{I \cap ]a, +\infty[}$  admet  $\ell$  pour limite en  $a$ , c'est-à-dire

$$(\text{cas } \ell = -\infty) : \forall A < 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in I, a \leq x < a + \eta \Rightarrow f(x) < A$$

$$(\text{cas } \ell \in \mathbb{R}) : \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in I, a < x \leq a + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon$$

$$(\text{cas } \ell = +\infty) : \forall A > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in I, a \leq x < a + \eta \Rightarrow f(x) > A$$

On note  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x > a} \ell$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$ .

**Proposition - Limite et limite à gauche et droite**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

Si  $a$  n'est pas une extrémité de  $I$ ,  $f$  admet  $\ell$  pour limite en  $a$  si et seulement

si  $f$  admet  $\ell$  pour limite à gauche et à droite en  $a$  et si  $f(a) = \ell$ .

Si  $a$  est une extrémité de  $I$ , on a le même résultat en supprimant *limite à gauche* si  $a$  est l'extrémité gauche ou *limite à droite* si  $a$  est l'extrémité droite.

### Caractérisation à l'aide de suites

#### Théorème - Caractérisation séquentielle

Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  et  $a \in \bar{\mathbb{R}}$  un point ou une extrémité de  $I$ . Soit  $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  si et seulement si pour toute suite réelle  $(u_n)$  de points de  $I$  ayant pour limite  $a$ , la suite  $(f(u_n))$  a pour limite  $\ell$ .

#### Remarque - Convergence de suites et voisinage

On a  $(u_n)$  converge vers  $\ell$

ssi  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n > N, |u_n - \ell| < \epsilon$ .

ssi  $\forall W \in \mathcal{V}_\ell$ , il existe  $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N} \cap V, u_n \in W$ .

#### Démonstration

#### Exercice

Prouver que la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$  n'a pas de limite en 0.

De même on prouverait que les fonctions  $\sin$  ou  $\cos$  n'ont pas de limite en  $+\infty$ .

## 2.2. Ordre et limites

#### Théorème - Passage à la limite dans les inégalités

Soient  $f, g$  deux fonctions définies sur  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a \in \bar{I}$ .

On suppose que sur un voisinage  $V$  de  $a$  on a  $f(x) \leq g(x)$  et que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$ . Alors  $\ell \leq \ell'$ .

#### Démonstration

Exercice

Refaire la démonstration en exploitant le théorème sur les suites.

**Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit « des gendarmes' »**

Soient  $f, g, h$  trois fonctions définies sur un voisinage  $V$  de  $a \in \bar{I}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ .  
On suppose que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$  et que  $\forall x \in V, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ .  
Alors le fonction  $g$  admet une limite en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ .

**Démonstration**

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

**Théorème - Divergence vers  $+\infty$  par minoration (resp.  $-\infty$  par majoration)**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définie sur un voisinage  $V$  de  $a \in \bar{I}$  telles que  $\forall x \in V, f(x) \leq g(x)$ . Alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \implies g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$$

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$$

**Démonstration****2.3. Opérations sur les limites****Lemme -**

Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$  et  $g$  bornée, au voisinage de  $a \in \bar{I}$ ,  
alors  $(f \times g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

**Démonstration**

**Théorème - Opération sur les limites**

On suppose que  $f$  et  $g$  ont des limites respectives  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$  en  $a \in \overline{I}$ .

Alors :

- $|f|$  a une limite en  $a$  qui est  $|\ell|$ ;
- lorsque  $\lambda \ell$  n'est pas une forme indéterminée,  $\lambda f$  a une limite qui est  $\lambda \ell$ ;
- lorsque  $\ell + \ell'$  n'est pas une forme indéterminée,  $f + g$  a une limite qui est  $\ell + \ell'$ ;
- lorsque  $\ell \ell'$  n'est pas une forme indéterminée,  $fg$  a une limite qui est  $\ell \ell'$ ;
- si  $\ell' \neq 0$ , il existe un voisinage de  $a$  sur lequel  $g$  ne s'annule pas et la restriction de  $\frac{1}{g}$  à ce voisinage a une limite en  $a$  qui est  $\frac{1}{\ell'}$ .

**Démonstration**



**Exercice**

Montrer que si  $g \rightarrow 0$ , alors  $|\frac{1}{g}| \rightarrow +\infty$ .

Si on maîtrise le signe de  $\frac{1}{g}$  (constant au voisinage de  $a$ ), on peut trouver  $\lim \frac{1}{g}$ .

**Théorème - Composition des limites**

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ,  $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ ,  $f(I) \subset J$ . Soit  $a \in \bar{I}$  (élément ou extrémité de  $I$ ). On suppose que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$  et que  $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \ell$ . Alors

$$g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

**Démonstration**

On voit ici l'idée principale de la définition des limites de fonctions : penser en application réciproque (de l'arrivée vers le départ)

**2.4. Cas des fonctions monotones**

Dans le cas des fonctions monotones, on obtient un résultat sur l'existence des limites similaires à celui obtenu pour les suites monotones.

**Théorème - Théorème de la limite monotone**

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  et  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone.

- si  $f$  est croissante majorée, alors  $f$  admet une limite finie en  $b$  égale à  $\sup\{f(x), x \in ]a, b[ \}$ ;
- si  $f$  est croissante non majorée, alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$ ;
- si  $f$  est croissante minorée, alors  $f$  admet une limite finie en  $a$  égale à  $\inf\{f(x), x \in ]a, b[ \}$ ;
- si  $f$  est croissante non minorée, alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$ ;
- de même :
- si  $f$  est décroissante minorée, alors  $f$  admet une limite finie en  $b$  égale à  $\inf\{f(x), x \in ]a, b[ \}$ ;
- si  $f$  est décroissante non minorée, alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} -\infty$ ;
- si  $f$  est décroissante majorée, alors  $f$  admet une limite finie en  $a$  égale à  $\sup\{f(x), x \in ]a, b[ \}$ ;
- si  $f$  est décroissante non majorée, alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ .

**Démonstration**

**Théorème - Limite monotone en tous points**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monotone. Alors  $f$  admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de  $I$  qui n'est pas une extrémité de  $I$ . Si  $f$  est croissante on a

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

**Démonstration****Exercice**

Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  croissante. On suppose de plus que  $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

Montrer que  $f$  admet une limite en tout point.

**2.5. Continuité en un point****Continuité (en un point)****Définition - Continuité en un point  $x_0$** 

Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

Soit  $x_0 \in I$ . On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$  ce qui peut aussi s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

**Remarque - Lien avec les limites**

D'après ce que l'on a vu précédemment,  $f$  est continue en  $x_0 \in I$  si et seulement si elle admet une limite finie en  $x_0$  (égale à  $f(x_0)$ ).

**Remarque - Continuité à gauche, à droite**

On peut également définir la continuité à gauche, ou à droite en  $x_0$ .

**Discontinuité(s)****Histoire - Continuité au XIX**

Cauchy introduit en 1821 le concept de fonction continue, en exigeant que des variations indéfiniment petites de  $x$  produisent des variations indéfiniment petites de  $y$ .

Bolzano (1817) et Weierstrass (1874) furent plus précis : la différence  $f(x) - f(x_0)$  peut être arbitrairement petite, à condition que la différence  $x - x_0$  soit suffisamment petite

**Définition - Discontinuité de deux types**

On dit qu'une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I$  possède en un point  $a \in \overset{\circ}{I}$  une discontinuité de première espèce ou une discontinuité simple si  $f$  est discontinue en ce point mais que  $\lim_{a^+} f$  et  $\lim_{a^-} f$  existent.  
Tous les autres points de discontinuité sont dits de seconde espèce.

Exercice

Donner un exemple de chacune de ces deux discontinuités.

**Caractérisation séquentielle (=à l'aide de suite) de la continuité****Proposition - Caractérisation séquentielle de la continuité**

Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  et  $x_0 \in I$ . Alors  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si pour toute suite réelle  $(u_n)$  de points de  $I$  convergeant vers  $x_0$ , la suite  $(f(u_n))$  converge vers  $f(x_0)$ .

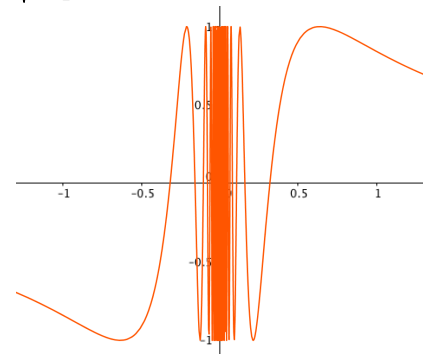
**Démonstration****Corollaire - Limite de suite  $u_{n+1} = f(u_n)$** 

Soit  $f$  une fonction continue et  $(u_n)$  une suite définie par  $u_0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .

Si  $(u_n)$  converge alors sa limite  $\ell$  vérifie  $f(\ell) = \ell$ .

**Démonstration****✂ Savoir faire - Démontrer la non-continuité d'une fonction en exploitant les suites**

Le théorème précédent fournit un moyen de prouver qu'une fonction n'a pas de limite en  $a$ .

**✂ Représentation - Fonction sans limite**

La fonction  $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$  n'admet pas de limite en 0.

Sauriez-vous le prouver?

**3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)****3.1. Fonctions continues sur  $I$** **Continuité sur un intervalle**

La définition suivante donne la continuité sur un intervalle. On voit comment la notion de jauge (re)fait son entrée. Elle permet une sorte d'interversion des quantificateurs :  $\forall x_0 \exists \eta$  :

**Définition - Continuité sur un intervalle**

Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

On dit que  $f$  est continue sur  $I$  si elle est continue en tout point de  $I$

$$\forall x_0 \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

ou de manière équivalente

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ jauge } \mid \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta_\epsilon(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

On note  $C(I)$  ou  $\mathcal{C}^0(I)$  l'ensemble des fonctions continues sur  $I$ . ( $C(I, \mathbb{R})$  ou  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$  s'il y a un risque de confusion sur l'ensemble d'arrivée).

**⚠ Attention - Fonctions usuelles, continues?**

La plupart des fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition, mais il existe des fonctions qui ne sont pas continues partout, par exemple la fonction partie entière ou la fonction indicatrice de  $\{0\}$ . Il existe même des fonctions nulle part continues, comme le montre l'exercice suivant

Exercice

Montrer que la fonction indicatrice de  $\mathbb{Q}$ ,  $1_{\mathbb{Q}}$ , n'est continue en aucun point de  $\mathbb{R}$ .

Une application : résoudre des équations fonctionnelles

Exercice

On veut déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Déterminer  $f(0)$ . Montrer que  $f$  est impaire.
2. Déterminer la restriction de  $f$  à  $\mathbb{N}$ , à  $\mathbb{Z}$ , puis à  $\mathbb{Q}$ .
3. Déterminer finalement  $f$ .

**✍ Savoir faire - Définir  $f$  (continue) de  $X$  à  $\overline{X}$** 

Si  $f$  est définie sur un ensemble  $X$ , la continuité de  $f$  peut permettre d'étendre  $f$  sur  $\overline{X}$ .

**Opérations sur les fonctions et continuité****Proposition - Opération de continuité**

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , continues en  $x_0 \in I$ , alors  $|f|$ ,  $f + g$ ,  $f g$  sont continues en  $x_0$ , ainsi que  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  si  $g(x_0) \neq 0$ .

On a le même résultat concernant la continuité sur un intervalle  $I$ .

**Démonstration**Exercice

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On définit les fonctions  $f^+$  et  $f^-$  par  $f^+(x) = \max(f(x), 0)$  et  $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ . Montrer que si  $f$  est continue en  $x_0$ , alors  $f^+$  et  $f^-$  sont continues en  $x_0$ .

**Proposition - Continuité d'une composée**

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ,  $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ ,  $f(I) \subset J$ . Soit  $x_0 \in I$ . Si  $f$  est continue en  $x_0$  et  $g$  continue en  $f(x_0)$ , alors  $g \circ f$  est continue en  $x_0$ .

On a le même résultat concernant la continuité sur  $J$  de  $g$ , sur  $I$  de  $f$  et donc également de  $g \circ f$ .

**Démonstration**

**3.2. Prolongement par continuité**

**Définition - Prolongement par continuité**

Soit  $I$  un intervalle.

— Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  une extrémité réelle de  $I$ ,  $x_0 \notin I$ .

Si  $f$  admet une limite réelle  $\ell$  en  $x_0$ , alors la fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $I \cup \{x_0\}$  par

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0; \\ \tilde{f}(x_0) = \ell \end{cases}$$

prolonge  $f$  à  $I \cup \{x_0\}$  et est continue en  $x_0$ .

— Si  $x_0 \in I$ , si  $f$  définie sur  $I \setminus \{x_0\}$  admet des limites réelles à droite et à gauche en  $x_0$  et si ces limites sont égales (à  $\ell$ ) alors la fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $I$  par

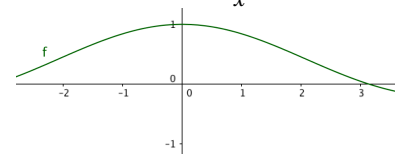
$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0; \\ \tilde{f}(x_0) = \ell \end{cases}$$

prolonge  $f$  à  $I$  et est continue en  $x_0$ .

Dans les deux cas  $\tilde{f}$  s'appelle le prolongement par continuité de  $f$  en  $x_0$ .

**Exemple** -  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

**Représentation** -  $\frac{\sin x}{x}$



**Remarque - Sur le vocabulaire**

Si  $f$  n'est pas définie en  $x_0$ , il y a une infinité de façon de définir un prolongement de  $f$  à  $I \cup \{x_0\}$ , mais il y a au plus un prolongement qui soit continu, c'est le prolongement par continuité.

**Exercice**

Montrer que la fonction  $x \mapsto x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$  est prolongeable par continuité en 0.

**Savoir faire - Démontrer la continuité de  $f$  sur  $I$  ou prolonger la continuité de  $f$  sur  $I$**

Dans les deux cas, la méthode est la même :

1. On s'assure, par les théorèmes généraux, que  $f$  est continue sur  $I$  sauf en un point  $x_0$  particulier.
2. Puis on regarde la limite de  $f$  en  $x_0$ .
  - Si  $x_0 \in \mathcal{D}_f$ , alors  $f(x_0)$  existe. Il s'agit de démontrer la continuité de  $f$  en  $x_0$ .
  - Si  $x_0 \notin \mathcal{D}_f$ , alors  $f(x_0)$  n'existe pas (ou pas encore). Il s'agit de voir si on peut ajouter un point  $x_0$  dans l'ensemble de définition de  $f$ . De manière à ce que  $f$  reste continue. On dit que l'on fait un prolongement par continuité de  $f$ .

### 3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

C'est un théorème de surjectivité. L'hypothèse est simple : la continuité de  $f$ .

#### Théorème - Théorème des valeurs intermédiaires

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $(a, b) \in I^2$  et  $a < b$ . On suppose que  $f(a) \times f(b) \leq 0$ .

Alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = 0$ .

La démonstration a été vu au chapitre précédent avec le processus de dichotomie. A savoir (re)faire.

#### Corollaire - TVI entre $f(a)$ et $f(b)$

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $I$ . Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $(a, b) \in I^2$  et  $a < b$ .

Alors pour toute valeur  $d$  comprise entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe  $t \in [a, b]$  tel que  $f(t) = d$ .

#### Démonstration

#### Corollaire - Image d'un intervalle par une fonction continue

Soit  $I$  un intervalle et  $f$  une fonction continue sur  $I$ . Alors  $f(I)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Mieux : si  $I$  est un connexe de  $\mathbb{R}$ , alors  $f(I)$  est également connexe.

#### Démonstration

#### Exercice

Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$ .

#### Exercice

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue. Montrer que  $f$  admet un point fixe.

#### Exercice

Supposons que  $f$  continue et ne s'annule pas. Donc pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $f(t) \neq 0$ .

Soit  $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,  $t \mapsto \alpha(t) > 0$ , tel que  $f([t - \alpha(t), t + \alpha(t)]) \subset [f(t) - \epsilon, f(t) + \epsilon]$  avec  $\epsilon = \left| \frac{f(t)}{2} \right|$ .

En appliquant le lemme de Cousin, montrer que  $f$  est de signe constant. Conclure.

### 3.4. Cas de l'image d'un segment par $f$ continue

**Théorème - Théorème de Weierstrass**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur le segment  $[a, b]$ . Alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists (x_1, x_2) \in [a, b]^2 \mid f(x_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \text{ et } f(x_2) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

$f(x_1)$  s'appelle l'infimum de  $f$  et  $f(x_2)$  le supremum de  $f$ .

**Remarque - Mieux**

Si  $f$  est continue. Si  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}$ , alors  $f(K)$  est également compact.

↗ **Heuristique - Deux résultats!**

Il y a en fait deux parties dans ce théorème :

- $f([a, b])$  est borné. C'est l'existence de  $\sup_{x \in [a, b]} f(x)$ .
- Cette borne supérieure est atteinte :  $\exists x_0 \in [a, b]$  tel que  $f(x_0) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$

La démonstration se fera également en deux temps (avec le principe de dichotomie).

On notera que pour cette démonstration, on exploite de deux façons distinctes ce principe : une fois par l'absurde (méthode ascendante et globale), une fois pour exhiber un nombre en particulier (méthode descendante et locale).

**Démonstration****Exercice**

Démontrer le théorème de Weierstrass à l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass.

- Supposons que  $f$  n'est pas bornée sur  $[a, b]$ .  
Montrer qu'il existe  $(x_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$  tel que  $f(x_n) \rightarrow +\infty$ .  
En déduire une contradiction avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- On considère alors  $M = \sup f$ . Montrer qu'il existe  $(y_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$  tel que  $f(y_n) \rightarrow M$ .  
Conclure avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.

**Exercice**

Démontrer le théorème de Weierstrass à l'aide du lemme de Cousin.

*L'existence d'un maximum est facile dans le cas d'un ensemble fini. En prenant un jauge puis une subdivision pointée bien choisies, on peut réduire à la recherche d'un maximum pour un nombre fini de points*

**Histoire - Karl Weierstrass**

Karl Weierstrass est né le 31 octobre 1815 à Ostfelfelde (Westphalie), et est mort le 19 février 1897 à Berlin. C'était un mathématicien allemand, souvent qualifié de « père de l'analyse moderne ». Il a été lauréat de la médaille Copley en 1895.

**Théorème - Image d'un segment par une fonction continue**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur le segment  $[a, b]$ . Alors  $f([a, b])$  (image directe du segment) est un segment de  $\mathbb{R}$ .

**Démonstration****Exercice**

Montrer qu'une fonction périodique, continue sur  $\mathbb{R}$ , est bornée et atteint ses bornes.

**✂ Savoir faire - Montrer l'existence d'un point  $x$  tel que ...**

Plusieurs possibilités :

- Théorème des valeurs intermédiaires ( $\varphi$  continue sur  $]a, b[$ ) :  
 $\exists c \in ]a, b[$  tel que  $\varphi(c) \in [\varphi(a), \varphi(b)]$  ou  $[\varphi(b), \varphi(a)]$
- Théorème de Weierstrass ( $\varphi$  continue sur  $[a, b]$ ) :  
 $\exists c \in [a, b]$  tel que  $\varphi(a) = \sup_{[a, b]} \varphi$
- Principe de dichotomie.  
 $\exists (]a_n, b_n])_n$  suite de segments emboîtés de limite  $\ell$  telle que...
- Principe de convergence monotone ( $(a_n)$  monotone et bornée).  
 $\exists \ell = \lim(a_n)$ .
- Théorème de Bolzano-Weierstrass ( $(a_n)$  suite bornée).  
 $\exists c$ , limite d'une sous-suite de  $(a_n)$  telle que...
- Théorème de Cauchy ( $(a_n)$  suite de Cauchy).  
 $\exists c$ , limite de  $(a_n)$  telle que...
- Une autre possibilité au chapitre suivant avec le théorème de Rolle (ou E.A.F.) - ( $\varphi$  dérivable sur  $]a, b[$ ) :  
 $\exists c \in ]a, b[$  tel que  $\varphi'(c) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}$

Si cela n'est pas naturel, la difficulté consiste à trouver la bonne fonction  $\varphi$ . En particulier, si on cherche un point fixe d'une fonction  $f$ , on prend  $\varphi : x \mapsto f(x) - x \dots$

**Exercice**

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) < \alpha$ .

Montrer qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $\forall x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq \alpha - \epsilon$ .

**Exercice**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ , continue tel que pour tout  $x \neq y \in [a, b]$ ,  $|f(y) - f(x)| < |y - x|$ .

- Montrer que  $f$  admet un unique point fixe, noté  $x_0$ .
- On considère la suite  $(u_n)$  définie par récurrence par  $u_0 \in [a, b]$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .  
Montrer que  $(u_n) \rightarrow x_0$ .



**3.5. Théorème de la bijection (bis)**

C'est un théorème d'injectivité. L'hypothèse est simple, en plus de la continuité : la stricte monotonie de  $f$ .

**Théorème - Injectivité et monotonie stricte**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $I$ . Alors  $f$  est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration

**Théorème - Théorème de la bijection**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$ , continue, strictement monotone sur  $I$  (intervalle de  $\mathbb{R}$ ), alors  $f$  est bijective de  $I$  sur l'intervalle  $J = f(I)$ . Sa bijection réciproque  $f^{-1}$  est continue sur  $J$ , de même sens de variations que  $f$ .

Démonstration

**Remarque - Un théorème supplémentaire?**

Le dernier point de la démonstration montre que :  
 si  $f$  est monotone sur  $I$  et  $f(I)$  est un intervalle, alors  $f$  est nécessairement continue

**3.6. Continuité uniforme**

**Définition - Fonction uniformément continue**  
 Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ . On dit que  $f$  est uniformément continue sur  $I$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

**Attention - Différence entre continuité et uniforme continuité**

La différence avec la définition de la continuité en  $x$  est que le réel  $\eta$  est le même pour tout  $x \in I$ .

A comparer :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in I \exists \eta > 0 \mid \forall y \in I, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

**Attention - Ordre des quantificateurs**

- Insistons un peu... L'ordre des quantificateurs est important :
- $\exists \dots \forall \dots \neq \forall \dots \exists \dots$  (l'exercice qui suit donne un contre-exemple)
  - En revanche :  $\exists \dots_1 \exists \dots_2 = \exists \dots_2 \exists \dots_1$  et  $\forall \dots_1 \forall \dots_2 = \forall \dots_2 \forall \dots_1$

**Proposition - Implication**  
 Une fonction uniformément continue sur  $I$  est continue sur  $I$ .

**Démonstration**

Il existe une réciproque, dans le cadre des fonctions définie sur un segment. C'est le théorème de Heine :

**Théorème - Théorème de Heine**

Une fonction continue sur un segment de  $\mathbb{R}$  est uniformément continue sur ce segment.

**Remarque - Démonstration**

Pour faire cette démonstration, nous allons exploiter le lemme de Cousin. Il s'agit en fait de rendre  $\eta$  constant minimal (mais non nul). Ce serait simple si  $\inf \eta > 0$ .

Mais en fait, bien que  $\forall x \in I, \eta(x) > 0$ , on n'a pas assurément  $\inf \eta > 0$ .

Nous faisons la démonstration avec le lemme de Cousin, car il se joue ici la même manipulation que pour manipuler l'intégrale de Kurzweil-Henstock (que nous verrons - définie avec un jauge variable) est plus subtile que l'intégrale de Riemann (vue ailleurs - définie avec un jauge constante, grâce au théorème de Heine).

**Remarque - Faire un schéma de la démonstration!**

Pour les démonstrations topologiques, il faut faire des dessins!

**Démonstration****◆ Pour aller plus loin - Propriété de compacité**

Dans la démonstration, on peut voir le passage de l'étude sur un ensemble infini (même pas dénombrable de points) -  $\forall x, y$ , à l'étude pour un nombre fini de points -  $t_k$ .

C'est vraiment la propriété de compacité

**◆ Pour aller plus loin - inf d'une réunion**

On a exploité ici :  $\inf_{x \in A \cup B} f(x) = \min(\inf_{x \in A} f(x), \inf_{x \in B} f(x))$ .

**Remarque - Commentaires sur la démonstration**

En fait on peut dire les choses autrement :

—  $f$  est continue sur  $I$ , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta : I \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ (jauge) telle que } \forall x \in I, |y - x| \leq \delta(t) \implies |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$$

—  $f$  est uniformément continue sur  $I$ , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ (jauge } \mathbf{CONSTANTE}) \text{ telle que } \forall x \in I, |y - x| \leq \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$$

On comprend ainsi bien l'emploi du mot uniforme dans uniforme continuité.

On comprend également bien pourquoi l'uniforme continuité implique la continuité sur  $I$  (l'hypothèse est plus restrictive).

Enfin, la démonstration indique que si  $[a, b]$  est un compact (segment de  $\mathbb{R}$  - fermé et borné), alors il est possible de le considérer avec une propriété de finitude. On peut alors prendre  $\delta = \min \delta(t_k)$ , ce qui permet de passer de la continuité à la continuité uniforme.

Exercice

**◆ Pour aller plus loin - Principe de prolongement**

Si une propriété est vraie pour tout  $x$  sur un de ses voisinages, et vérifie la sous-additivité pour la fonction d'intervalle associée, alors cette propriété est vraie sur tout le segment (compact) sur lequel est étudié le problème

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  et  $\epsilon > 0$ .

On note pour tout  $\alpha < \beta \in [a, b]$ ,

$$G(\alpha, \beta) = 0 \text{ si } \exists \delta > 0 \mid \forall x, y \in [\alpha, \beta], |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

et  $G(\alpha, \beta) = 1$ , sinon.

1. Montrer que  $G$  est sous-additive (on pourra utiliser la continuité en  $\beta$ )
2. Montrer que si  $G(a, b) = 1$ , on a une contradiction.
3. En déduire que  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$

### Exercice

Il s'agit de démontrer le théorème de Heine avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.

On considère  $f$  continue sur  $[a, b]$  et par l'absurde, on suppose que  $f$  n'est pas uniformément continue.

1. Formaliser cette dernière hypothèse. On considèrera un tel  $\epsilon$ .
2. Montrer qu'il existe deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  de  $[a, b]$  telles que  $(x_n - y_n) \rightarrow 0$  mais pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$
3. Aboutir à une contradiction en exploitant le théorème de Bolzano-Weierstrass

### Exercice

1. Montrer que si  $f$  est lipschitzienne sur  $I$  alors  $f$  est uniformément continue sur  $I$ .  
Montrer que sinus est lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$  (donc uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ ).
2. Montrer que  $x \mapsto \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $[0, +\infty[$  mais n'est pas lipschitzienne sur  $[0, +\infty[$ .
3. Montrer que  $x \mapsto x^2$  n'est pas uniformément continue sur  $[0, +\infty[$ .

### Pour aller plus loin - Fonction lipschitzienne

On dit que  $f$  est lipschitzienne sur  $I$  si :  
il existe  $k \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

## 4. Généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

### 4.1. Opérations classiques sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$

#### Définition - Transformations classiques

A partir de  $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ , on définit les applications suivantes à valeurs dans  $\mathbb{R}$  :

- $|f|$  (module de  $f$ ) :  $\forall x \in X, |f|(x) = |f(x)|$
- $\Re f$  (partie réelle de  $f$ ) :  $\forall x \in X, (\Re f)(x) = \Re(f(x))$
- $\Im f$  (partie imaginaire de  $f$ ) :  $\forall x \in X, (\Im f)(x) = \Im(f(x))$

On définit également  $\overline{f}$ , fonction conjuguée de  $f$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , par  $\forall x \in X, \overline{f}(x) = \overline{f(x)}$

### 4.2. Fonctions bornées

#### Définition - Fonctions à valeurs complexes bornées

On dit que  $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$  est bornée si la fonction  $|f| \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$  est majorée, c'est-à-dire si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, |f(x)| \leq M.$$

**⚠ Attention - Majoration dans  $\mathbb{C}$** 

⚡ Dire qu'une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$  est majorée, ou minorée, n'a pas de sens.

**Proposition - Stabilité pour fonctions bornées**

$f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$  est bornée si et seulement si  $\Re f$  et  $\Im f$  ( $\in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ ) sont bornées.

Toute combinaison linéaire et tout produit de deux fonctions bornées sont des fonctions bornées.

**Démonstration****4.3. Limites****Définition - Limite de fonction complexe**

On dit que la fonction  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  admet le complexe  $\ell$  pour limite en  $a \in \mathbb{R}$  (ou que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$ ) si la fonction à valeurs réelles  $|f - \ell|$  tend vers 0 en  $a$ .

**⚠ Attention - Pas de limite infinie pour des fonctions à valeurs complexes**

⚡ On ne définit pas de limite infinie pour une fonction à valeurs complexes...

**Proposition - Critère de convergence**

Soit  $f$  une fonction à valeurs complexes,  $\ell \in \mathbb{C}$  et  $a \in \mathbb{R}$ .

Alors  $f$  admet  $\ell$  pour limite en  $a$  si et seulement si les fonctions  $\Re f$  et  $\Im f$  admettent respectivement  $\Re \ell$  et  $\Im \ell$  pour limite en  $a$ .

On en déduit que si  $f$  admet une limite en  $a$ , celle-ci est unique.

**Démonstration****Proposition - Limite donc bornée**

Si  $f$  admet une limite en  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

## Démonstration

## 4.4. Opérations sur les limites

**Proposition - Bilan**

Soient  $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ ,  $(\ell, m) \in \mathbb{C}^2$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ .

On suppose que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ . Alors

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) &= |\ell| \\ \lim_{x \rightarrow a} \overline{f}(x) &= \overline{\ell} \\ \lim_{x \rightarrow a} (\lambda f + \mu g)(x) &= \lambda \ell + \mu m \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) &= \frac{\ell}{m} \text{ pour } m \neq 0\end{aligned}$$

Soit  $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ ,  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , telle que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$ ;

soit  $(u_n)$  une suite de  $X$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ .

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$ .

Soient  $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ ,  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\phi \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  telle que  $\phi(I) \subset X$ ,  $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} \phi(t) = a$  alors  $\lim_{t \rightarrow t_0} (f \circ \phi)(t) = \ell$ .

## Démonstration

## 4.5. Continuité

$I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point.

**Définition - Continuité d'une fonction à valeurs complexes**

Soit  $f$  définie sur  $I$  et  $a \in I$ ,  $f$  admet une limite en  $a$  équivaut à dire que  $\Re f$  et  $\Im f$  admettent des limites réelles en  $a$ , c'est-à-dire qu'elles sont continues en  $a$ .

Si c'est le cas on dit que  $f$  est continue en  $a$ .

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$  est continue sur  $I$  si elle est continue en tout point de  $I$ .

Cela équivaut à dire que  $\Re f, \Im f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  sont continues sur  $I$ .

On note  $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$  ou  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$  l'ensemble des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ .

**Proposition - Stabilité par continuité**

Si  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$  est continue sur  $I$  alors  $\overline{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$  et  $|f| \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  sont continues sur  $I$ .

Soient  $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ . Alors :

$\mathcal{C}^2$ . Alors :

$\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$  ( $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$  est un s.e.v. de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ ).

Si  $g$  ne s'annule pas,  $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ .

Si  $\phi \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$  avec  $\phi(J) \subset I$  alors  $f \circ \phi \in \mathcal{C}(J, \mathbb{C})$ .

Exercice

Les propriétés suivantes restent-elles vraies en passant de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{C}$

1. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  continue sur  $[a, b]$ . Alors  $f$  est bornée sur  $[a, b]$  et il existe  $x_0 \in [a, b]$  tel que  $|f(x_0)| = \sup_{[a, b]} |f(x)|$ .
2. Le théorème des valeurs intermédiaires (image continue d'un segment).

**5. Bilan**Synthèse

- ↪ La continuité est d'abord une notion locale, qui se généralise à un intervalle.
- ↪ La continuité/limite est une notion subtile qui mérite qu'on y passe un temps conséquent. Pour n'en perdre pas trop, il faut parfois plonger dans l'abstraction.
- ↪ L'un des plus importants résultats de topologie réelle est le TVI : il n'y a pas de trou dans  $\mathbb{R}$  et toute transformation qui conserve une partie sans trou (ou intervalle) de  $\mathbb{R}$  doit être continue. L'enjeu est donc la continuité ! Il faut pour cela définir la notion de limite de fonction, en un point, puis sur un intervalle.
- ↪ Nous terminons par l'étude des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Savoir-faire - Démontrer la non-continuité d'une fonction en exploitant les suites
- Savoir-faire - Démontrer la continuité de  $f$  sur  $I$  ou prolonger  $f$  par continuité.
- Savoir-faire - Définir  $f$  (continue) de  $X$  à  $\bar{X}$
- Savoir-faire - Démontrer la continuité de  $f$  sur  $I$  ou prolonger la continuité de  $f$  sur  $I$
- Savoir-faire - Montrer l'existence d'un point tel que...

Notations

Notations	Définitions	Propriétés	Remarques
$\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$	(resp. Ensemble des fonctions continues de l'intervalle $I$ sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$ ))		
$\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$			

Retour sur les problèmes

87. C'est une des clés de l'analyse. Et pour avoir accès à la limite, en règle générale, on encadre...
88. Rappelons la définition du cours : une fonction est continue sur  $I$ , si elle est continue en tout point de  $I$ . Et une fonction est continue en un point  $x$  de  $I$ , si *simplement* elle admet une limite en  $x$ .
89. Oui, on a vu par exemple l'indicatrice de  $\mathbb{Q}$ .
90. Si  $I$  est un intervalle,  $f(I)$  est un intervalle. Mais il peut être ouvert et donc on n'a pas nécessairement  $x_0$  tel que  $f(x_0) = \sup I f$ . Par exemple avec  $f : x \mapsto x$  et  $I = [0, 1[$ . Pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) < 1 = \sup_I f$ .  
Si l'intervalle est fermé, les choses sont différentes (cf. théorème de Weierstrass).
91. Voir dernier chapitre du cours. Pour la continuité des fonctions de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , cela est a priori plus compliqué car il n'y a pas de relation d'ordre dans  $\mathbb{C}$ ...

