

# Développements limités

 **Résumé -**

*Au voisinage d'un point  $a$ , une courbe est tout à fait comparable à une droite; pas n'importe laquelle : sa tangente d'équation  $y = a + f'(a)(x - a)$ . Est-il possible d'être encore plus précis? Les développements limités répondent à cette question : ils permettent de transformer une fonction quelconque en une famille plus simple de fonctions -polynômes de Taylor- très proche.*

*Pour pouvoir affirmer ce résultat (et l'exploiter abusivement en sciences physiques), il faut d'abord commencer par formaliser du vocabulaire très précis : une fonction  $f$  est dominé par (resp. négligeable devant, équivalente à) une fonction  $g$  au voisinage de  $a$  si...*

*Au passage, on formalisera l'expression bien connue des lycées : «  $g$  l'emporte sur  $f$  »...*

*Au lieu d'une liste de problème, nous commençons par l'étude d'un cas précis.*

*Quelques vidéos :*

- *Optimal sup/spé - Formules de Taylor et Développements limités - <https://www.youtube.com/watch?v=TVW8UBTmT58>*
- *Avenir-cours - DL4(1) de  $\ln(x)/x$ ? a partir de DL connus MPSI - <https://www.youtube.com/watch?v=a8Q5ErJNPYs>*
- *Science for all - Les développements limités Relativité 3 - <https://www.youtube.com/watch?v=TM9HdSBat8o>*

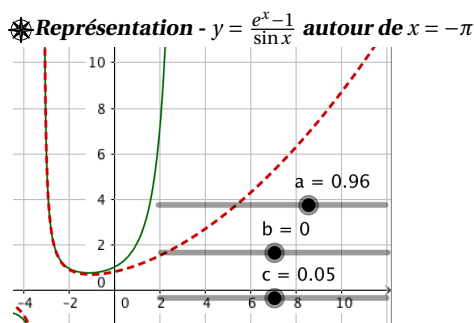
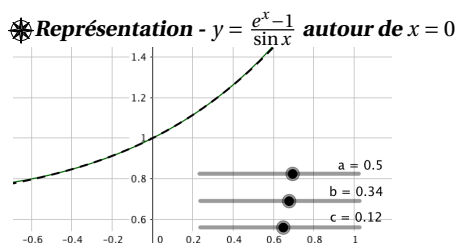
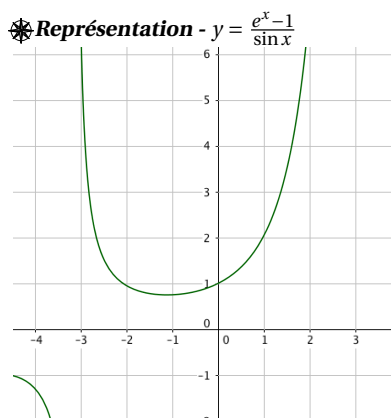
## Sommaire

---

<b>1.</b>	<b>Problème</b> . . . . .	<b>434</b>
<b>2.</b>	<b>Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions</b> . . . . .	<b>434</b>
2.1.	Rappel : le cas des suites . . . . .	434
2.2.	Définitions . . . . .	435
2.3.	Relations d'équivalence. Relation de préordre . . . . .	437
2.4.	Echelle de comparaison . . . . .	439
2.5.	Algèbre des relations de comparaison . . . . .	439
<b>3.</b>	<b>Développements limités</b> . . . . .	<b>442</b>
3.1.	Définitions . . . . .	442
3.2.	Propriétés . . . . .	443
3.3.	Existence de développements limités . . . . .	445
3.4.	Opérations . . . . .	449
3.5.	Généralisation . . . . .	451
<b>4.</b>	<b>Applications des DL</b> . . . . .	<b>452</b>
4.1.	Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction) . . . . .	452
4.2.	Etude locale d'une fonction . . . . .	453
<b>5.</b>	<b>Bilan</b> . . . . .	<b>454</b>

---

# 1. Problème



## ? Problème 100 - Une courbe, des zooms

Considérons une fonction exemplaire :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

Le tracé de cette courbe figure en marge.

Elle semble de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -\pi, \pi[$ .

On peut alors visiblement obtenir certains nombres significatifs :  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ... , mais aussi  $\lim_{+\pi^-} f$  ou encore  $\lim_{+\pi^-} f'$ ...

On peut dire mieux, au lieu de regarder en un point, on peut regarder au voisinage d'un point. On zoome par exemple en 0 ou en  $+\pi$  (cf. en marge).

Cela la puissance du zoom, on voit alors apparaître une famille de fonctions plus ou moins simples; plus ou moins connue.

- Au voisinage de 0 : Visiblement  $f(0) = 1$ . Une première approximation est  $f = 1$ . Pas satisfaisant... Puis par tâtonnement, il semble que la courbe d'équation (polynomiale)  $y = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{8}x^3$  semble très proche de  $y = f(x)$ , au moins au voisinage de 0.
- Au voisinage de  $-\pi$  : La valeur est infini, cela ressemble plus à une hyperbole.

Par tâtonnement, il semble que  $y = \frac{1 - e^{-\pi}}{x + \pi} + e^{-\pi}(-1 + \frac{1}{2}(x + \pi))$

Le principe d'un développement limité, consiste à approcher une fonction (ou une suite) par une fonction (ou une suite) mieux connue; polynomiale par exemple

### ↗ Heuristique - Développement limité

Le principe est le suivant :

1. On remplace une fonction par un développement mieux maîtrisé (polynôme...)
2. Cela dépend du voisinage du point considéré.
3. Plus on souhaite qu'il soit bon, plus il faudra qu'il y ait de coefficients.

Il est d'abord nécessaire de comprendre comment comparer deux fonctions (celle de référence et sa version locale polynomiale). On s'intéresse donc dans cette partie aux relations de comparaison entre fonctions.

Le principe est le même pour les suites (mais étudiées toujours uniquement en  $n \rightarrow +\infty$ ).

### ⚠ Attention - Selon le point

Il n'est jamais trop tôt pour insister : la fonction (polynomiale - par exemple) plus simple qui décrit  $f$  **dépend du point** auprès duquel on est amené à faire l'étude.

Le résultat au voisinage de 0, n'a rien à voir avec celui au voisinage de  $+\pi$ ! (par exemple)

## 2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

### 2.1. Rappel : le cas des suites

**Définition - Définition généralisée**

Soient  $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On dit que

- $(u_n)$  est négligeable devant  $(v_n)$ , notée  $u_n = o(v_n)$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n| \leq \epsilon |v_n|.$$

- $(u_n)$  est équivalente à  $(v_n)$ , notée  $u_n \sim v_n$  si  $u_n - v_n = o(v_n)$ .

- $(u_n)$  est dominée par  $(v_n)$ , notée  $u_n = O(v_n)$  si

$$\exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n| \leq C |v_n|.$$

**✂ Savoir faire - Etude de négligeabilité/équivalence/domination... d'une suite.**

Deux cas fréquents pour étudier une suite  $(u_n)$  :

- si la suite  $(u_n) = f(n)$ , alors en fait on étudie directement la fonction  $f$ ...

Très souvent, on se ramène à cette situation.

- si la suite est définie implicitement ou par récurrence, on étudie la limite de  $\frac{u_n}{v_n}$ , où  $v_n$  est le candidat pour être respectivement : le facteur de négligeabilité / d'équivalence / de domination (dans ce cas la limite vaut respectivement 0 / 1 / est bornée).

**STOP Remarque - Rappels**

On rappelle également que l'on a vu

- $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$  (formule de Stirling)

- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$

**2.2. Définitions****Définition - Définition généralisée**

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , point ou borne de  $I$ . On dit que

- $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$ , notée  $f \underset{a}{=} o(g)$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid \forall x \in V, |f(x)| \leq \epsilon |g(x)|.$$

- $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$ , notée  $f \underset{a}{\sim} g$  si  $f - g \underset{a}{=} o(g)$ .

- $f$  est dominée par  $g$  au voisinage de  $a$ , notée  $f \underset{a}{=} O(g)$  si

$$\exists C > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid \forall x \in V, |f(x)| \leq C |g(x)|.$$

**STOP Remarque - Ensemble  $g^{-1}(\{0\})$** 

Si  $g(x) = 0$  pour  $x \in V$ , alors nécessairement, pour les trois cas précédents :  $f(x) = 0$ .

Donc  $g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\})$ , autrement écrit :  $\mathcal{Z}(g) \cap V \subset \mathcal{Z}(f)$ .

**Proposition - Caractérisation avec une fonction auxiliaire**

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , point ou borne de  $I$ .

Alors, on a  $f \underset{a}{=} o(g)$  si et seulement si

- il existe une fonction  $h$  telle que  $h \underset{a}{\rightarrow} 0$  et  $f = hg$  au voisinage de  $a$ .

Alors, on a  $f \underset{a}{\sim} g$  si et seulement si

- il existe une fonction  $h$  telle que  $h \underset{a}{\rightarrow} 1$  et  $f = hg$  au voisinage de  $a$ .

Alors, on a  $f \underset{a}{=} O(g)$  si et seulement si

- il existe une fonction  $h$  telle que  $h$  est bornée au voisinage de  $a$  et

$f = hg$  au voisinage de  $a$ .
**Démonstration****Proposition - Domination, négligeabilité, équivalence pour les fonctions**

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ , point ou borne de  $I$  ( $a \in \bar{I}$ ).

—  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$  si et seulement si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a, x \notin g^{-1}(\{0\})}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \exists V \in \mathcal{V}_a \text{ tel que } g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\})$$

—  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$  si et seulement si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 1 \text{ et } \exists V \in \mathcal{V}_a \text{ tel que } g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\})$$

—  $f$  est dominée par  $g$  au voisinage de  $a$  ssi la fonction  $\frac{f}{g}$  est bornée sur un voisinage de  $a$  et  $g^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}(\{0\})$ , au voisinage de  $a$ .

**⚠ Attention - Insistons bien**

⚡ Pour les fonctions, il s'agit bien d'une relation LOCALE (au voisinage de  $a$ ).

- On peut avoir  $f = o(g)$  au voisinage de  $a$  ET  $g = o(f)$  au voisinage de  $b \dots$   
 ⚡ Donc «  $f = o(g)$ , sans précision supplémentaire » NE SIGNIFIE RIEN

**Démonstration**Exercice

Faire les autres démonstrations

✂ **Savoir faire - Avec une fonction « relative »**

Notons, pour tout  $x \in I$ ,  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ . Alors

- $f$  est dominée par  $g$  au voisinage de  $a$  ssi  $h$  est bornée au voisinage de  $a$ .
- $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$  ssi  $h \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .
- $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$  ssi  $h \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ .

Avec  $g = 1$ , on trouve directement :**Proposition - Comparaison à une fonction constante**Soit  $f$  définie au voisinage de  $a$ . On a

$$\begin{aligned} f \underset{a}{=} O(1) &\Leftrightarrow f \text{ est bornée au voisinage de } a. \\ f \underset{a}{=} o(1) &\Leftrightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \end{aligned}$$

**2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre**

Pour les propositions suivantes, les démonstrations sont simplifiées par le fait que les fonctions ne s'annulent pas au voisinage de  $a$ , donc on peut considérer  $h = \frac{f}{g}$  avec  $g$  non nul sur un voisinage de  $a$ .

**Proposition - Equivalence : relation d'équivalence**Soient  $f, g, h$  trois fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage de  $a$  (ou juste en  $a$ ). On a

- $f \underset{a}{\sim} f$  (réflexivité).
- Si  $f \underset{a}{\sim} g$  alors  $g \underset{a}{\sim} f$  (symétrie).
- Si  $f \underset{a}{\sim} g$  et  $g \underset{a}{\sim} h$  alors  $f \underset{a}{\sim} h$  (transitivité).

La relation d'équivalence  $\sim$  est donc une relation d'équivalence

## Démonstration

**◆ Pour aller plus loin - Relation : même ordre de grandeur**

Pour avoir une relation d'ordre, il faut associer la propriété d'antisymétrie.

Donc définir une égalité  $\asymp$  entre fonctions par :

$$f \underset{a}{=} O(g) \text{ et } g \underset{a}{=} O(f) \implies f \asymp g$$

**Proposition - Relation de préordre**

Soient  $f, g, h$  trois fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage de  $a$ . On a

- $f = O(f)$  au voisinage de  $a$  (réflexivité)
- Si  $f = O(g)$  et  $g = O(h)$  au voisinage de  $a$  alors  $f = O(h)$  au voisinage de  $a$ . (transitivité)

## Démonstration

**Proposition - Liens entre les relations**

Soient  $f, g, h$  trois fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage de  $a$ . On a

- Si  $f \underset{a}{=} o(g)$  alors  $f \underset{a}{=} O(g)$
- On a :  $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f - g \underset{a}{=} o(g)$  (ou encore noté :  $f = g + o(g)$ ).
- Si  $f \underset{a}{\sim} g$  alors  $f \underset{a}{=} O(g)$  et  $g \underset{a}{=} O(f)$ .
- Si  $f \underset{a}{\sim} g$  alors  $h \underset{a}{=} o(f) \Leftrightarrow h \underset{a}{=} o(g)$ .

## Démonstration

## 2.4. Echelle de comparaison

Les résultats suivants sont tout simplement une réécriture des formules de croissances comparées bien connues.

### Proposition - Comparaisons usuelles

Pour  $\alpha > 0, \beta > 0$  on a

$$(\ln x)^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha), \quad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\beta x}),$$

$$|\ln x|^\beta \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right),$$

$$e^{\beta x} \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right).$$

On a également pour  $0 < p < q$  :

$$x^p \underset{+\infty}{=} o(x^q)$$

$$x^q \underset{0}{=} o(x^p) \text{ et } (x-a)^q \underset{a}{=} o((x-a)^p).$$

En d'autres termes, aux bornes des intervalles de définition, "l'exponentielle domine (=« l'emporte sur ») la puissance, la puissance domine (=« l'emporte sur ») le logarithme" (croissances comparées).

### Proposition - Taux d'accroissement réinterprété

En utilisant les limites classiques (taux d'accroissement), on a

1.  $\sin x \underset{0}{=} x + o(x)$  ou encore  $\sin x \underset{0}{\sim} x$
2.  $\tan x \underset{0}{=} x + o(x)$  ou encore  $\tan x \underset{0}{\sim} x$
3.  $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$  ou encore  $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
4.  $e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$  ou encore  $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
5.  $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ) ou encore  $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

### Démonstration

## 2.5. Algèbre des relations de comparaison

**Proposition - Opérations avec  $o$  ou  $O$** 

Soient  $f, g, h, k$  quatre fonctions définies au voisinage de  $a$ . On a

- Si  $f \underset{a}{=} o(g)$  et  $g \underset{a}{=} o(h)$  alors  $f \underset{a}{=} o(h)$ .
- Si  $f \underset{a}{=} o(h)$  et  $g \underset{a}{=} o(h)$  alors  $f + g \underset{a}{=} o(h)$ .
- Si  $f \underset{a}{=} o(g)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  alors  $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$
- Si  $f$  et  $g$  ne s'annulent pas au voisinage de  $a$  et si  $f \underset{a}{=} o(g)$  alors  $\frac{1}{g} \underset{a}{=} o\left(\frac{1}{f}\right)$ .
- Si  $f \underset{a}{=} o(g)$  et  $h \underset{a}{=} o(k)$  alors  $fh \underset{a}{=} o(gk)$ .
- Si les fonctions  $f$  et  $g$  sont  $> 0$  avec  $f \underset{a}{=} o(g)$ , alors pour  $\alpha > 0$  on a  $f^\alpha \underset{a}{=} o(g^\alpha)$ .
- Si  $f \underset{a}{=} o(g)$  alors  $hf \underset{a}{=} o(hg)$

Les propriétés sont encore vraies en remplaçant les «  $o$  » par des «  $O$  ».

**Démonstration**



 **Remarque - Où avons-nous besoin de  $f, g > 0$ ?**

Pour la démonstration du sixième résultat

**Théorème - Signe d'une fonction**

Si  $f$  est équivalente à  $g$  en  $a$ , alors il existe  $V$  voisinage de  $a$ , tel que  $f$  et  $g$  sont de même signe sur  $V \setminus \{a\}$ .

Exercice

Faire la démonstration

**Théorème - Equivalents et limite**

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \bar{I}$ .

- Si  $\ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0$ , alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ , si et seulement si  $f \underset{a}{\sim} \ell$ ;
- Si  $f \underset{a}{\sim} g$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \bar{\mathbb{R}}$  alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ .

**Démonstration**

**Proposition - Opérations**

Soient  $f, g, h$  trois fonctions définies sur un voisinage de  $a$ . On a

- Si  $f \underset{a}{\sim} g$  et  $h \underset{a}{\sim} k$  alors  $fh \underset{a}{\sim} gk$  (et  $\frac{f}{h} \underset{a}{\sim} \frac{g}{k}$  si  $h$  ne s'annule pas)
- Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si  $f \underset{a}{\sim} g$ ,  $f$  ou  $g$  strictement positives (une suffit...) alors  $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$

**Démonstration**

En appliquant le théorème de composition des limites, nous avons un nouveau résultat :

**Proposition - Substitution dans les relations de comparaison**

Soient  $\phi$  définie sur un voisinage de  $a$  telle que  $\lim_{t \rightarrow a} \phi(t) = b$ ,  $f, g$  définies sur un voisinage de  $b$ . Alors :

$$f \underset{b}{=} O(g) \Rightarrow f \circ \phi \underset{a}{=} O(g \circ \phi)$$

$$f \underset{b}{=} o(g) \Rightarrow f \circ \phi \underset{a}{=} o(g \circ \phi)$$

$$f \underset{b}{\sim} g \Rightarrow f \circ \phi \underset{a}{\sim} g \circ \phi$$

**Démonstration**

**⚠ Attention - Ce qui ne marche pas**

⚡ D'une manière générale, les équivalents ne passent ni aux sommes, ni aux exponentielles, ni aux logarithmes.

— Somme : en 0 avec  $f_1(t) = t$ ,  $f_2(t) = t + t^2$ ,  $g_1(t) = g_2(t) = -t$   
on a  $f_1 \underset{0}{\sim} f_2$  mais  $f_1 + g_1 \not\underset{0}{\sim} f_2 + g_2$ .

— Exponentielle : en  $+\infty$  avec  $f(t) = t^2$  et  $g(t) = t^2 + t$   
on a  $f \underset{+\infty}{\sim} g$  mais  $e^f \not\underset{+\infty}{\sim} e^g$ .

Exercice

Déterminer un équivalent de  $\ln(\sin x)$  en 0.

**⚠ Attention - Rien de plus TERRIBLE...**

⚡ Ne pas écrire  $f \sim 0$ , cela n'a pas de sens avec la définition précédente, et avec la définition générale qui suit, cela signifie que  $f$  est nulle dans un voisinage de  $a$  (ce qui est bien rare...)

**⚠ Attention - Confusion fréquente**

⚡ Ne pas confondre  $f \sim g$  et  $f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .

⚡ Par exemple  $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$  mais  $x + 1 - x = 1$  ne tend pas vers 0 en  $+\infty$ .

### 3. Développements limités

#### 3.1. Définitions

$\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  $n \in \mathbb{N}$ .

**Définition - DL en un point réel**

Soit  $I$  un intervalle contenant  $a$  ou d'extrémité  $a$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  sauf éventuellement en  $a$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On dit que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de  $a$  (en abrégé

$DL_n$  en  $a$  ou  $DL_n(a)$ ) s'il existe un polynôme  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$  tel que

$$\begin{aligned} \forall x \in I, f(x) &= P(x-a) + o((x-a)^n) \\ &= a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \end{aligned}$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x) \text{ où } \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

ou

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n)$$

$P(x-a)$  s'appelle la partie régulière du  $DL_n$  de  $f$  en  $a$ .

**Définition - DL en  $\infty$**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $I = [a, +\infty[$ . On dit que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de  $+\infty$  s'il existe un polynôme

$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$  tel que

$$\begin{aligned} \forall x \in I, f(x) &= P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \\ &= a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right). \end{aligned}$$

**Remarque - Ecriture**

Par convention, les termes d'un développement limité sont toujours écrits dans l'ordre croissant des puissances (de  $(x-a)$  ou  $1/x$ ). Ainsi chaque terme est négligeable devant ceux qui le précèdent et chaque nouveau terme apporte une précision par rapport à ceux qui le précède.

**3.2. Propriétés**

**Théorème - Unicité**

- Si  $f$  admet un  $DL_n$  en  $a \in \mathbb{R}$  (ou en  $\infty$ ), il est unique.
- Si  $f$  admet un  $DL_n$  en  $a$ , alors  $f$  admet un  $DL_p$  en  $a \in \mathbb{R}$  (ou en  $\infty$ ) pour tout  $p \leq n$  obtenu en tronquant la partie régulière à la puissance  $p$  (c'est-à-dire en enlevant les monômes de degré  $> p$  du polynôme).

**Démonstration**

**◆ Pour aller plus loin - Linéarisation d'une équation différentielle**

Supposons que l'on doit résoudre une équation différentielle d'inconnue  $y$  mais qui n'est pas linéaire.

On peut l'écrire sous la forme  $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  si elle est d'ordre  $n$ .

Imaginons qu'on connaît une solution  $\tilde{y}$  du problème.

On cherche alors une autre solution dans son voisinage :  $y(t) = \tilde{y}(t) + \epsilon(t)$ . On a alors :  $F(\tilde{y} + \epsilon, \tilde{y}' + \epsilon', \dots, \tilde{y}^{(n)} + \epsilon^{(n)}) = 0$ . Or cette équation peut **se linéariser** : on fait un  $DL_1$  de  $F$  au voisinage de  $\tilde{y}$ , cela conduit à une équation différentielle **linéaire** d'ordre  $n$ .

On connaît des méthodes de résolution...

**◆ Pour aller plus loin - Linéarisation d'une équation différentielle (suite)**

Considérons (par hasard...) le problème :  $y'' + a \sin(y) = 0$ .

Une solution est  $\tilde{y} : t \mapsto 0$ . Une solution approchée est  $y = \tilde{y} + \epsilon$ .

On a donc  $\sin(y) = \sin(0 + \epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^3}{6} + o(\epsilon^4)$ .

Donc si  $\epsilon$  reste proche de 0 :  $y'' - ay = o(y)$  et donc une solution approchée est  $y = A \sin(\sqrt{a}t + \varphi)$ .

Les solutions sont de la forme :  $t \mapsto A \sin(\sqrt{a}t + \varphi) + o(t)$ ...

**Corollaire - Lien avec la parité**

Soit  $f$  définie sur un voisinage de 0.

- Si  $f$  admet en 0 un  $DL_n$ ,  $f(x) = P(x) + o(x^n)$ , alors  $g : x \mapsto f(-x)$  admet en 0 le  $DL_n$

$$g(x) = P(-x) + o(x^n).$$

- Si  $f$  admet un  $DL_n$  en 0 et  $f$  paire (resp.  $f$  impaire) alors le  $DL$  ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

**Démonstration****Proposition - Limites et équivalents**

- Si  $f$  admet un  $DL_n$  en  $a \in \mathbb{R}$  alors  $f$  est continue ou prolongeable par continuité en  $a$ , avec  $f(a) = a_0$ .
- Si  $n \geq 1$ ,  $f$  (ou son prolongement) est dérivable en  $a$ , de dérivée  $a_1$ .
- Le premier (si les puissances sont « rangées » comme il faut!) terme non nul d'un  $DL$  de  $f$  en  $a$  fournit un équivalent en  $a$ , ou encore si on a la **forme normalisée** d'un  $DL$

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_p + a_{p+1}h + \dots + a_n h^{n-p} + o(h^{n-p})) \text{ avec } a_p \neq 0 \text{ et } n \geq p$$

$$\text{alors } f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_p h^p.$$

**Remarque - Généralisation en  $+\infty$** 

En  $\infty$ , si  $f$  admet un  $DL_n$  alors  $f$  admet  $a_0$  pour limite et le premier (si les puissances sont « rangées » comme il faut!) terme non nul d'un  $DL$  de  $f$  en  $\infty$  fournit un équivalent.

**Démonstration**

**⚠ Attention - A ne pas généraliser pour  $f^{(2)}(a)$** 

⚡ Cela ne se généralise pas aux dérivées suivantes.

⚡ Contre-exemple : Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) =$

$$\begin{cases} x^{100} \sin \frac{1}{x^{100}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{Alors } f \text{ admet un } DL_{99} \text{ en } 0 \text{ (} f(x) = 0 + o(x^{99}) \text{)}$$

⚡ mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

**🔑 Savoir faire - Obtenir un  $DL_n(a)$  d'une fonction  $f$** 

On se ramène usuellement en 0 :

- Pour obtenir un  $DL_n$  en  $a$  de  $f$ , on pose  $h = x - a$ , on effectue un  $DL_n$  en 0 de  $g(h) = f(a + h)$  puis on remplace  $h$  par  $x - a$ .
- Pour obtenir un  $DL_n$  en  $\infty$  de  $f$ , on pose  $t = 1/x$ , on effectue un  $DL_n$  en 0 de  $g(t) = f(1/t)$  puis on remplace  $t$  par  $1/x$ .

Il suffit donc de savoir obtenir les  $DL_n(0)$

**3.3. Existence de développements limités**

On cherche maintenant les  $DL_n(0)$  des fonctions usuelles.

**Théorème - Premières formules**

Les fonctions  $\frac{1}{1-x}$  et  $\frac{1}{1+x}$  admettent des  $DL_n$  en 0 pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donnés par :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

**Démonstration****Proposition - Primitivation**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant 0 et  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. On suppose que  $F'$  admet un  $DL_n$  en 0

$$F'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors  $F$  admet en 0 le  $DL_{n+1}$  (obtenu en primitivant celui de  $F'$ )

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

**Exercice**

Donner le  $DL_n(0)$  de  $x \mapsto \ln(1+x)$

**Démonstration**

**Corollaire -**

$$\operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

**Démonstration****⚠ Attention - Mais on ne peut pas dériver!!**

Si  $f$  est dérivable, l'existence d'un  $DL_n$  pour  $f$  n'implique pas l'existence d'un  $DL_{n-1}$  pour  $f'$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} x^{100} \sin \frac{1}{x^{100}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  Alors  $f$  admet un  $DL_{99}$  en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

**⊛ Remarque - Mais tout n'est pas perdu...**

En revanche si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ , alors  $f'$  est de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  et le  $DL_{n-1}$  de  $f'$  est obtenu par dérivation du  $DL_n$  de  $f$ .  
(son intégration doit correspondre avec celui de  $f$  (unicité))

**Théorème - Formule de Taylor-Young**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une application de  $I$  dans  $K$ ,  $n$  fois dérivable en  $a \in I$ .

Alors il existe  $\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in I$  on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0.$$

**Démonstration**

**⚠ Attention - Ne pas en dire trop**

- ⌘ Cette formule donne uniquement un résultat **local**, elle NE sert donc
- ⌘ QU'à préciser la fonction  $f$  au voisinage de  $a$ .

**Corollaire - Condition suffisante simple**

Toute fonction  $n$  fois dérivable en  $a$  admet un  $DL_n$  en  $a$ , donné par la formule de Taylor-Young.

Ce résultat permet de retrouver les DL précédemment obtenus, mais également ceux d'autres fonctions usuelles :

**Proposition - Développements limités usuels en 0**

On a les résultats suivants (à connaître parfaitement)

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}) \text{ (ou } o(x^{2p+1}))$$

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1}) \text{ (ou } o(x^{2p+2}))$$

$$\operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}) \text{ (ou } o(x^{2p+1}))$$

$$\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1}) \text{ (ou } o(x^{2p+2}))$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1) \frac{x^2}{2!} + \dots + \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \quad (\alpha = \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \quad (\alpha = -\frac{1}{2})$$

---

**Démonstration**



**Remarque - Composition de DL = composition de polynômes**

En fait, on remarque que dans plusieurs cas, l'enjeu des composés des développements limités, il s'agit donc d'appliquer des formules de composition de polynômes. Or, on a vu que cela n'était pas vraiment une chose facile... On reviendra sur cette remarque un peu plus loin...

**Exercice**

Terminer la démonstration pour obtenir le DL d'ordre 4 de  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

**Savoir faire - DL des fonctions de référence en une autre valeur**

Supposons que  $x \rightarrow a$  pour  $x \rightarrow a$ . Alors  $h = x - a \rightarrow 0$ . On a respectivement :

- $\exp(x) = \exp(a+h) = e^a \times \exp(h) = e^a(1+h+\frac{h}{2}+\dots)$
- $\ln(x) = \ln(a+h) = \ln(a(1+\frac{h}{a})) = \ln a + \frac{h}{a} - \frac{h^2}{2a^2} + \dots$
- $\cos(x) = \cos(a+h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h = \cos a(1 - \frac{h^2}{2} + \dots) - \sin a(h - \frac{h^3}{6} + \dots)$
- $\operatorname{sh}(x) = \operatorname{sh}(a+h) = \operatorname{sh}(a) \operatorname{ch} h + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} h \dots$  (à démontrer)
- $x^\alpha = (a+h)^\alpha = a^\alpha \times (1+\frac{h}{a})^\alpha = a^\alpha(1 + \alpha\frac{h}{a} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{h^2}{a^2} + \dots)$

### 3.4. Opérations

**Proposition - Combinaison linéaire**

Si  $f$  et  $g$  admettent en  $a$  des  $DL_n$  alors pour  $\lambda, \mu \in K$ ,  $\lambda f + \mu g$  admet un  $DL_n$  en  $a$ , obtenu en faisant la combinaison linéaire correspondante des  $DL_n$ .

(résultat encore valable en  $\infty$ )

**Démonstration**

**Exercice**

Donner un  $DL_3$  en 0 de  $\cos x + 2 \sin(-x)$ .

**Proposition - Produit**

Si  $f$  et  $g$  admettent des  $DL_n$  en  $a$  alors  $fg$  admet un  $DL_n$  en  $a$  obtenu en multipliant les  $DL_n$  de  $f$  et de  $g$  et en supprimant les termes de degré  $> n$  (termes non significatifs).

(résultat encore valable en  $\infty$ )

**Démonstration**

**Remarque - Multiplication de polynôme**

Si les parties régulières des  $DL_n$  de  $f$  et  $g$  sont des polynômes de valuation strictement positive, le produit des  $DL_n$  de  $f$  et  $g$  donne un  $DL$  d'ordre strictement supérieur à  $n$ , mais dont on ne peut rien dire pour  $k > n$ .

Il s'agit d'une multiplication polynomiale.

**Exercice**

Donner le  $DL_3$  en 0 de  $e^x \sqrt{1+x}$  et le  $DL_4$  en 0 de  $\sin^2 x$ .

**Proposition - Composition**

Soient  $f : I \rightarrow K$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant 0 et  $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\phi(J) \subset I$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 0$ .

On suppose que  $f$  admet un  $DL_n$  en 0,  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)$ , et que  $\phi$  admet un  $DL_n$  en 0,  $\phi(x) = b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n)$ . Alors  $f \circ \phi$  admet un  $DL_n$  en 0, obtenu en écrivant

$$f \circ \phi(x) = a_0 + a_1(b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n)) + a_2(b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n))^2 + \dots + a_n(b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n))^n + o(x^n)$$

en développant et en supprimant les termes de degré  $> n$  (termes non significatifs).

**Remarque - Comment s'y prendre**

En fait il s'agit, là aussi, des opérations sur les polynômes (en l'occurrence la composition), puis une troncature.

Il faut bien prendre initialement des  $DL$  d'ordre  $n$  de  $f$  et  $\phi$  pour obtenir un  $DL_n$  de  $f \circ \phi$ .

Il s'agit encore d'une composition de polynômes, ce qui donne bien un polynôme!

**Démonstration****Exercice**

Donner un  $DL_4$  en 0 de  $\ln(\cos x)$ .

**Proposition - Inverse**

Si  $f$  admet un  $DL_n$  en 0,  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$ , et  $f(0) = a_0 \neq$

**Pour aller plus loin - Intérêt des polynômes**

En début d'année, on a vu que l'intérêt des fonctions polynomiales n'était pas dans le fait que la somme ou le produit de fonctions polynomiales donne une fonction polynomiale, mais bien dans la stabilité par composition.

0 alors  $\frac{1}{f}$  admet un  $DL_n$  en 0 obtenu en écrivant

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{f(0)} \times \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \dots + \frac{a_n}{a_0}x^n + o(x^n)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{f(0)} \times \left( 1 - u(x) + u(x)^2 + \dots + (-1)^n u(x)^n + o(u(x)^n) \right) \\ \text{où } u(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \dots + \frac{a_n}{a_0}x^n + o(x^n), \end{aligned}$$

en développant et en supprimant les termes de degré  $> n$  (termes non significatifs).

En fait, il s'agit d'un corollaire de la proposition précédente. Il faut plus le prendre comme un savoir-faire.

#### Exercice

Donner le  $DL_5$  en 0 de  $\tan x$ .

#### Corollaire - $DL_3(0)$ de $\tan$

$$\tan x \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

#### 💡 Truc & Astuce pour le calcul - Méthode (Bilan)

Pour faire le  $DL_n(a)$  de  $f$ .

- On évalue (rapidement) la valeur numérique de  $f(a)$  (elle peut être nulle ou non).  
On garde le résultat auprès de soi.
- On fait le changement de variable
  - $x = a + h$  avec  $x \rightarrow a$  ssi  $h \rightarrow 0$  pour  $a \in \mathbb{R}$
  - $x = \frac{1}{y}$  avec  $x \rightarrow \infty$  ssi  $y \rightarrow 0$  pour  $a = \pm\infty$
- On factorise par  $f(a)$ .  
Selon la nature de  $f$ , il peut y avoir des simplification.  
Normalement, on retrouve nécessairement des  $DL_n(0)$  connus de fonctions de référence.
- Il peut y avoir des compositions :  $(1 + U)^n$  ou  $\frac{1}{1 + U}$ ,  $\ln(1 + U)$ ...  
avec  $U(h) \underset{h \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ .  
On exploite les résultats de composition, avec  $U$ , dans un premier temps, remplacé ensuite par sa valeur.
- Beaucoup de développements. On fait comme d'habitude : on n'écrit pas trop, et on associe directement les coefficients associés au même monôme  $h^k$ .

### 3.5. Généralisation

#### Définition - Développement limité généralisé

On dit que  $f$  admet un développement limité généralisé à l'ordre  $n$  s'il existe  $Q, R \in K[X]$ ,  $P, S \in K_n[X]$  tels que :

$$\begin{aligned} \text{en } 0, f(x) &= Q\left(\frac{1}{x}\right) + P(x) + o(x^n) \\ \text{en } \pm\infty, f(x) &= R(x) + S\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  ( $= \deg Q$  ou  $\deg R$ ) tel que,  $x^p f(x) \in 0, \frac{1}{x^p} f(x)$  en  $\pm\infty$ , admette un  $DL_{n+p}$

 **Exemple - Retour sur l'exemple original :**  $\frac{e^x-1}{\sin x}$  autour de  $x = -\pi$

#### Définition - Développement asymptotique

On dit que  $f$  admet un développement asymptotique en  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  si  $f$  peut s'écrire

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + o(f_n(x))$$

où pour tout  $k$ ,  $f_k(x) = o(f_{k-1}(x))$ .

On peut par exemple avoir  $f_k(x) = g(x)^k$  où  $g(x)$  est une fonction qui tend vers 0 en  $a$  ( $g(x) = x^\alpha$  en 0 ( $\alpha > 0$ ),  $g(x) = e^{-x}$  en  $+\infty$ ...).

$f_n(x)$  s'appelle la précision du DA.

#### Exercice

Déterminer un DA en 0 de  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  à la précision  $x \ln x$ , puis à la précision  $x^3$ .

## 4. Applications des DL

### 4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)

#### Savoir faire - La force des développements limités

Les DL permettent d'avoir un équivalent (premier terme non nul) et, contrairement aux équivalents, ils peuvent être additionnés. C'est donc un outil "plus sûr" dans son maniement. L'équivalent permet ensuite d'avoir la limite.

On commence toujours par se ramener en 0 pour utiliser les DL usuels.

#### Exercice

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1+x^2} - \cos x \right) \frac{1}{x^2}$ .

#### Exercice

Déterminer un équivalent de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$ .

Exercice

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left( \tan \frac{3x}{2} \right)^{\frac{1}{\cos 3x}}$ .

**4.2. Etude locale d'une fonction****✂ Savoir faire - Etude locale d'une courbe au voisinage d'un point**

Les DL permettent d'avoir directement des résultats sur le comportement local d'une fonction plus précis que la limite ou l'équivalent en un point.

**Tangentes et position, extremum local****Proposition - Exploitation graphique d'un DL en  $a$** 

Si  $f$  admet en  $a$  un  $DL_k$  ( $k \geq 2$ ) de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_k(x-a)^k + o((x-a)^k)$$

alors  $f$  est prolongeable par continuité en  $a$ , de prolongement dérivable en  $a$ , l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $a$  est  $y = a_0 + a_1(x-a)$ , le signe de  $a_k$  et la parité de  $k$  donnent, localement, au voisinage de  $a$ , les positions relatives de la tangente et de la courbe, des conditions pour avoir un extremum local.

**STOP Remarque - « Seulement » un DL d'ordre 1**

Un  $DL_1$  donne le prolongement par continuité, la dérivabilité et l'équation de la tangente, mais ne permet pas d'avoir les positions relatives de la tangente et de la courbe car le signe de  $o(x-a)$  est inconnu.

Exercice

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^2-1}{x \ln x}$ . Quel est son domaine de définition ?

Montrer qu'elle se prolonge de manière continue et dérivable en 1. Donner l'équation de la tangente ainsi que les positions relatives de la tangente et de la courbe.

Préciser également le comportement de  $f$  aux autres bornes du domaine de définition.

**Asymptotes et position****Proposition - Exploitation graphique d'un DL en  $\infty$** 

Si  $f$  admet en  $\infty$  un développement limité généralisé d'ordre  $k$  ( $k \geq 1$ ) de la forme

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$$

alors  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote d'équation  $y = ax + b$ , le signe de  $c$  et la parité de  $k$  donnent, localement, au voisinage de  $+\infty$  ou  $-\infty$ , les positions relatives de l'asymptote et de la courbe.

**STOP Remarque - « Seulement » un DL d'ordre 0**

Un développement limité généralisé à l'ordre 0 donne l'asymptote, mais ne permet pas d'avoir les positions relatives de la tangente et de la courbe.

Exercice

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = (x^2-1) \ln \frac{x-1}{x+1}$ .

Quel est son domaine de définition ?

Montrer que  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote en  $+\infty$  dont on donnera l'équation ainsi que la position relative par rapport à la courbe.

## 5. Bilan

### Synthèse

↔ Nous apprenons ici à remplacer localement une fonction par une expression plus simple (polynomiale la plupart du temps) et facile à étudier.

Cela est assez technique et calculatoire, mais également très puissant!

On commence toujours par se demander où est-ce qu'on se trouve!

### Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Savoir-faire - Avec une fonction « relative »
- Savoir-faire - Etude de négligeabilité/équivalence/domination... d'une suite.
- Savoir-faire - Obtenir un  $DL_n(a)$  d'une fonction  $f$
- Savoir-faire - DL des fonctions de références en d'autres points (que 0)
- Truc & Astuce pour le calcul - Méthode (Bilan)
- Savoir-faire - La force des développements limités
- Savoir-faire - Etude locale d'une courbe au voisinage d'un point

### Notations

Notations	Définitions	Propriétés	Remarques
$\mathcal{Z}(g)$	Ensemble des racine de $g$	$\mathcal{Z}(g) = g^{-1}(\{0\}) = \{g = 0\} = \{x \mid g(x) = 0\}$	
$f \underset{a}{=} o(g)$	$f$ est négligeable devant $g$ au voisinage de $a$	$\forall \epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid \forall x \in V,  f(x)  \leq \epsilon  g(x) $	si $\mathcal{Z}(g) \cap V \subset \mathcal{Z}(f)$ , équivalent à $\lim_{x \rightarrow a, x \notin \mathcal{Z}(g)} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
$f \underset{a}{\sim} g$	$f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $a$	$\forall \epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid \forall x \in V,  f(x) + g(x)  \leq \epsilon  g(x) $	si $\mathcal{Z}(g) \cap V \subset \mathcal{Z}(f)$ , équivalent à $\lim_{x \rightarrow a, x \notin \mathcal{Z}(g)} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
$f \underset{a}{=} O(g)$	$f$ est dominée par $g$ au voisinage de $a$	$\exists M > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid \forall x \in V,  f(x)  \leq M  g(x) $	si $\mathcal{Z}(g) \cap V \subset \mathcal{Z}(f)$ , équivalent à $\frac{f(x)}{g(x)}$ bornée sur $\mathcal{Z}(g) \cap V$
$DL_n(a)$ de $f$	Développement limité d'ordre $n$ de $f$ au voisinage de $a$	$\exists P \in \mathbb{R}_n[X] \mid f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n)$	

### Retour sur les problèmes

147.  $f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x}$ .

Au voisinage de 0 :  $e^x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$  et  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ . On simplifie par  $x$ .

$$f(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)}{1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)}$$

$$= (1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3))(1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^3))$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + o(x^2).$$

Au voisinage de  $-\pi$  :  $\sin(x) = \sin(-\pi + h) = -\sin h = -h + \frac{1}{6}h^3 + o(h^4)$ .  
 $e^x - 1 = e^{-\pi+h} - 1 = e^{-\pi}e^h - 1 = e^{-\pi}(1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + o(h^3)) - 1$ .

$$f(x) = \frac{-1 e^{-\pi} - 1 + e^{-\pi}h + \frac{e^{-\pi}}{2}h^2 + \frac{e^{-\pi}}{6}h^3 + o(h^3)}{h - \frac{1}{6}h^2 + o(h^3)}$$

$$= \frac{1 - e^{-\pi}}{h} - e^{-\pi} + \frac{1-4e^{-\pi}}{6}h + o(h)$$