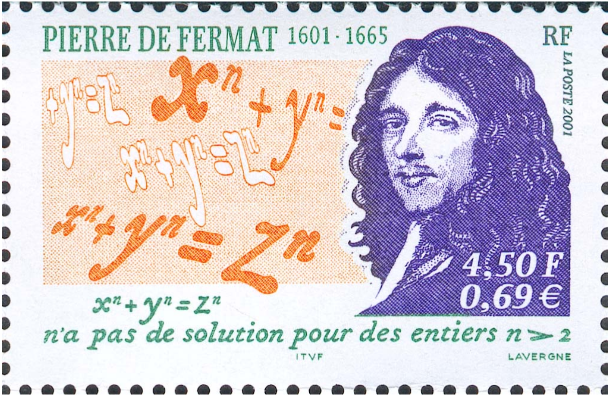

Leçon 32 - Construction d'ensembles numériques

20 novembre 2024

⇒ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

⇒ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

Problèmes

Problème Construction des entiers naturels

Problèmes

Problème Construction des entiers naturels

Problème Construction des entiers relatifs, des rationnels

Problèmes

Problème Construction des entiers naturels

Problème Construction des entiers relatifs, des rationnels

Problème Construction des réels (1)

Problèmes

Problème Construction des entiers naturels

Problème Construction des entiers relatifs, des rationnels

Problème Construction des réels (1)

Problème Construction des réels (2)

Problèmes

Problème Construction des entiers naturels

Problème Construction des entiers relatifs, des rationnels

Problème Construction des réels (1)

Problème Construction des réels (2)

Problème Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

⇒ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

Nombres entiers naturels

On commence par admettre la construction de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Nombres entiers naturels

On commence par admettre la construction de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Heuristique. Nombres entiers naturels

La construction suivante est dûe à Péano. Soit E un ensemble non vide, possédant un élément de référence et dont tous les éléments ont un unique successeur (différent de l'élément de référence).
Cet élément de référence se note 0 (ou 1, selon). Puis on définit l'addition $+1$ comme le passage d'un nombre à son successeur.
On a ainsi les bases pour un raisonnement par récurrence et l'ensemble des entiers.
Ce qui suit est en fait assez naturel, même si cela peut paraître un peu compliqué la première fois qu'on le voit...

Nombres entiers naturels. PEANO

Théorème - Construction de PÉANO

Il existe un ensemble $\mathbb{N}$ non vide, munie d'une loi s (comme successeur) telle que :

- $\mathbb{N}$ étant non vide, il admet une élément premier noté 0.
- Pour tout élément $a \in \mathbb{N}$, il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = s(a)$.
- s est injective $(s(a) = s(a') \Rightarrow a = a')$

Nombres entiers naturels. PEANO

Théorème - Construction de PÉANO

Il existe un ensemble $\mathbb{N}$ non vide, munie d'une loi s (comme successeur) telle que :

- $\mathbb{N}$ étant non vide, il admet une élément premier noté 0.
- Pour tout élément $a \in \mathbb{N}$, il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = s(a)$.
- s est injective $(s(a) = s(a') \Rightarrow a = a')$

Remarque Addition $+1$

Nombres entiers naturels. PEANO

Proposition - Opérations sur $\mathbb{N}$

On définit l'addition sur $\mathbb{N}$ par : $a+b=s^a(0)+s^b(0)=s^{a+b}(0)$.

On a $a+b=b+a$.

La multiplication est alors la répétition de l'addition :

$a\times b=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{b \text{ fois}}$

On a $a\times b=b\times a$.

Nombres entiers naturels. PEANO

Proposition - Opérations sur $\mathbb{N}$

On définit l'addition sur $\mathbb{N}$ par : $a+b = s^a(0) + s^b(0) = s^{a+b}(0)$.

On a $a+b = b+a$.

La multiplication est alors la répétition de l'addition :

$$a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ fois}}$$

On a $a \times b = b \times a$.

Proposition - Relation d'ordre

$\mathbb{N}$ est naturellement ordonné (récursivement) :

$$\forall\ a \in \mathbb{N}, 0 \leqslant a \qquad \text{et} \qquad a \leqslant b \Longleftrightarrow s^{-1}(a) = s^{-1}(b)$$

Relation d'ordre sur $\mathbb{N}$

Il existe un algorithme qui termine, permettant de connaître le plus petit entre a et b.

Relation d'ordre sur $\mathbb{N}$

Il existe un algorithme qui termine, permettant de connaître le plus petit entre a et b.

Python - Ordre

```python
def petit(a,b):
    c,d=a,b
    while c>0 and d>0 :
        c,d=c-1,d-1
    if c==0:
        return(a)
    else :
        return(b)
```

Relation d'ordre sur $\mathbb{N}$

Il existe un algorithme qui termine, permettant de connaître le plus petit entre a et b.

Python - Ordre

```python
def petit(a,b):
    c,d=a,b
    if c==0 :
        return(a)
    elif d==0 :
        return(b)
    else :
        petit(c-1,d-1)
```

Nombres entiers naturels

Ensuite on construit l'ensemble des entiers relatifs. On propose ici un exercice.

Nombres entiers naturels

Ensuite on construit l'ensemble des entiers relatifs. On propose ici un exercice.

Heuristique - Problématique

La problématique : l'addition à trou (ou recherche d'une opération réciproque) n'est qu'à moitié possible. En effet, elle dépend de la relation d'ordre entre les nombres soustraits.
Il faut donc créer un premier ensemble, afin que toute soustraction de nombres entiers soit possible.
Mais certaines soustractions peuvent conduire à un « même »résultat

Nombres entiers naturels

<u>Exercice</u>

Sur $\mathbb{N}^2$,

1. Montrer que $\sim_1$ définie par :

$$(a,b)\sim_1(c,d) \quad \Longleftrightarrow \quad a+d=c+b$$

   est une relation d'équivalence.
2. Montrer que tout couple (a,b) est dans la classe d'un couple $(0,d)$ ou $(d,0)$ selon que $a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$
3. En déduire la construction de $\mathbb{Z}$ comme équivalent à l'ensemble $\dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$

Nombres entiers naturels

Exemple Le nombre -2

Nombres entiers naturels

Exemple Le nombre -2

Proposition - Opération sur $\mathbb{Z}$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'ensemble $\dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ (des classes d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$ de la loi $\sim_1$).
On définit alors la relation d'ordre $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ par :

$$\overline{(a,b)} \leqslant_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} \Longleftrightarrow a+d \leqslant_{\mathbb{N}} c+b$$

L'addition est alors simplement : $\overline{(a,b)} +_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} = \overline{(a +_{\mathbb{N}} c, b +_{\mathbb{N}} d)}$
La multiplication est plus compliquée :
$\overline{(a,b)} \times_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} = \overline{(a \times_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} b \times_{\mathbb{N}} d, b \times_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} a \times_{\mathbb{N}} d)}$

Nombres entiers naturels

Exemple Le nombre -2

Proposition - Opération sur $\mathbb{Z}$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'ensemble $\dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ (des classes d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$ de la loi $\sim_1$).
On définit alors la relation d'ordre $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ par :

$$\overline{(a,b)} \leqslant_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} \Longleftrightarrow a+d \leqslant_{\mathbb{N}} c+b$$

L'addition est alors simplement : $\overline{(a,b)} +_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} = \overline{(a +_{\mathbb{N}} c, b +_{\mathbb{N}} d)}$
La multiplication est plus compliquée :
$\overline{(a,b)} \times_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} = \overline{(a \times_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} b \times_{\mathbb{N}} d, b \times_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} a \times_{\mathbb{N}} d)}$

Remarque La difficulté : l'indépendance au représentant

Nombres entiers naturels

Exemple Multiplication

Nombres entiers naturels

Exemple Multiplication

Démonstration

Nombres entiers naturels

Exemple Multiplication

Démonstration

Exercice

Montrer que l'ordre est total.

⇒ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

⇒ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

Construction de $\mathbb{Q}$

La construction de $\mathbb{Q}$ est en tout point équivalente à la construction de $\mathbb{Z}$, mais pour un problème lié à la multiplication (et donc division) au lieu de l'addition (et donc la multiplication).

Construction de $\mathbb{Q}$

La construction de $\mathbb{Q}$ est en tout point équivalente à la construction de $\mathbb{Z}$, mais pour un problème lié à la multiplication (et donc division) au lieu de l'addition (et donc la multiplication).

Exercice

Sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$,

1. Montrer que $\sim_2$ définie par :

$$(a,b) \sim_2 (c,d) \quad \Longleftrightarrow \quad a \times_{\mathbb{Z}} d = c \times_{\mathbb{Z}} b$$

   est une relation d'équivalence.
2. Montrer la construction de $\mathbb{Q}$ comme équivalent à l'ensemble $\dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}}{\sim_2}$
3. Montrer que $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ définie par $(a,b) \leqslant_{\mathbb{Q}} (c,d)$ ssi $a \times_{\mathbb{Z}} d \leqslant_{\mathbb{Z}} b \times_{\mathbb{Z}} c$ définie bien une relation d'ordre total sur $\mathbb{Q}$
4. Comment définir $+_{\mathbb{Q}}$ et $\times_{\mathbb{Q}}$

Corps $\mathbb{Q}$

Il faudrait vérifier que $\mathbb{Q}$ est bien un corps (addition, multiplication inversible) compatible avec $\leqslant_Q$. Cela se fait sans grande difficultés...

Corps $\mathbb{Q}$

Il faudrait vérifier que $\mathbb{Q}$ est bien un corps (addition, multiplication inversible) compatible avec $\leqslant_Q$. Cela se fait sans grande difficultés...

Proposition - Opération sur $\mathbb{Q}$

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est l'ensemble $\dfrac{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}{\sim_2}$ (des classes d'équivalence sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ de la loi $\sim_2$).
On définit alors la relation d'ordre $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ par :

$$\overline{(a,b)} \leqslant_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)} \Longleftrightarrow a\times_{\mathbb{Z}} d \leqslant_{\mathbb{Z}} c\times_{\mathbb{Z}} b$$

La multiplication est alors simplement :
$\overline{(a,b)}\times_{\mathbb{Q}}\overline{(c,d)} = \overline{(a\times_{\mathbb{Z}} c, b\times_{\mathbb{Z}} d)}$ L'addition est plus compliquée :
$\overline{(a,b)}+_{\mathbb{Q}}\overline{(c,d)} = \overline{(a\times_{\mathbb{Z}} d +_{\mathbb{Z}} b\times_{\mathbb{Z}} c, b\times_{\mathbb{Z}} d)}$
L'ordre est total (démonstration comme pour $\leqslant_{\mathbb{Z}}$).

⇒ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

⇒ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

Nombre par équation

La plupart du temps les nombres se définissent par une phrase, qui elle même se traduit en une équation (polynomiale).

Nombre par équation

La plupart du temps les nombres se définissent par une phrase, qui elle même se traduit en une équation (polynomiale).
On définit alors

Défintion - Nombre algébrique

Un nombre r est un nombre algébrique si il existe une fonction polynomiale P à coefficients entiers telle que $P(r) = 0$.
Si n est le plus petit degré d'un polynôme vérifiant cette relation, on dit que r est algébrique d'ordre n

Nombre par équation

La plupart du temps les nombres se définissent par une phrase, qui elle même se traduit en une équation (polynomiale).
On définit alors

Défintion - Nombre algébrique

Un nombre r est un nombre algébrique si il existe une fonction polynomiale P à coefficients entiers telle que $P(r) = 0$.
Si n est le plus petit degré d'un polynôme vérifiant cette relation, on dit que r est algébrique d'ordre n

Exemple Nombres rationnels

Nombre par équation

La plupart du temps les nombres se définissent par une phrase, qui elle même se traduit en une équation (polynomiale).
On définit alors

Défintion - Nombre algébrique

Un nombre r est un nombre algébrique si il existe une fonction polynomiale P à coefficients entiers telle que $P(r) = 0$.
Si n est le plus petit degré d'un polynôme vérifiant cette relation, on dit que r est algébrique d'ordre n

Exemple Nombres rationnels
Exemple Nombres quadratiques

Nombres transcendants

D'autres nombres, toujours « naturels »ne s'expriment pas à partir d'une équation polynomiale à coefficients entiers. C'est le cas de π ou de e.

Nombres transcendants

D'autres nombres, toujours « naturels »ne s'expriment pas à partir d'une équation polynomiale à coefficients entiers. C'est le cas de π ou de e.

Définition - Nombre transcendant

Si r n'est pas algébrique, on dit qu'il est transcendant.

⇒ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

⇒ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

Rappel

Heuristique. Un principe : les coupures de DEDEKIND. Rappe

$\mathbb{Q}$ est un ensemble (corps), relativement naturel, muni d'une relation d'ordre totale $\leqslant$.
$\mathbb{R} \sim \mathscr{C}(\mathbb{Q})$ où ce dernier est l'ensemble des sections ouvertes commençantes sur $\mathbb{Q}$.

$$\mathscr{C}(\mathbb{Q}) = \left\{T \subset \mathbb{Q} \mid \forall\ a \in T, b \leqslant a \Rightarrow b \in T \,\&\, \nexists\ m \in \mathbb{Q} \text{ tel que } T = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant m\}\right\}$$

L'addition est assez naturellement prolongé, ainsi que la relation d'ordre total.
La multiplication par des positifs est simple, ensuite c'est la règle des signes.
On obtient ensuite quelques résultats topologiques, nouveaux principes de bases ici. Cela est fondamentalement lié au fait qu'il existe des rationnels infiniment proche.

⇒ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

⇒ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

Valeur absolue

Définition - Valeur absolue

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (plus grand des deux réels x et $-x$).

$d(x, y) = |x - y|$ mesure la distance entre deux réels x et y de la droite réelle.

Valeur absolue

Définition - Valeur absolue

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (plus grand des deux réels x et $-x$).

$d(x,y) = |x-y|$ mesure la distance entre deux réels x et y de la droite réelle.

Définition - Partie positive, partie négative

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $x^+ = \max(x, 0)$ (partie positive du réel x)

et $x^- = \max(-x, 0)$ (partie négative du réel x).

Ces deux réels sont POSITIFS.

Réécriture et encadrement

<u>Exercice</u>

Ecrire $|x|$ en fonction de x^+ et x^-.

Ecrire x^+ en fonction de $|x|$ et de x.

Réécriture et encadrement

Exercice

Ecrire $|x|$ en fonction de x^+ et x^-.
Ecrire x^+ en fonction de $|x|$ et de x.

Proposition - Encadrements à connaître

$$|x| \leqslant M \iff -M \leqslant x \leqslant M$$

$$|x| \geqslant M \iff (x \geqslant M \text{ ou } x \leqslant -M)$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| = |x|\,|y|$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, d(x,y) \geqslant d(|x|,|y|) \text{ ou } |x-y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$$

Réécriture et encadrement

Exercice

Ecrire $|x|$ en fonction de x^+ et x^-.

Ecrire x^+ en fonction de $|x|$ et de x.

Proposition - Encadrements à connaître

$$|x| \leqslant M \iff -M \leqslant x \leqslant M$$

$$|x| \geqslant M \iff (x \geqslant M \text{ ou } x \leqslant -M)$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| = |x|\,|y|$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, d(x,y) \geqslant d(|x|,|y|) \text{ ou } |x-y| \geqslant \Big||x| - |y|\Big|$$

Démonstration

Corps archimédien et partie entière

Lemme - Lemme d'Archimède

Comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ est archimédien :

$$\forall\ (a,A) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \qquad \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \times a \geqslant A$$

Corps archimédien et partie entière

Lemme - Lemme d'Archimède

Comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ est archimédien :

$$\forall\ (a, A) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \qquad \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \times a \geqslant A$$

Démonstration

Corps archimédien et partie entière

Lemme - Lemme d'Archimède

Comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ est archimédien :

$$\forall\ (a,A)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+,\qquad \exists\ n\in\mathbb{N}\ \text{tel que}\ n\times a\geqslant A$$

Démonstration

Défintion - Partie entière

Soit $x\in\mathbb{R}$. Il existe un unique $n\in\mathbb{Z}$ vérifiant $n\leqslant x<n+1$.
n s'appelle la partie entière de x, on la note $\lfloor x\rfloor$. On a donc

$$\lfloor x\rfloor\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1\quad\text{et}\quad x-1<\lfloor x\rfloor\leqslant x.$$

Corps archimédien et partie entière

Lemme - Lemme d'Archimède

Comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ est archimédien :

$$\forall\ (a, A) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \qquad \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \times a \geqslant A$$

Démonstration

Défintion - Partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $n \leqslant x < n+1$.
n s'appelle la partie entière de x, on la note $\lfloor x \rfloor$. On a donc

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

Démonstration

Applications

Exercice

Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

En déduire la partie entière du réel $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\,000}}$.

Applications

<u>Exercice</u>

Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

En déduire la partie entière du réel
$A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\,000}}$.

Savoir-faire. Travailler avec la partie décimale

Fréquemment, on exploite également la fonction partie décimale $\theta : \theta(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
On voit que $\theta(x) \in [0, 1[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Applications

Exercice

Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

En déduire la partie entière du réel $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\,000}}$.

Savoir-faire. Travailler avec la partie décimale

Fréquemment, on exploite également la fonction partie décimale $\theta : \theta(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
On voit que $\theta(x) \in [0, 1[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice

Pour tout réel x, déterminer la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

- $\mathbb{N}$ est défini par l'existence de 0 d'un successeur.

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

- $\mathbb{N}$ est défini par l'existence de 0 d'un successeur.
  Cela donne l'addition $+1$ (la récurrence) et la relation d'ordre

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

- $\mathbb{N}$ est défini par l'existence de 0 d'un successeur.
  Cela donne l'addition $+1$ (la récurrence) et la relation d'ordre
- Puis, on définit l'addition répétée et la multiplication...

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

- $\mathbb{N}$ est défini par l'existence de 0 d'un successeur.
  Cela donne l'addition $+1$ (la récurrence) et la relation d'ordre
- Puis, on définit l'addition répétée et la multiplication...
- Ensuite : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ où $(a,b) \sim_1 (c,d)$ ssi $a+d=b+c$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

- $\mathbb{N}$ est défini par l'existence de 0 d'un successeur.
  Cela donne l'addition $+1$ (la récurrence) et la relation d'ordre
- Puis, on définit l'addition répétée et la multiplication...
- Ensuite : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ où $(a,b) \sim_1 (c,d)$ ssi $a+d = b+c$.
  La relation $\leqslant$, l'addition et la multiplication se généralise

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

- $\mathbb{N}$ est défini par l'existence de 0 d'un successeur.
  Cela donne l'addition $+1$ (la récurrence) et la relation d'ordre
- Puis, on définit l'addition répétée et la multiplication...
- Ensuite : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ où $(a,b) \sim_1 (c,d)$ ssi $a+d = b+c$.
  La relation $\leqslant$, l'addition et la multiplication se généralise
- Ensuite : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}}{\sim_2}$ où $(a,b) \sim_2 (c,d)$ ssi $a \times d = b \times c$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

- $\mathbb{N}$ est défini par l'existence de 0 d'un successeur.
  Cela donne l'addition $+1$ (la récurrence) et la relation d'ordre
- Puis, on définit l'addition répétée et la multiplication...
- Ensuite : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ où $(a,b) \sim_1 (c,d)$ ssi $a+d = b+c$.
  La relation $\leqslant$, l'addition et la multiplication se généralise
- Ensuite : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}}{\sim_2}$ où $(a,b) \sim_2 (c,d)$ ssi $a \times d = b \times c$.
  La relation $\leqslant$, l'addition et la multiplication se généralise

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

- $\mathbb{N}$ est défini par l'existence de 0 d'un successeur.
  Cela donne l'addition $+1$ (la récurrence) et la relation d'ordre
- Puis, on définit l'addition répétée et la multiplication...
- Ensuite : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ où $(a,b) \sim_1 (c,d)$ ssi $a + d = b + c$.
  La relation $\leqslant$, l'addition et la multiplication se généralise
- Ensuite : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}}{\sim_2}$ où $(a,b) \sim_2 (c,d)$ ssi $a \times d = b \times c$.
  La relation $\leqslant$, l'addition et la multiplication se généralise
- Nombres algébriques : racines de polynôme à coefficients entiers.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

- Valeur absolue

Conclusion

Objifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

- Valeur absolue
- Partie positive, partie négative d'un nombre

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

⇒ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

- Valeur absolue
- Partie positive, partie négative d'un nombre
- Lemme d'Archimède puis partie entière et partie décimale

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

⇒ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 9

  4. Parties de $\mathbb{R}$ et topologie
- Exercices N°283, 282