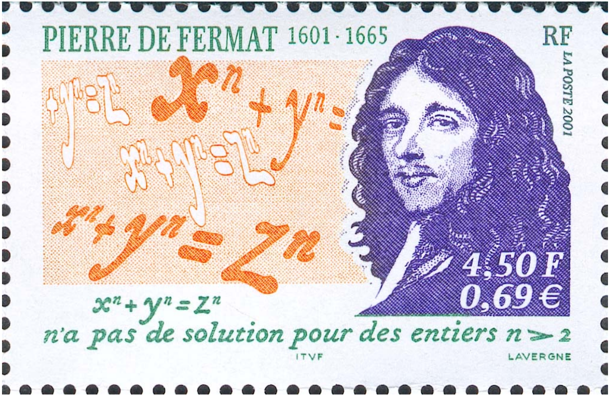

Leçon 35 - Suites numériques

26 novembre 2024

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

⇒ Convergence…

⇒ Algèbre des limites

Principe et définition

Heuristique. Expression en français

On dit qu'une suite (u_n) converge vers ℓ,

si à toute précision fixée a priori et notée ϵ,

la suite u_n est proche de ℓ à ϵ près, à partir d'un certain rang...

Principe et définition

Heuristique. Expression en français

On dit qu'une suite (u_n) converge vers ℓ,

si à toute précision fixée a priori et notée ϵ,

la suite u_n est proche de ℓ à ϵ près, à partir d'un certain rang...

Définition - Limite (réelle)

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \epsilon$$

Principe et définition

Heuristique. Expression en français

On dit qu'une suite (u_n) converge vers ℓ,

si à toute précision fixée a priori et notée ϵ,

la suite u_n est proche de ℓ à ϵ près, à partir d'un certain rang...

Définition - Limite (réelle)

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \epsilon$$

Remarque Suite convergente vers 0

Principe et définition

Heuristique. Expression en français

On dit qu'une suite (u_n) converge vers ℓ,
si à toute précision fixée a priori et notée ϵ,
la suite u_n est proche de ℓ à ϵ près, à partir d'un certain rang...

Définition - Limite (réelle)

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \epsilon$$

Remarque Suite convergente vers 0

Remarque Strict ou non

Applications

Exercice

Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite $\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)$ converge vers 0.

Applications

<u>Exercice</u>

Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge vers 0.

Attention - Dépendance de N à ϵ

On remarquera bien sur cet exercice le fait important et fréquent :

N dépend de la valeur de ϵ choisie a priori.

On pourrait noter à la physicienne : $N(\epsilon)$

Applications

<u>Exercice</u>

Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ converge vers 0.

Attention - Dépendance de N à ϵ

On remarquera bien sur cet exercice le fait important et fréquent :

N dépend de la valeur de ϵ choisie a priori.

On pourrait noter à la physicienne : $N(\epsilon)$

Proposition - Unicité de la limite

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $(u_n$ converge vers ℓ et vers ℓ' alors $\ell = \ell'$. On note alors $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Applications

Exercice

Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge vers 0.

Attention - Dépendance de N à ϵ

On remarquera bien sur cet exercice le fait important et fréquent :

N dépend de la valeur de ϵ choisie a priori.

On pourrait noter à la physicienne : $N(\epsilon)$

Proposition - Unicité de la limite

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $(u_n$ converge vers ℓ et vers ℓ' alors $\ell = \ell'$. On note alors $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Démonstration

Suites convergentes

Définition - Suites convergente

Soit (u_n) une suite réelle.
S'il existe un réel ℓ tel que la suite converge vers ℓ, on dit que (u_n) est convergente.
ℓ (unique d'après ce qui précède) est appelé la limite de la suite.

Suites convergentes

Définition - Suites convergente

Soit (u_n) une suite réelle.
S'il existe un réel ℓ tel que la suite converge vers ℓ, on dit que (u_n) est convergente.
ℓ (unique d'après ce qui précède) est appelé la limite de la suite.

Proposition - Suite convergente donc bornée

Toute suite convergente est bornée.

Suites convergentes

Définition - Suites convergente

Soit (u_n) une suite réelle.
S'il existe un réel ℓ tel que la suite converge vers ℓ, on dit que (u_n) est convergente.
ℓ (unique d'après ce qui précède) est appelé la limite de la suite.

Proposition - Suite convergente donc bornée

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

$\Rightarrow$ Convergence...

$\Rightarrow$ Algèbre des limites

Deux types de divergence

Il y a deux types de non convergence (=divergence) :

- les suites tendant vers ∞.
- les suites ne tendant vers rien (oscillante).

Deux types de divergence

Il y a deux types de non convergence (=divergence) :

- les suites tendant vers ∞.
- les suites ne tendant vers rien (oscillante).

Définition - divergente

Si la suite n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente.

Extension de la limite à $\overline{\mathbb{R}}$

On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$ ce qui donne la définition suivante.

Extension de la limite à $\overline{\mathbb{R}}$

On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$ ce qui donne la définition suivante.

Définition - Limite infinie

On dit que la suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant A.$$

On dit que la suite réelle (u_n) tend vers $-\infty$ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant A.$$

Extension de la limite à $\overline{\mathbb{R}}$

On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$ ce qui donne la définition suivante.

Définition - Limite infinie

On dit que la suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N, u_n \geqslant A.$$

On dit que la suite réelle (u_n) tend vers $-\infty$ et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N, u_n \leqslant A.$$

Remarque Limite infinie et suite divergente

Exercices

<u>Exercice</u>

Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite (n^{α}) diverge vers $+\infty$.

Exercices

Exercice

Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite (n^{α}) diverge vers $+\infty$.

Attention - Dépendance de N à A

On remarquera bien sur cet exercice le fait important et fréquent :

N dépend de la valeur de A choisie a priori.

On pourrait noter à la physicienne : $N(A)$

Exercices

Exercice

Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite (n^α) diverge vers $+\infty$.

Attention - Dépendance de N à A

On remarquera bien sur cet exercice le fait important et fréquent :

N dépend de la valeur de A choisie a priori.

On pourrait noter à la physicienne : $N(A)$

Attention - Cas pathologiques

Il existe

- des suites divergentes qui ne tendent pas vers $+\infty$ (ni vers $-\infty$) ;
- des suites non bornées qui ne divergent pas vers $+(-)\infty$.
- des suites convergentes non monotones.

Exercices

Savoir-faire. Montrer la divergence (deuxième type) d'une suite, par suites extraites

Soit (u_n) une suite réelle.
On suppose qu'il existe deux suites extraites $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' avec $\ell = \ell'$.
Alors la suite (u_n) est divergente.

Exercices

Savoir-faire. Montrer la divergence (deuxième type) d'une suite, par suites extraites

Soit (u_n) une suite réelle.
On suppose qu'il existe deux suites extraites $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' avec $\ell = \ell'$.
Alors la suite (u_n) est divergente.

Exercice

Donner des exemples de telles suites.

Exercices

Savoir-faire. Montrer la divergence (deuxième type) d'une suite, par suites extraites

Soit (u_n) une suite réelle.
On suppose qu'il existe deux suites extraites $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' avec $\ell = \ell'$.
Alors la suite (u_n) est divergente.

<u>Exercice</u>
Donner des exemples de telles suites.

<u>Exercice</u>
Rappeler et démontrer les résultats sur la convergence des suites arithmétiques ou géométriques en fonction de leur raison.

Ordre et limites

Proposition - Convergence et signe de la suite

Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$). Alors la suite est strictement positive (resp. strictement négative) à partir d'un certain rang.

Ordre et limites

Proposition - Convergence et signe de la suite

Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$). Alors la suite est strictement positive (resp. strictement négative) à partir d'un certain rang.

Démonstration

Ordre et limites

Proposition - Convergence et signe de la suite

Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$). Alors la suite est strictement positive (resp. strictement négative) à partir d'un certain rang.

Démonstration

Et réciproquement si $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, a-t-on $\lim(u_n) > 0$?

Ordre et limites

Proposition - Convergence et signe de la suite

Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$). Alors la suite est strictement positive (resp. strictement négative) à partir d'un certain rang.

Démonstration

Et réciproquement si $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, a-t-on $\lim(u_n) > 0$?

Attention - Les inégalités sont élargies !

Les inégalités strictes ne passent pas à la limite, elles se transforment en inégalités larges.

Par exemple $u_n = \frac{1}{n} > 0 = v_n$ et pourtant $\lim(u_n) = \lim(v_n) = 0$

Comparaison des limites

Théorème - Passage à la limite dans les inégalités

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui convergent respectivement vers les réels ℓ et ℓ'. On suppose qu'à partir d'un certain rang on a $u_n \leqslant v_n$. Alors $\ell \leqslant \ell'$.

Comparaison des limites

Théorème - Passage à la limite dans les inégalités

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui convergent respectivement vers les réels ℓ et ℓ'. On suppose qu'à partir d'un certain rang on a $u_n \leqslant v_n$. Alors $\ell \leqslant \ell'$.

Remarque Dans $\overline{\mathbb{R}}$

Comparaison des limites

Théorème - Passage à la limite dans les inégalités

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui convergent respectivement vers les réels ℓ et ℓ'. On suppose qu'à partir d'un certain rang on a $u_n \leqslant v_n$. Alors $\ell \leqslant \ell'$.

Remarque Dans $\overline{\mathbb{R}}$

Démonstration

Ordre et limites

Heuristique. Petit bilan. . .et mieux !

D'une certaine façon, on peut résumer ce qu'on a vu en :
Contexte : des suites convegentes dans $\overline{\mathbb{R}}$

- Le passage à la limite conserve l'ordre large.
- Réciproquement (strict) : si $\lim u_n < \lim v_n$, alors $u_n < v_n$ à partir d'une certain rang.

Ordre et limites

Heuristique. Petit bilan. . .et mieux !

D'une certaine façon, on peut résumer ce qu'on a vu en :
Contexte : des suites convegentes dans $\overline{\mathbb{R}}$

- Le passage à la limite conserve l'ordre large.
- Réciproquement (strict) : si $\lim u_n < \lim v_n$, alors $u_n < v_n$ à partir d'une certain rang.

Le théorème d'encadrement est un peu plus fort : il assure aussi la convergence.

Convergence par encadrement (sandwich)

Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit “des gendarmes”

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n, \text{ et que } \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = \ell$$

alors la suite (v_n) converge vers ℓ.

Convergence par encadrement (sandwich)

Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit “des gendarmes”

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n, \text{ et que } \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$$

alors la suite (v_n) converge vers ℓ.

Avec $(u_n) = (-w_n)$:

Corollaire - Encadrement en valeur absolue

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que l'on a (α_n) une suite de réels positifs qui converge vers 0 et un réel ℓ tels qu'à partir d'un certain rang $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$. Alors (u_n) converge vers ℓ.

Convergence par encadrement (sandwich)

Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit “des gendarmes”

Soient $(u_n),(v_n),(w_n)$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n, \text{ et que } \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$$

alors la suite (v_n) converge vers ℓ.

Avec $(u_n) = (-w_n)$:

Corollaire - Encadrement en valeur absolue

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que l'on a (α_n) une suite de réels positifs qui converge vers 0 et un réel ℓ tels qu'à partir d'un certain rang $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$. Alors (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration

Application

Savoir-faire. A partir de deux certains rangs

Si on a, à partir d'un certain premier rang une propriété vraie :
$\exists\ n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant n_1$, $\mathscr{P}_n$,
et à partir d'un certain second rang une autre propriété vraie :
$\exists\ n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant n_2$, $\mathscr{P}'_n$,
Alors, à partir d'un certain rang $n_3 = \max(n_1, n_2)$, $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}'_n$ sont vraies.

Application

Savoir-faire. A partir de deux certains rangs

Si on a, à partir d'un certain premier rang une propriété vraie :
$\exists\ n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant n_1$, $\mathscr{P}_n$,
et à partir d'un certain second rang une autre propriété vraie :
$\exists\ n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant n_2$, $\mathscr{P}'_n$,
Alors, à partir d'un certain rang $n_3 = \max(n_1, n_2)$, $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}'_n$ sont vraies.

<u>Exercice</u>

Montrer que la suite $\left(\dfrac{2^n}{n!}\right)$ converge vers 0.

Divergence (infinie) par encadrement

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

Divergence (infinie) par encadrement

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

Théorème - Théorème de divergence (vers $\pm\infty$) par encadrement

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$. Alors

$$(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow (v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
$$(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \Rightarrow (u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

Divergence (infinie) par encadrement

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

Théorème - Théorème de divergence (vers $\pm\infty$) par encadrement

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$. Alors

$$(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow (v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
$$(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \Rightarrow (u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

<u>Exercice</u>

Soit (S_n) la suite définie par $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, comparez $\frac{1}{k}$ avec $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. En déduire que (S_n) diverge.
2. Prouver que $\left(\dfrac{S_n}{\ln n}\right)$ converge et donner sa limite.

Savoir-faire. Bilan

Savoir-faire. Convergence par encadrement/Divergence par minoration (majoration)

L'encadrement est souvent à la base de toute démonstration d'analyse. Pour démontrer que

- $u_n \to \ell$, on démontre qu'à partir d'un certain rang,

  $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ avec $\lim(v_n) = \lim(w_n) = \ell$,

  ou $|u_n - \alpha| \leqslant \alpha_n$ avec $\alpha_n \to 0$.
- $u_n \to +\infty$, on démontre qu'à partir d'un certain rang,

  $v_n \leqslant u_n$ avec $\lim(v_n) = +\infty$.
- $u_n \to -\infty$, on démontre qu'à partir d'un certain rang,

  $u_n \leqslant w_n$ avec $\lim(w_n) = -\infty$.

Opérations sur les suites

Définition - $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ comme une algèbre

On définit les opérations suivantes sur l'ensemble des suites réelles :

- Addition : $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$
- Multiplication par un réel : $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$
- Multiplication de deux suites : $(u_n) \times (v_n) = (u_n \times v_n)$

Addition et multiplication de deux suites sont des "lois internes" sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la multiplication est une "loi externe".

Opérations sur les suites et conséquences sur les limites

On commence par deux lemmes qui simplifieront les démonstrations

Lemme - $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ comme une algèbre

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

- Si $(u_n) \to 0$ et (v_n) est bornée, alors $(u_n \times v_n) \to 0$.
- Si $(u_n) \to +\infty$ et (v_n) est minorée, alors $(u_n + v_n) \to +\infty$.

Opérations sur les suites et conséquences sur les limites

On commence par deux lemmes qui simplifieront les démonstrations

Lemme - $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ comme une algèbre

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

- Si $(u_n) \to 0$ et (v_n) est bornée, alors $(u_n \times v_n) \to 0$.
- Si $(u_n) \to +\infty$ et (v_n) est minorée, alors $(u_n + v_n) \to +\infty$.

Démonstration

Opérations sur les limites

Théorème - Opérations sur les limites

Soit (u_n) une suite tendant vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et (v_n) une suite tendant vers $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors, lorsque le calcul dans $\overline{\mathbb{R}}$ a du sens :

- la suite $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$;
- la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$;
- pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (λu_n) converge vers $\lambda \ell$;
- la suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell \ell'$;
- si $\ell' \neq 0$, la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$

A savoir-faire

Savoir-faire. A savoir compléter

Plus généralement les tableaux suivants, complétés, permettent de connaître les limites des suites $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$, $(\frac{1}{u_n})$, $(\frac{u_n}{v_n})$ connaissant les limites, éventuellement infinies, de (u_n) et (v_n).
ℓ et ℓ' sont des réels.

1. **Limite d'une somme**

$\lim(u_n) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(v_n) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim(u_n + v_n) =$						

2. **Limite d'un produit**

$\lim(u_n) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
$\lim(v_n) =$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim(u_n \times v_n) =$				

Pour déterminer s'il s'agit de $+\infty$ ou de $-\infty$ on applique la règle des signes.

A savoir-faire

Savoir-faire. A savoir compléter

Plus généralement les tableaux suivants, complétés, permettent de connaître les limites des suites $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$, $(\frac{1}{u_n})$, $(\frac{u_n}{v_n})$ connaissant les limites, éventuellement infinies, de (u_n) et (v_n).
ℓ et ℓ' sont des réels.

3. **Limite de l'inverse**

$\lim(u_n) =$	$\ell \neq 0$	0 avec $u_n > 0$	0 avec $u_n < 0$	∞
alors $\lim(\frac{1}{u_n}) =$				

4. **Limite d'un quotient**

$\lim(u_n) =$	ℓ	0	$\ell \neq 0$	ℓ	∞	∞	∞
$\lim(v_n) =$	$\ell' \neq 0$	0	0 $(v_n)_{n \geqslant n_0} \geqslant 0$	∞	0 $(v_n)_{n \geqslant n_0} \geqslant 0$	∞	$\ell \neq 0$
$\lim \dfrac{u_n}{v_n} =$							

Gérer ϵ

1. Si il s'agit de **montrer** que $\forall\ \epsilon > 0 \ldots$.

Gérer ϵ

1. Si il s'agit de **montrer** que $\forall\ \epsilon > 0 \ldots$.
   a. On prend $\epsilon > 0$, fixé et quelconque
   b. et on agit avec lui. . ..

Gérer ϵ

1. Si il s'agit de **montrer** que $\forall\ \epsilon > 0 \dots$.
   a. On prend $\epsilon > 0$, fixé et quelconque
   b. et on agit avec lui. . . .
2. Si il s'agit de **exploiter** que $\forall\ \epsilon > 0 \dots$.

Gérer ϵ

1. Si il s'agit de **montrer** que $\forall\ \epsilon > 0\dots$.
   a. On prend $\epsilon > 0$, fixé et quelconque
   b. et on agit avec lui. . . .
2. Si il s'agit de **exploiter** que $\forall\ \epsilon > 0\dots$.
   On considère arbitrairement un $\epsilon > 0$, fixé et quelconque,
   bien choisi.

Gérer ϵ

1. Si il s'agit de **montrer** que $\forall\ \epsilon > 0 \ldots$.
   a. On prend $\epsilon > 0$, fixé et quelconque
   b. et on agit avec lui. . ..
2. Si il s'agit de **exploiter** que $\forall\ \epsilon > 0 \ldots$.
   On considère arbitrairement un $\epsilon > 0$, fixé et quelconque,
   bien choisi.

Exemple Montrer que $\lim(u_n + v_n) = \lim(u_n) + \lim(v_n)$

Démonstrations

Démonstration

Démonstrations

Démonstration

Exercice

Faire les autres démonstrations

Démonstrations

Démonstration

Exercice
Faire les autres démonstrations
Application Lemme de CESARO

Conclusion

Objectifs

⇒ Convergence. . .

⇒ Algèbre des limites

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Convergence...

- Définition de $(u_n) \to \ell$: $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \epsilon$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Convergence...

- Définition de $(u_n) \to \ell$: $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \epsilon$.
- Suites convergentes. Suites divergentes.

Conclusion

Objectifs

⇒ Convergence…

- Définition de $(u_n) \to \ell$: $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \epsilon$.
- Suites convergentes. Suites divergentes.
- Conservation de la relation d'ordre par passage à la limite et réciproquement (presque)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Convergence…

- Définition de $(u_n) \to \ell$: $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \epsilon$.
- Suites convergentes. Suites divergentes.
- Conservation de la relation d'ordre par passage à la limite et réciproquement (presque)
- Théorème de convergence par encadrement et divergence par min/maj-oration.

Conclusion

Objectifs

⇒ Convergence. . .

⇒ Algèbre des limites

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Convergence...

$\Rightarrow$ Algèbre des limites

- Les calculs sont comparables avec ceux dans $\overline{\mathbb{R}}$ par passage à la limite

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Convergence…

$\Rightarrow$ Algèbre des limites

- Les calculs sont comparables avec ceux dans $\overline{\mathbb{R}}$ par passage à la limite
- Application : Césaro…

Conclusion

Objectifs

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

- Les calculs sont comparables avec ceux dans $\overline{\mathbb{R}}$ par passage à la limite
- Application : Césaro...
- Extension au suites à valeurs complexes :

  Tout va bien (sauf l'ordre) !

  On peut se concentrer aux suites **Re**(u_n) et **Im**(u_n)

Conclusion

Objectifs

⇒ Convergence. . .

⇒ Algèbre des limites

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 11- Suites numériques Fin.
- Exercices N°344 & 368