

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

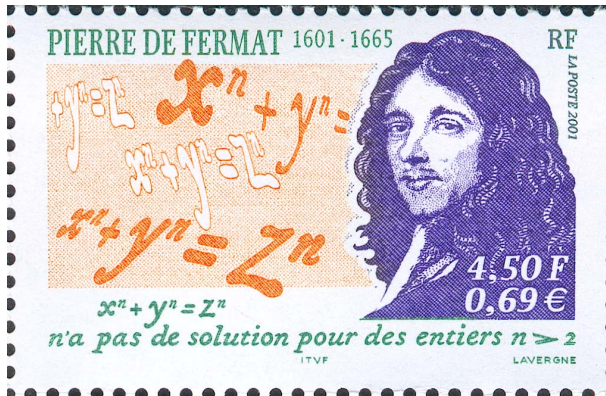
3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre



Leçon 35 - Suites numériques

26 novembre 2024

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

3. Suites extraites

4. Limite d'une suite réelle

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

3. Suites extraites

4. Limite d'une suite réelle

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Principe et définition

Heuristique. Expression en français

On dit qu'une suite (u_n) converge vers ℓ ,
si à toute précision fixée a priori et notée ϵ ,
la suite u_n est proche de ℓ à ϵ près, à partir
d'un certain rang. . .

⇒ Convergence . . .

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Principe et définition

Heuristique. Expression en français

On dit qu'une suite (u_n) converge vers ℓ ,
si à toute précision fixée a priori et notée ϵ ,
la suite u_n est proche de ℓ à ϵ près, à partir
d'un certain rang. . .

Définition - Limite (réelle)

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n)
converge vers ℓ lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

⇒ Convergence . . .

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Principe et définition

Heuristique. Expression en français

On dit qu'une suite (u_n) converge vers ℓ ,
si à toute précision fixée a priori et notée ϵ ,
la suite u_n est proche de ℓ à ϵ près, à partir
d'un certain rang. . .

Définition - Limite (réelle)

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n)
converge vers ℓ lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

Remarque Suite convergente vers 0

⇒ Convergence . . .

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Principe et définition

Heuristique. Expression en français

On dit qu'une suite (u_n) converge vers ℓ ,
si à toute précision fixée a priori et notée ϵ ,
la suite u_n est proche de ℓ à ϵ près, à partir
d'un certain rang. . .

Définition - Limite (réelle)

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n)
converge vers ℓ lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

Remarque Suite convergente vers 0

Remarque Strict ou non

⇒ Convergence . . .

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Exercice

Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge vers 0.

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Applications

Exercice

Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge vers 0.

Attention - Dépendance de N à ϵ

On remarquera bien sur cet exercice le fait important et fréquent :
 N dépend de la valeur de ϵ choisie a priori.
On pourrait noter à la physicienne : $N(\epsilon)$

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Applications

Exercice

Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge vers 0.

Attention - Dépendance de N à ϵ

On remarquera bien sur cet exercice le fait important et fréquent :
 N dépend de la valeur de ϵ choisie a priori.
On pourrait noter à la physicienne : $N(\epsilon)$

Proposition - Unicité de la limite

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ' alors $\ell = \ell'$. On note alors $(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Applications

Exercice

Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge vers 0.

Attention - Dépendance de N à ϵ

On remarquera bien sur cet exercice le fait important et fréquent :
 N dépend de la valeur de ϵ choisie a priori.
 On pourrait noter à la physicienne : $N(\epsilon)$

Proposition - Unicité de la limite

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ' alors $\ell = \ell'$. On note alors $(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Démonstration

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Suites convergentes

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

Définition - Suites convergente

Soit (u_n) une suite réelle.

S'il existe un réel ℓ tel que la suite converge vers ℓ , on dit que (u_n) est convergente.

ℓ (unique d'après ce qui précède) est appelé la limite de la suite.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Suites convergentes

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

Définition - Suites convergente

Soit (u_n) une suite réelle.

S'il existe un réel ℓ tel que la suite converge vers ℓ , on dit que (u_n) est convergente.

ℓ (unique d'après ce qui précède) est appelé la limite de la suite.

Proposition - Suite convergente donc bornée

Toute suite convergente est bornée.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Suites convergentes

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

Définition - Suites convergente

Soit (u_n) une suite réelle.

S'il existe un réel ℓ tel que la suite converge vers ℓ , on dit que (u_n) est convergente.

ℓ (unique d'après ce qui précède) est appelé la limite de la suite.

Proposition - Suite convergente donc bornée

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

3. Suites extraites

4. Limite d'une suite réelle

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Deux types de divergence

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

Il y a deux types de non convergence (=divergence) :

- ▶ les suites tendant vers ∞ .
- ▶ les suites ne tendant vers rien (oscillante).

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Deux types de divergence

1. Problèmes

2. Examples

3. Extraction

4. Limite

4.2. Suites divergentes

Il y a deux types de non convergence (=divergence) :

- ▶ les suites tendant vers ∞ .
- ▶ les suites ne tendant vers rien (oscillante).

Définition - divergente

Si la suite n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente.

Extension de la limite à $\overline{\mathbb{R}}$

On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$ ce qui donne la définition suivante.

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Extension de la limite à $\overline{\mathbb{R}}$

On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$ ce qui donne la définition suivante.

Définition - Limite infinie

On dit que la suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ et on note

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ si}$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, u_n \geq A.$$

On dit que la suite réelle (u_n) tend vers $-\infty$ et on note

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty \text{ si}$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, u_n \leq A.$$

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Extension de la limite à $\overline{\mathbb{R}}$

On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$ ce qui donne la définition suivante.

Définition - Limite infinie

On dit que la suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ et on note

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ si}$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, u_n \geq A.$$

On dit que la suite réelle (u_n) tend vers $-\infty$ et on note

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty \text{ si}$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, u_n \leq A.$$

Remarque Limite infinie et suite divergente

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Exercice

Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite (n^α) diverge vers $+\infty$.

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Exercices

Exercice

Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite (n^α) diverge vers $+\infty$.

Attention - Dépendance de N à A

On remarquera bien sur cet exercice le fait important et fréquent :

N dépend de la valeur de A choisie a priori.

On pourrait noter à la physicienne : $N(A)$

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Exercices

Savoir-faire. Montrer la divergence (deuxième type) d'une suite, par suites extraites

Soit (u_n) une suite réelle.

On suppose qu'il existe deux suites extraites $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' avec $\ell \neq \ell'$.

Alors la suite (u_n) est divergente.

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Exercices

Savoir-faire. Montrer la divergence (deuxième type) d'une suite, par suites extraites

Soit (u_n) une suite réelle.

On suppose qu'il existe deux suites extraites $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' avec $\ell \neq \ell'$.

Alors la suite (u_n) est divergente.

Exercice

Donner des exemples de telles suites.

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Exercices

Savoir-faire. Montrer la divergence (deuxième type) d'une suite, par suites extraites

Soit (u_n) une suite réelle.

On suppose qu'il existe deux suites extraites $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' avec $\ell \neq \ell'$.

Alors la suite (u_n) est divergente.

Exercice

Donner des exemples de telles suites.

Exercice

Rappeler et démontrer les résultats sur la convergence des suites arithmétiques ou géométriques en fonction de leur raison.

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

3. Suites extraites

4. Limite d'une suite réelle

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

Proposition - Convergence et signe de la suite

Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$). Alors la suite est strictement positive (resp. strictement négative) à partir d'un certain rang.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

Proposition - Convergence et signe de la suite

Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$). Alors la suite est strictement positive (resp. strictement négative) à partir d'un certain rang.

Démonstration

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

Proposition - Convergence et signe de la suite

Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$). Alors la suite est strictement positive (resp. strictement négative) à partir d'un certain rang.

Démonstration

Et réciproquement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, a-t-on $\lim(u_n) > 0$?

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Ordre et limites

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

Proposition - Convergence et signe de la suite

Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$). Alors la suite est strictement positive (resp. strictement négative) à partir d'un certain rang.

Démonstration

Et réciproquement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, a-t-on $\lim(u_n) > 0$?

Attention - Les inégalités sont élargies !

Les inégalités strictes ne passent pas à la limite, elles se transforment en inégalités larges.

Par exemple $u_n = \frac{1}{n} > 0 = v_n$ et pourtant $\lim(u_n) = \lim(v_n) = 0$

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Comparaison des limites

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Théorème - Passage à la limite dans les inégalités

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui convergent respectivement vers les réels ℓ et ℓ' . On suppose qu'à partir d'un certain rang on a $u_n \leq v_n$. Alors $\ell \leq \ell'$.

Comparaison des limites

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Théorème - Passage à la limite dans les inégalités

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui convergent respectivement vers les réels ℓ et ℓ' . On suppose qu'à partir d'un certain rang on a $u_n \leq v_n$. Alors $\ell \leq \ell'$.

Remarque Dans $\overline{\mathbb{R}}$

Comparaison des limites

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Théorème - Passage à la limite dans les inégalités

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui convergent respectivement vers les réels ℓ et ℓ' . On suppose qu'à partir d'un certain rang on a $u_n \leq v_n$. Alors $\ell \leq \ell'$.

Remarque Dans $\overline{\mathbb{R}}$

Démonstration

Ordre et limites

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

Heuristique. Petit bilan...et mieux !

D'une certaine façon, on peut résumer ce qu'on a vu en :

Contexte : des suites convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$

- ▶ Le passage à la limite conserve l'ordre large.
- ▶ Réciproquement (strict) : si $\lim u_n < \lim v_n$, alors $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites les limites et relation
d'ordre

Ordre et limites

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

Heuristique. Petit bilan...et mieux !

D'une certaine façon, on peut résumer ce qu'on a vu en :

Contexte : des suites convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$

- ▶ Le passage à la limite conserve l'ordre large.
- ▶ Réciproquement (strict) : si $\lim u_n < \lim v_n$,
alors $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang.

Le théorème d'encadrement est un peu plus fort : il assure aussi la convergence.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites les limites et relation
d'ordre

Convergence par encadrement (sandwich)

Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit “des gendarmes”

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n, \text{ et que } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$$

alors la suite (v_n) converge vers ℓ .

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Convergence par encadrement (sandwich)

Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit “des gendarmes”

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n, \text{ et que } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$$

alors la suite (v_n) converge vers ℓ .

Avec $(u_n) = (-w_n)$:

Corollaire - Encadrement en valeur absolue

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que l'on a (α_n) une suite de réels positifs qui converge vers 0 et un réel ℓ tels qu'à partir d'un certain rang $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$. Alors (u_n) converge vers ℓ .

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Convergence par encadrement (sandwich)

Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit “des gendarmes”

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n, \text{ et que } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$$

alors la suite (v_n) converge vers ℓ .

Avec $(u_n) = (-w_n)$:

Corollaire - Encadrement en valeur absolue

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que l'on a (α_n) une suite de réels positifs qui converge vers 0 et un réel ℓ tels qu'à partir d'un certain rang $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$. Alors (u_n) converge vers ℓ .

Démonstration

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Application

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

Savoir-faire. A partir de deux certains rangs

Si on a, à partir d'un certain premier rang une propriété vraie :

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, \mathcal{P}_n$,

et à partir d'un certain second rang une autre propriété vraie :

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_2, \mathcal{P}'_n$,

Alors, à partir d'un certain rang $n_3 = \max(n_1, n_2)$, $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}'_n$ sont vraies.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Application

⇒ Convergence ...

⇒ Algèbre des limites

Savoir-faire. A partir de deux certains rangs

Si on a, à partir d'un certain premier rang une propriété vraie :

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, \mathcal{P}_n$,

et à partir d'un certain second rang une autre propriété vraie :

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_2, \mathcal{P}'_n$,

Alors, à partir d'un certain rang $n_3 = \max(n_1, n_2)$, $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}'_n$ sont vraies.

Exercice

Montrer que la suite $\left(\frac{2^n}{n!}\right)$ converge vers 0.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Divergence (infinie) par encadrement

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Divergence (infinie) par encadrement

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

Théorème - Théorème de divergence (vers $\pm\infty$) par encadrement

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$. Alors

$$\begin{aligned} (u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty &\Rightarrow (v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \\ (v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty &\Rightarrow (u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \end{aligned}$$

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Divergence (infinie) par encadrement

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

Théorème - Théorème de divergence (vers $\pm\infty$) par encadrement

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$. Alors

$$\begin{aligned} (u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty &\Rightarrow (v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \\ (v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty &\Rightarrow (u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \end{aligned}$$

Exercice

Soit (S_n) la suite définie par $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, comparez $\frac{1}{k}$ avec $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et $\int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$.
En déduire que (S_n) diverge.
2. Prouver que $\left(\frac{S_n}{\ln n}\right)$ converge et donner sa limite.

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Savoir-faire. Bilan

Savoir-faire. Convergence par encadrement/Divergence par minoration (majoration)

L'encadrement est souvent à la base de toute démonstration d'analyse. Pour démontrer que

- $u_n \rightarrow \ell$, on démontre qu'à partir d'un certain rang,
 $v_n \leq u_n \leq w_n$ avec $\lim(v_n) = \lim(w_n) = \ell$,
ou $|u_n - \alpha| \leq \alpha_n$ avec $\alpha_n \rightarrow 0$.
- $u_n \rightarrow +\infty$, on démontre qu'à partir d'un certain rang,
 $v_n \leq u_n$ avec $\lim(v_n) = +\infty$.
- $u_n \rightarrow -\infty$, on démontre qu'à partir d'un certain rang,
 $u_n \leq w_n$ avec $\lim(w_n) = -\infty$.

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Opérations sur les suites

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

Définition - $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ comme une algèbre

On définit les opérations suivantes sur l'ensemble des suites réelles :

- Addition : $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$
- Multiplication par un réel : $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$
- Multiplication de deux suites : $(u_n) \times (v_n) = (u_n \times v_n)$

Addition et multiplication de deux suites sont des “lois internes” sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la multiplication est une “loi externe”.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Conclusion

Objectifs

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Conclusion

Objectifs

⇒ Convergence...

- ▶ Définition de $(u_n) \rightarrow \ell : \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \epsilon$.

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Conclusion

Objectifs

⇒ Convergence...

- ▶ Définition de $(u_n) \rightarrow \ell : \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \epsilon$.
- ▶ Suites convergentes. Suites divergentes.

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Conclusion

Objectifs

⇒ Convergence...

- ▶ Définition de $(u_n) \rightarrow \ell : \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \epsilon$.
- ▶ Suites convergentes. Suites divergentes.
- ▶ Conservation de la relation d'ordre par passage à la limite et réciproquement (presque)

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Conclusion

Objectifs

⇒ Convergence...

- ▶ Définition de $(u_n) \rightarrow \ell : \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \epsilon$.
- ▶ Suites convergentes. Suites divergentes.
- ▶ Conservation de la relation d'ordre par passage à la limite et réciproquement (presque)
- ▶ Théorème de convergence par encadrement et divergence par min/maj-oration.

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Conclusion

Objectifs

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Conclusion

Objectifs

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

- ▶ Les calculs sont comparables avec ceux dans $\overline{\mathbb{R}}$ par passage à la limite

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Conclusion

Objectifs

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

- ▶ Les calculs sont comparables avec ceux dans $\overline{\mathbb{R}}$ par passage à la limite
- ▶ Application : Césaro...

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Conclusion

Objectifs

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

- ▶ Les calculs sont comparables avec ceux dans $\overline{\mathbb{R}}$ par passage à la limite
- ▶ Application : Césaro...
- ▶ Extension aux suites à valeurs complexes :
Tout va bien (sauf l'ordre) !
On peut se concentrer aux suites **Re**(u_n) et **Im**(u_n)

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Convergence...
- ⇒ Algèbre des limites

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 18- Suites numériques
Fin de 4.
- ▶ Exercices N°344 & 370

⇒ Convergence...

⇒ Algèbre des limites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limite

4.1. Suite convergente

4.2. Suites divergentes

4.3. Opérations sur les
suites/les limites et relation
d'ordre