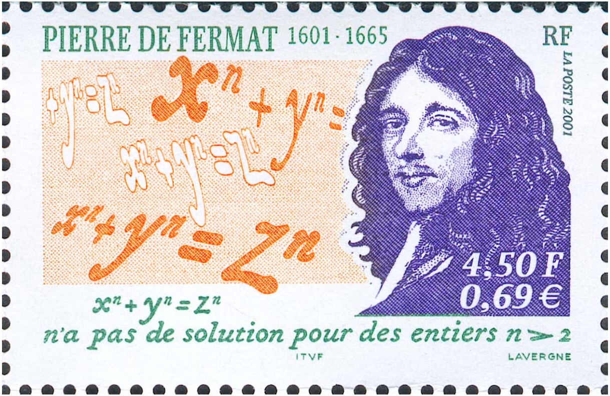

Leçon 36 - Suites numériques

27 novembre 2024

$\Rightarrow$ Méthodes

⇒ Méthodes

Opérations sur les limites

Théorème - Opérations sur les limites

Soit (u_n) une suite tendant vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et (v_n) une suite tendant vers $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors, lorsque le calcul dans $\overline{\mathbb{R}}$ a du sens :

- la suite $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$;
- la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$;
- pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (λu_n) converge vers $\lambda \ell$;
- la suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell \ell'$;
- si $\ell' \neq 0$, la suite $(\dfrac{u_n}{v_n})$ converge vers $\dfrac{\ell}{\ell'}$

A savoir-faire

Savoir-faire. A savoir compléter

Plus généralement les tableaux suivants, complétés, permettent de connaître les limites des suites $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$, $(\frac{1}{u_n})$, $(\frac{u_n}{v_n})$ connaissant les limites, éventuellement infinies, de (u_n) et (v_n).
ℓ et ℓ' sont des réels.

1. **Limite d'une somme**

$\lim(u_n) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(v_n) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim(u_n + v_n) =$						

2. **Limite d'un produit**

$\lim(u_n) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
$\lim(v_n) =$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim(u_n \times v_n) =$				

Pour déterminer s'il s'agit de $+\infty$ ou de $-\infty$ on applique la règle des signes.

A savoir-faire

Savoir-faire. A savoir compléter

Plus généralement les tableaux suivants, complétés, permettent de connaître les limites des suites $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$, $(\frac{1}{u_n})$, $(\frac{u_n}{v_n})$ connaissant les limites, éventuellement infinies, de (u_n) et (v_n). ℓ et ℓ' sont des réels.

3. **Limite de l'inverse**

$\lim(u_n) =$	$\ell \neq 0$	0 avec $u_n > 0$	0 avec $u_n < 0$	∞
alors $\lim(\frac{1}{u_n}) =$				

4. **Limite d'un quotient**

$\lim(u_n) =$	ℓ	0	$\ell \neq 0$	ℓ	∞	∞	∞
$\lim(v_n) =$	$\ell' \neq 0$	0	0 $(v_n)_{n \geqslant n_0} \geqslant 0$	∞	0 $(v_n)_{n \geqslant n_0} \geqslant 0$	∞	$\ell \neq 0$
$\lim \dfrac{u_n}{v_n} =$							

Gérer ϵ

1. Si il s'agit de **montrer** que $\forall\ \epsilon > 0 \ldots$.

Gérer ϵ

1. Si il s'agit de **montrer** que $\forall\ \epsilon > 0 \ldots$.
   a. On prend $\epsilon > 0$, fixé et quelconque
   b. et on agit avec lui. . . .

Gérer ϵ

1. Si il s'agit de **montrer** que $\forall\ \epsilon > 0 \ldots$.
   a. On prend $\epsilon > 0$, fixé et quelconque
   b. et on agit avec lui. . ..
2. Si il s'agit de **exploiter** que $\forall\ \epsilon > 0 \ldots$.

Gérer ϵ

1. Si il s'agit de **montrer** que $\forall\ \epsilon > 0\ldots$.
   a. On prend $\epsilon > 0$, fixé et quelconque
   b. et on agit avec lui. . ..
2. Si il s'agit de **exploiter** que $\forall\ \epsilon > 0\ldots$.
   On considère arbitrairement un $\epsilon > 0$, fixé et quelconque,
   bien choisi.

Gérer ϵ

1. Si il s'agit de **montrer** que $\forall\ \epsilon > 0 \ldots$.
   a. On prend $\epsilon > 0$, fixé et quelconque
   b. et on agit avec lui. . . .
2. Si il s'agit de **exploiter** que $\forall\ \epsilon > 0 \ldots$.
   On considère arbitrairement un $\epsilon > 0$, fixé et quelconque,
   bien choisi.

Exemple Montrer que $\lim(u_n + v_n) = \lim(u_n) + \lim(v_n)$

Démonstrations

Démonstration

Démonstrations

Démonstration

Exercice
Faire les autres démonstrations

Démonstrations

Démonstration

Exercice

Faire les autres démonstrations

Application Lemme de CESARO

⇒ Méthodes

Cas complexe

Définition - Cas des suites complexes (bornées...)

Soit (u_n) une suite de complexes.

- On dit que la suite (u_n) est bornée si la suite réelle des modules $(|u_n|)$ est majorée.
- Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ si la suite réelle $(|u_n - \ell|)$ converge vers 0. On note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Convergence complexe

Définition - Convergence

La suite complexe (u_n) converge vers le complexe ℓ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \epsilon$$

Attention $|u_n - \ell|$ désigne ici le module du complexe $u_n - \ell$.

Propriétés

Proposition - Généralisation

A partir de cette définition, on voit que bon nombre de résultats subsistent pour les suites complexes :

• la limite, lorsqu'elle existe, est unique ;

• si $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$ où (α_n) est une suite réelle qui converge vers 0, alors (u_n) converge vers ℓ ;

• les opérations (somme, produit, inverse, quotient) sur les limites restent valables ;

Vu plus loin :

• toute suite extraite d'une suite convergente, converge vers la même limite ;

• si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors la suite (u_n) converge.

Deux suites réelles

Attention. Relation d'ordre dans $\mathbb{C}$?

En revanche les résultats liés à la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ n'ont plus de sens ici (inégalités).

Deux suites réelles

Attention. Relation d'ordre dans $\mathbb{C}$?

En revanche les résultats liés à la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ n'ont plus de sens ici (inégalités).

Savoir-faire. Souvent pour l'étude de suites complexes

On peut également, pour étudier une suite complexe, se ramener à deux suites réelles, selon la proposition qui suit...

Et si on veut raisonner pour la convergence par encadrement (vers 0), on note que :

$$|\mathbf{Re}(u_n)| \leqslant |u_n| \text{ et } |\mathbf{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|.$$

$$\text{et } |u_n| = \sqrt{\mathbf{Re}^2(u_n) + \mathbf{Im}^2(u_n)} \leqslant |\mathbf{Re}(u_n)| + |\mathbf{Im}(u_n)|.$$

(différence entre module et valeur absolue...

Deux suites réelles

Proposition - Utilisation de deux suites complexes

Soit (u_n) une suite complexe.
(u_n) est convergente (respectivement bornée) si et seulement les suites réelles $(\mathbf{Re}(u_n))$ et $(\mathbf{Im}(u_n))$ le sont toutes les deux. En cas de convergence on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = (\lim_{n\to+\infty} \mathbf{Re}(u_n)) + i(\lim_{n\to+\infty} \mathbf{Im}(u_n)).$$

Deux suites réelles

Proposition - Utilisation de deux suites complexes

Soit (u_n) une suite complexe.
(u_n) est convergente (respectivement bornée) si et seulement les suites réelles $(\mathbf{Re}(u_n))$ et $(\mathbf{Im}(u_n))$ le sont toutes les deux. En cas de convergence on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = (\lim_{n\to+\infty} \mathbf{Re}(u_n)) + i(\lim_{n\to+\infty} \mathbf{Im}(u_n)).$$

<u>Exercice</u>

Montrer par deux méthodes que la suite complexe $(\overline{u_n})$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge et donner alors une relation entre les limites.

Deux suites réelles

Proposition - Utilisation de deux suites complexes

Soit (u_n) une suite complexe.
(u_n) est convergente (respectivement bornée) si et seulement les suites réelles $(\mathbf{Re}(u_n))$ et $(\mathbf{Im}(u_n))$ le sont toutes les deux. En cas de convergence on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = (\lim_{n\to+\infty} \mathbf{Re}(u_n)) + i(\lim_{n\to+\infty} \mathbf{Im}(u_n)).$$

Exercice

Montrer par deux méthodes que la suite complexe $(\overline{u_n})$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge et donner alors une relation entre les limites.

Démonstration

Exercice

Exercice

Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que la suite géométrique (z^n) est convergente si et seulement si $|z| < 1$ ou $z = 1$.
2. Montrer que la suite (S_n) définie par $S_n = 1 + z + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k$ (on dit que (S_n) est une série géométrique) converge si et seulement si $|z| < 1$ et que la limite vaut alors $\frac{1}{1-z}$.

⇒ Méthodes

Convergence par encadrement

Rappelons le résultat suivant. C'est le plus naturel lorsqu'il faut démontrer la convergence ET donner la limite.

Convergence par encadrement

Rappelons le résultat suivant. C'est le plus naturel lorsqu'il faut démontrer la convergence ET donner la limite.

Proposition - Convergence par encadrement (ou gendarme)

Si pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
et pour (u_n) et (w_n) converge vers la même limite ℓ.
Alors (v_n) converge et $\lim(v_n) = \ell$

Convergence par encadrement

Rappelons le résultat suivant. C'est le plus naturel lorsqu'il faut démontrer la convergence ET donner la limite.

Proposition - Convergence par encadrement (ou gendarme)

Si pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$

et pour (u_n) et (w_n) converge vers la même limite ℓ.

Alors (v_n) converge et $\lim(v_n) = \ell$

Proposition - Divergence par minoration

Si pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n$

et pour (u_n) diverge vers $+\infty$.

Alors (v_n) diverge et $\lim(v_n) = +\infty$

Convergence par encadrement

Rappelons le résultat suivant. C'est le plus naturel lorsqu'il faut démontrer la convergence ET donner la limite.

Proposition - Convergence par encadrement (ou gendarme)

Si pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
et pour (u_n) et (w_n) converge vers la même limite ℓ.
Alors (v_n) converge et $\lim(v_n) = \ell$

Proposition - Divergence par majoration

Si pour tout entier n, $v_n \leqslant w_n$
et pour (w_n) diverge vers $-\infty$.
Alors (v_n) diverge et $\lim(v_n) = -\infty$

Suites extraites convergentes

Quelques rappels :

Suites extraites convergentes

Quelques rappels :

- Valeur d'adhérence d'une suite

Suites extraites convergentes

Quelques rappels :

- Valeur d'adhérence d'une suite
- Si (u_n) converge, elle n'admet qu'une valeur d'adhérence.
- Savoir-faire : démontrer la non convergence (contraposée).

Suites extraites convergentes

Quelques rappels :

- Valeur d'adhérence d'une suite
- Si (u_n) converge, elle n'admet qu'une valeur d'adhérence.
- Savoir-faire : démontrer la non convergence (contraposée).

Théorème - Convergence par suites extraites totales

Soit (u_n) une suite réelle.
On suppose que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ. Alors (u_n) converge vers ℓ

Suites extraites convergentes

Quelques rappels :

- Valeur d'adhérence d'une suite
- Si (u_n) converge, elle n'admet qu'une valeur d'adhérence.
- Savoir-faire : démontrer la non convergence (contraposée).

Théorème - Convergence par suites extraites totales

Soit (u_n) une suite réelle.
On suppose que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ. Alors (u_n) converge vers ℓ

Remarque Si $\ell = \infty$.

Suites extraites convergentes

Quelques rappels :

- Valeur d'adhérence d'une suite
- Si (u_n) converge, elle n'admet qu'une valeur d'adhérence.
- Savoir-faire : démontrer la non convergence (contraposée).

Théorème - Convergence par suites extraites totales

Soit (u_n) une suite réelle.
On suppose que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ. Alors (u_n) converge vers ℓ

Remarque Si $\ell = \infty$.

Démonstration

Exercice

<u>Exercice</u>

On considère une suite réelle (u_n) telle que les suites $(u_{2n}),(u_{2n+1}),(u_{3n})$ convergent.

Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Suites monotones

Théorème - Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite croissante. On a les deux possibilités suivantes :

1. Si (u_n) est majorée, alors (u_n) est convergente (et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$).
2. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

Suites monotones

Théorème - Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite croissante. On a les deux possibilités suivantes :

1. Si (u_n) est majorée, alors (u_n) est convergente (et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$).
2. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration

Suites monotones

Théorème - Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite croissante. On a les deux possibilités suivantes :

1. Si (u_n) est majorée, alors (u_n) est convergente (et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$).
2. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration

Corollaire - Version décroissante

Soit (u_n) une suite décroissante. On a les deux possibilités suivantes :

1. Si (u_n) est minorée, alors (u_n) est convergente (et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$).
2. Si (u_n) n'est pas minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Suites adjacentes

Définition - Suites adjacentes

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

- les deux suites sont monotones de sens contraire ;
- la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Suites adjacentes

Définition - Suites adjacentes

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

- les deux suites sont monotones de sens contraire ;
- la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Théorème - Convergence pour suites adjacentes

Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Démonstration

Exercice

<u>Exercice</u>

Soit les suites de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et $(v_n)_{n \geqslant 1}$ sont adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune est un irrationnel.

Exercice

Exercice

Soit les suites de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune est un irrationnel.

Savoir-faire. Montrer la convergence avec deux sous-suites adjacentes

Il arrive souvent que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) soient adjacentes (dans ce cas il faut le démontrer), on en déduit alors la convergence de (u_n) d'après le critère de convergence par suites extraites totales. C'est le cas :

- si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante et $|f'| < 1$
- si $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ avec $(u_k) \searrow 0$ (critère de Leibniz)...

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Méthodes

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Méthodes

- Encadrement

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Méthodes

- Encadrement
- Suites extraites

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Méthodes

- Encadrement
- Suites extraites
- Suite monotone (et bornée)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Méthodes

- Encadrement
- Suites extraites
- Suite monotone (et bornée)
- Suites adjacentes

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Méthodes

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 18 - Suites numériques
  5. Analyse asymptotique
- Exercices N°357 & 359