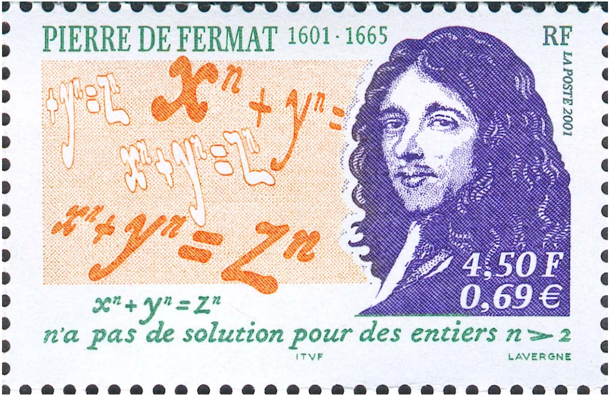

Leçon 37 - Suites numériques

28 novembre 2024

⇒ Méthodes

⇒ Méthodes

Définition et critère d'application

Remarque Autant en emporte$\cdots$.

Définition et critère d'application

Remarque Autant en emporte$\cdots$.

Définition - Suites négligeables

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).
On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N,\ |u_n| \leqslant \epsilon |v_n|.$$

On note alors $u_n = o(v_n)$ (lu u_n est un petit o de v_n) ou parfois $(u_n) \ll (v_n)$.

Définition et critère d'application

Remarque Autant en emporte$\cdots$.

Définition - Suites négligeables

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).
On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N, |u_n| \leqslant \epsilon |v_n|.$$

On note alors $u_n = o(v_n)$ (lu u_n est un petit o de v_n) ou parfois $(u_n) \ll (v_n)$.

Proposition - Comparaison à une constante

Soit (u_n) une suite numérique.

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{K}, u_n = o(\lambda) \text{ ssi } (u_n) \to 0$$

Définition et critère d'application

Remarque Autant en emporte$\cdots$.

Définition - Suites négligeables

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).
On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N,\ |u_n| \leqslant \epsilon |v_n|.$$

On note alors $u_n = o(v_n)$ (lu u_n est un petit o de v_n) ou parfois $(u_n) \ll (v_n)$.

Proposition - Comparaison à une constante

Soit (u_n) une suite numérique.

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ u_n = o(\lambda) \text{ ssi } (u_n) \to 0$$

Démonstration

Nulle infiniment souvent

Définition - Suites infiniment souvent nulles

Soit (u_n) une suite numérique. On note $\mathcal{Z}_u = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n = 0\} = u^{-1}(\{0\})$.

Nulle infiniment souvent

Définition - Suites infiniment souvent nulles

Soit (u_n) une suite numérique. On note
$\mathcal{Z}_u = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n = 0\} = u^{-1}(\{0\})$.

Attention. Cas d'étude

• Si $\mathcal{Z}_u$ est fini, alors (u_n) n'est jamais nulle à partir d'un certain rang. C'est pratique.

Il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{Z}_u \cap [n_0, +\infty[= \emptyset$.

• Si (u_n) est nulle à partir d'un certain rang. Cela n'est pas intéressant.

Il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $[\![n_0, +\infty[\![\subset \mathcal{Z}_u$.

Cela correspond à la situation où le complémentaire de $\mathcal{Z}_u$ est fini.

• Le cas pénible : $\mathcal{Z}_u$ est infini mais pas de la forme contenant $[\![n_0, +\infty[\![$.

$\mathcal{Z}_u$ et son complémentaire sont infinis

Négligeabilité

Proposition - Négligeabilité avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$u_n = o(v_n) \Longleftrightarrow \lim_{n \notin \mathcal{Z}_v} \frac{u_n}{v_n} = 0, \text{ et } \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{Z}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{Z}_u$$

Négligeabilité

Proposition - Négligeabilité avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$u_n = o(v_n) \iff \lim_{n \notin \mathcal{Z}_v} \frac{u_n}{v_n} = 0, \text{ et } \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{Z}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{Z}_u$$

Démonstration

Négligeabilité

Proposition - Négligeabilité avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$u_n = o(v_n) \iff \lim_{n \notin \mathcal{Z}_v} \frac{u_n}{v_n} = 0, \text{ et } \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{Z}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{Z}_u$$

Démonstration

On a un critère (savoir-faire) assez simple lorsque (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang.

Savoir-faire. $u_n = o(v_n)$ avec la notation des limites

Si v_n est non nulle à partir d'un certain rang, alors on utilise l'une des deux implications suivantes :

$$u_n = o(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \longrightarrow 0$$

Relation d'ordre

Proposition - Relation d'ordre strict

$o()$ ou $\ll$ est une relation d'ordre strict sur l'ensemble des suites non (totalement) nulles à partir d'un certain rang : elle est transitive et antiréflexive (pour tout x, on n'a jamais $x\mathscr{R}x$).

Relation d'ordre

Proposition - Relation d'ordre strict

$o()$ ou $\ll$ est une relation d'ordre strict sur l'ensemble des suites non (totalement) nulles à partir d'un certain rang : elle est transitive et antiréflexive (pour tout x, on n'a jamais $x\mathscr{R}x$).

Démonstration

Relation d'ordre

Proposition - Relation d'ordre strict

$o()$ ou $\ll$ est une relation d'ordre strict sur l'ensemble des suites non (totalement) nulles à partir d'un certain rang : elle est transitive et antiréflexive (pour tout x, on n'a jamais $x\mathscr{R}x$).

Démonstration

Remarque Notations

Croissance comparée

Il s'agit simplement d'écrire avec la nouvelle notation des résultats déjà connus sur les fonctions de référence.

Proposition - Croissance comparée

Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < p < q$, $a > 1$, on a

$$((\ln n)\beta) \ll (n^{\alpha}), (n^{p}) \ll (n^{q}), (n^{\alpha}) \ll (a^{n}), (a^{n}) \ll (n!)$$

⇒ Méthodes

Définition et critère d'application

On cherche à définir ce que pourrait être deux suites égales à l'infini.

Définition et critère d'application

On cherche à définir ce que pourrait être deux suites égales à l'infini.

Définition - Suites équivalentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).
On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si $u_n - v_n = o(v_n)$
On note alors $(u_n) \sim (v_n)$ (lu u_n est équivalente à v_n).

Définition et critère d'application

On cherche à définir ce que pourrait être deux suites égales à l'infini.

Définition - Suites équivalentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).
On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si $u_n - v_n = o(v_n)$
On note alors $(u_n) \sim (v_n)$ (lu u_n est équivalente à v_n).

Proposition - Equivalence avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$(u_n) \sim (v_n) \iff \lim_{n \notin \mathcal{Z}_v} \frac{u_n}{v_n} = 1, \text{ et } \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{Z}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{Z}_u$$

Définition et critère d'application

On cherche à définir ce que pourrait être deux suites égales à l'infini.

Définition - Suites équivalentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).
On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si $u_n - v_n = o(v_n)$
On note alors $(u_n) \sim (v_n)$ (lu u_n est équivalente à v_n).

Proposition - Equivalence avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$(u_n) \sim (v_n) \Longleftrightarrow \lim_{n \notin \mathcal{Z}_v} \frac{u_n}{v_n} = 1, \text{ et } \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{Z}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{Z}_u$$

Démonstration

Comparaison à une suite constante

Si v_n est constante (différente de 0) et donc jamais nulle

Proposition - Comparaison à une constante

Soit (u_n) une suite numérique.

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ (non nul !)}, u_n \sim \lambda \text{ ssi } (u_n) \to \lambda$$

Comparaison à une suite constante

Si v_n est constante (différente de 0) et donc jamais nulle

Proposition - Comparaison à une constante

Soit (u_n) une suite numérique.

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ (non nul !)}, u_n \sim \lambda \text{ ssi } (u_n) \to \lambda$$

Démonstration

Comparaison à une suite constante

Si v_n est constante (différente de 0) et donc jamais nulle

Proposition - Comparaison à une constante

Soit (u_n) une suite numérique.

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ (non nul !)},\ u_n \sim \lambda \text{ ssi } (u_n) \to \lambda$$

Démonstration

On a un critère (savoir-faire) assez simple lorsque (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang.

Savoir-faire. $(u_n) \sim (v_n)$ avec la notation des limites

Si v_n est non nulle à partir d'un certain rang, alors on utilise l'une des deux implications suivantes :

$$(u_n) \sim (v_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \longmapsto 1$$

Relation d'équivalence

Proposition - Relation d'équivalence

$\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites numériques.

Relation d'équivalence

Proposition - Relation d'équivalence

$\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites numériques.

Démonstration

Relation d'équivalence

Proposition - Relation d'équivalence

$\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites numériques.

Démonstration

Exercice

Refaire la démonstration en exploitant le savoir-faire précédent dans le cas où les suites sont non nulles à partir d'un certain rang.

Suites équivalentes

Analyse Equivalence en action

Suites équivalentes

Analyse Equivalence en action

Heuristique. Objectif premier

Dans de nombreuses situations, trouver un équivalent signifie trouver une expression fermée, analytique notée v_n (dépendant de n) et permettant de remplacer (car très proche) u_n et avantageusement (car plus simple à calculer).

Suites équivalentes

Analyse Equivalence en action

Heuristique. Objectif premier

Dans de nombreuses situations, trouver un équivalent signifie trouver une expression fermée, analytique notée v_n (dépendant de n) et permettant de remplacer (car très proche) u_n et avantageusement (car plus simple à calculer).

Proposition - Equivalences classiques

On a les comparaisons classiques suivantes :

$n^2 = o(n^3)$ et plus généralement $n^p = o(n^q)$ pour $0 < p < q$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$$

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ formule de Stirling

Suites équivalentes

Analyse Equivalence en action

Heuristique. Objectif premier

Dans de nombreuses situations, trouver un équivalent signifie trouver une expression fermée, analytique notée v_n (dépendant de n) et permettant de remplacer (car très proche) u_n et avantageusement (car plus simple à calculer).

Proposition - Equivalences classiques

On a les comparaisons classiques suivantes :

$n^2 = o(n^3)$ et plus généralement $n^p = o(n^q)$ pour $0 < p < q$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$$

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ formule de Stirling

Démonstration

Exercice

Exercice

$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$. Nous allons essayer de trouver un équivalent de série, pour avoir des idées pour trouver un équivalent de $n!$.

1.
   1.1 Montrer que $1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - n\ln n - n \leqslant n\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(n+1)$
   1.2 En déduire $\ln(n!) \sim n\ln n - n$.
   On peut supposer que $n! = K_n \times n^n \times e^{-n}$, avec $\ln(K_n) = o(n\ln n)$.
   1.3 Montrer que la fonction logarithme est concave. Calculer l'équation de la tangente à $y = \ln(x)$ en $x = k$.
   1.4 En déduire que pour tout $x \in [k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}]$, $\ln(x) \leqslant \frac{1}{k}(x-k) + \ln k$ (on pourra faire un dessin).
   1.5 Montrer alors que $\ln k \leqslant \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t \mathrm{d}t$ (point milieu).
   Puis que $\ln(n!) \geqslant ln(n^n\sqrt{n}e^{-n}\sqrt{2})$
   1.6 On note $u_n = \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$.
   Montrer que (u_n) est décroissante, puis convergente, on note K la limite de (u_n).
   1.7 Donner un équivalent de $n!$ exploitant K.

2.

Exercice

Exercice

$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$. Nous allons essayer de trouver un équivalent de série, pour avoir des idées pour trouver un équivalent de $n!$.

1.
2. Intégrale de Wallis.

   On définie les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$ pour compléter le résultat précédent (i.e. trouver la valeur de la constante).

   2.1 Calculer W_0 et W_1.
   2.2 Donner relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n.
   2.3 En déduire une expression de W_{2n} et de W_{2n+1} en utilisant les factorielles.
   2.4 Par ailleurs, montrer que W_n et W_{n+1} sont équivalentes.
   2.5 En déduire la formule de Stirling (i.e. la valeur de K), en supposant que $n! \sim K n^n e^{-n} \sqrt{n}$

Calculer avec des relations d'équivalence

Théorème - Signe d'une suite

Si la suite (u_n) est équivalente à (v_n), alors à partir d'un certain rang, les deux suites sont de même signe (strict).

Calculer avec des relations d'équivalence

Théorème - Signe d'une suite

Si la suite (u_n) est équivalente à (v_n), alors à partir d'un certain rang, les deux suites sont de même signe (strict).

Démonstration

Calculer avec des relations d'équivalence

Théorème - Signe d'une suite

Si la suite (u_n) est équivalente à (v_n), alors à partir d'un certain rang, les deux suites sont de même signe (strict).

Démonstration

Attention. Evidemment si (u_n) tend vers $0\dots$

$\dots$et que le signe de (u_n) n'est jamais stabilisé ; on ne peut rien dire

Calculer avec des relations d'équivalence

Théorème - Signe d'une suite

Si la suite (u_n) est équivalente à (v_n), alors à partir d'un certain rang, les deux suites sont de même signe (strict).

Démonstration

Attention. Evidemment si (u_n) tend vers $0\dots$

…et que le signe de (u_n) n'est jamais stabilisé ; on ne peut rien dire

Théorème - Equivalents et limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$;
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$, alors $u_n \sim \ell$.

Calculer avec des relations d'équivalence

Théorème - Signe d'une suite

Si la suite (u_n) est équivalente à (v_n), alors à partir d'un certain rang, les deux suites sont de même signe (strict).

Démonstration

Attention. Evidemment si (u_n) tend vers $0\dots$

…et que le signe de (u_n) n'est jamais stabilisé ; on ne peut rien dire

Théorème - Equivalents et limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$;
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$, alors $u_n \sim \ell$.

Démonstration

Attention !

Attention. Equivalence à 0

Ne pas écrire $u_n \sim 0$, cela n'a pas de sens avec la première définition et avec celle qui suit cela signifie que (u_n) est nulle à partir d'un certain rang (ce qui est bien rare...), usuellement ce genre d'écriture provient d'une somme (ou d'une soustraction) d'équivalents, ce qui n'est pas autorisé.

Ne pas confondre $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Attention !

Attention. Equivalence à 0

Ne pas écrire $u_n \sim 0$, cela n'a pas de sens avec la première définition et avec celle qui suit cela signifie que (u_n) est nulle à partir d'un certain rang (ce qui est bien rare...), usuellement ce genre d'écriture provient d'une somme (ou d'une soustraction) d'équivalents, ce qui n'est pas autorisé.
Ne pas confondre $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Théorème - Opérations sur les équivalents

Soient $(u_n),(v_n),(x_n),(y_n)$ telles que $u_n \sim x_n$ et $v_n \sim y_n$. Alors

- $u_n v_n \sim x_n y_n$;
- si (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{x_n}{y_n}$;
- si les suites sont à valeurs strictement positives et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $u_n^\alpha \sim x_n^\alpha$.

Attention !

Attention. Equivalence à 0

Ne pas écrire $u_n \sim 0$, cela n'a pas de sens avec la première définition et avec celle qui suit cela signifie que (u_n) est nulle à partir d'un certain rang (ce qui est bien rare...), usuellement ce genre d'écriture provient d'une somme (ou d'une soustraction) d'équivalents, ce qui n'est pas autorisé.
Ne pas confondre $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème - Opérations sur les équivalents

Soient $(u_n), (v_n), (x_n), (y_n)$ telles que $u_n \sim x_n$ et $v_n \sim y_n$. Alors

- $u_n v_n \sim x_n y_n$;
- si (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{x_n}{y_n}$;
- si les suites sont à valeurs strictement positives et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $u_n^\alpha \sim x_n^\alpha$.

<u>Exercice</u> A démontrer.

Méthode !

Heuristique. Recherche des équivalents

Déterminer un équivalent d'une suite consiste à chercher un équivalent écrit comme produit ou quotient de suites de références (n^α, a^n, $(\ln(n))^\beta$, $n!$...) a priori sans somme (dans une somme, l'un des termes est négligeable devant l'autre et s'enlève de l'équivalent) en laissant les constantes multiplicatives (si on les supprime, la limite du quotient ne sera plus 1). Par exemple :

$$2(n^3+n) \sim \quad ; \frac{\pi}{2n+1} \sim \quad ; e^{n^3+n+1/n} \sim \quad ; \ln(3n^5+n+2) \sim \quad .$$

Méthode !

Heuristique. Recherche des équivalents

Déterminer un équivalent d'une suite consiste à chercher un équivalent écrit comme produit ou quotient de suites de références (n^α, a^n, $(\ln(n))^\beta$, $n!...$) a priori sans somme (dans une somme, l'un des termes est négligeable devant l'autre et s'enlève de l'équivalent) en laissant les constantes multiplicatives (si on les supprime, la limite du quotient ne sera plus 1). Par exemple :

$$2(n^3+n)\sim \quad ; \frac{\pi}{2n+1}\sim \quad ; e^{n^3+n+1/n}\sim \quad ; \ln(3n^5+n+2)\sim \quad .$$

Exemple Problème d'addition. . .

Méthode !

Attention. Ce qui ne marche pas

D'une manière générale, les équivalents ne passent ni aux sommes, ni aux exponentielles, ni aux logarithmes.

Méthode !

Attention. Ce qui ne marche pas

D'une manière générale, les équivalents ne passent ni aux sommes, ni aux exponentielles, ni aux logarithmes.

Savoir-faire. Comment faire si on veut additionner des équivalents ?

Dans ces cas-là, et dans toute opération un peu compliquée,
on remplace $u_n \sim v_n$ par $u_n = v_n + o(v_n) = v_n(1+\epsilon_n)$ avec $\epsilon_n \to 0$,
comme il s'agit d'égalités (LA VRAIE !), on peut alors faire des opérations.
L'enjeu : que les parties principales de disparaissent pas comparativement à la suite de domination.

⇒ Méthodes

Définition

Mais pour le calcul asymptotique, le notation vraiment pratique est la suivante. C'est avec elle que l'on fera les calculs.

Définition

Mais pour le calcul asymptotique, le notation vraiment pratique est la suivante. C'est avec elle que l'on fera les calculs.

Définition - Suite dominée

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).
On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si

$$\exists\, C > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N,\ |u_n| \leqslant C|v_n|.$$

On note $(u_n) = O\big((v_n)\big)$ qui se lit « u_n est un grand O de v_n ».
On dit aussi parfois que (v_n) est prépondérante à (ou domine) (u_n).

Définition

Mais pour le calcul asymptotique, le notation vraiment pratique est la suivante. C'est avec elle que l'on fera les calculs.

Définition - Suite dominée

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).
On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si

$$\exists\, C > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N,\ |u_n| \leqslant C|v_n|.$$

On note $(u_n) = O\big((v_n)\big)$ qui se lit « u_n est un grand O de v_n ».
On dit aussi parfois que (v_n) est prépondérante à (ou domine) (u_n).

Exemple Relations avec les notations précédentes

Expression avec la limite

Proposition - Domination avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$(u_n) = O(v_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathcal{Z}_v} \text{ bornée, et } \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{Z}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{Z}_u$$

Expression avec la limite

Proposition - Domination avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$(u_n) = O(v_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathcal{Z}_v} \text{ bornée, et } \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{Z}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{Z}_u$$

Exercice

Faire la démonstration

Expression avec la limite

Proposition - Domination avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$(u_n) = O(v_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathcal{Z}_v} \text{ bornée, et } \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{Z}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{Z}_u$$

<u>Exercice</u>

Faire la démonstration

Savoir-faire. $u_n = O(v_n)$ avec la notation des limites

Si v_n est non nulle à partir d'un certain rang, alors on utilise l'une des deux implications suivantes (⇒ ou ⇐) :

$$(u_n) = O(v_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est bornée}$$

Expression avec la limite

Proposition - Domination avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$(u_n) = O(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathcal{Z}_v} \text{ bornée, et } \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{Z}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{Z}_u$$

Exercice

Faire la démonstration

Savoir-faire. $u_n = O(v_n)$ avec la notation des limites

Si v_n est non nulle à partir d'un certain rang, alors on utilise l'une des deux implications suivantes (⇒ ou ⇐) :

$$(u_n) = O(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est bornée}$$

Propotion Implication sur les limites

Soit (u_n) une suite réelle. On a

$u_n = O(1) \iff (u_n)$ est bornée

Relation de préordre

Proposition - Relation de préordre

O est une relation de préordre (réflexive et transitive) sur l'ensemble des suites numériques.

Relation de préordre

Proposition - Relation de préordre

O est une relation de préordre (réflexive et transitive) sur l'ensemble des suites numériques.

Exercice

Faire la démonstration

Relation de préordre

Proposition - Relation de préordre

O est une relation de préordre (réflexive et transitive) sur l'ensemble des suites numériques.

Exercice

Faire la démonstration

Remarque La relation d'équivalence naturelle à associer à $O(\cdot)$

Manipuler $O(\cdot)$

Heuristique. Une première formule commentée

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On a alors $H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$.
Cela signifie que le n-ieme nombre harmonique est égal à $\ln n$ additionné de la constante $\gamma \approx 0{,}5772156649$ d'Euler et d'un terme d'une autre suite, inconnue, mais dont on sait que divisé par $\frac{1}{n}$ (c'est-à-dire multiplié par n) elle reste bornée ou encore une suite que ne dépasse pas un nombre constant de fois $\frac{1}{n}$.

Manipuler $O(\cdot)$

Heuristique. Une première formule commentée

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On a alors $H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Cela signifie que le n-ieme nombre harmonique est égal à $\ln n$ additionné de la constante $\gamma \approx 0,5772156649$ d'Euler et d'un terme d'une autre suite, inconnue, mais dont on sait que divisé par $\frac{1}{n}$ (c'est-à-dire multiplié par n) elle reste bornée ou encore une suite que ne dépasse pas un nombre constant de fois $\frac{1}{n}$.

Remarque Addition, multiplication

Manipuler $O(\cdot)$

Heuristique. Une première formule commentée

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On a alors $H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Cela signifie que le n-ieme nombre harmonique est égal à $\ln n$ additionné de la constante $\gamma \approx 0{,}577\,215\,664\,9$ d'Euler et d'un terme d'une autre suite, inconnue, mais dont on sait que divisé par $\frac{1}{n}$ (c'est-à-dire multiplié par n) elle reste bornée ou encore une suite que ne dépasse pas un nombre constant de fois $\frac{1}{n}$.

Remarque Addition, multiplication

Analyse Que signifie $O(\frac{1}{n}) + O(\frac{1}{n^2})$?

Deux petites remarques au passage

Avant de passer aux théorèmes et démonstrations, deux petites remarques complémentaires :

Deux petites remarques au passage

Avant de passer aux théorèmes et démonstrations, deux petites remarques complémentaires :

Truc & Astuce pour le calcul - Pour manipuler une opération avec $O(a_n)$

Lorsque vous rencontrer $O(a_n)$ (avec (a_n) non nulle à partir d'un certain rang), vous pouvez le remplacer par $(u_n) = (a_n \times \epsilon_n)$ avec ϵ_n bornée.

Deux petites remarques au passage

Avant de passer aux théorèmes et démonstrations, deux petites remarques complémentaires :

Truc & Astuce pour le calcul - Pour manipuler une opération avec $O(a_n)$

Lorsque vous rencontrer $O(a_n)$ (avec (a_n) non nulle à partir d'un certain rang), vous pouvez le remplacer par $(u_n) = (a_n \times \epsilon_n)$ avec ϵ_n bornée.

Attention. Rappel : il ne s'agit pas d'une relation d'équivalence

Rappelons que même s'il y a une égalité : il n'y a pas de symétrie.
On a $O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n})$, mais on n'a pas $O(\frac{1}{n}) = O(\frac{1}{n^2})$.
Toute suite dominée par $(\frac{1}{n^2})$ est dominée par $\frac{1}{n}$ mais la réciproque est fausse.
Ce symbole $= O()$ est plutôt à voir comme une relation d'ordre, voir une inclusion d'ensemble. L'ensemble des suites dominées par $(\frac{1}{n^2})$ est inclus dans l'ensemble des suites dominées par $(\frac{1}{n})$.

Opérations

Proposition - Opérations entre les relations

Soient $(u_n),(v_n),(w_n),(x_n)$ quatre suites réelles.

- Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$
- Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $w_n = O(u_n) \Leftrightarrow w_n = O(v_n)$.
- Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n + v_n = O(w_n)$.
  Autrement écrit : $O(w_n) + O(w_n) = O(w_n)$
- Si $u_n = O(v_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u_n = O(v_n)$
  Autrement écrit : $\lambda \times O(v_n) = O(v_n)$
- Si u_n et v_n ne s'annulent pas et $u_n = O(v_n)$ alors $\dfrac{1}{v_n} = O(\dfrac{1}{u_n})$.
- Si $u_n = O(v_n)$ et alors $u_n \times x_n = O(v_n \times x_n)$.
- Si $u_n = O(v_n)$ et $w_n = O(x_n)$ alors $u_n \times w_n = O(v_n \times x_n)$.
- Si les termes u_n et v_n sont > 0 avec $u_n = O(v_n)$, alors pour $\alpha > 0$ on a $u_n^\alpha = O(v_n^\alpha)$.

Opérations

Proposition - Opérations entre les relations

Soient $(u_n), (v_n), (w_n), (x_n)$ quatre suites réelles.

- Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$
- Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $w_n = O(u_n) \Leftrightarrow w_n = O(v_n)$.
- Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n + v_n = O(w_n)$.
  Autrement écrit : $O(w_n) + O(w_n) = O(w_n)$
- Si $u_n = O(v_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u_n = O(v_n)$
  Autrement écrit : $\lambda \times O(v_n) = O(v_n)$
- Si u_n et v_n ne s'annulent pas et $u_n = O(v_n)$ alors $\dfrac{1}{v_n} = O(\dfrac{1}{u_n})$.
- Si $u_n = O(v_n)$ et alors $u_n \times x_n = O(v_n \times x_n)$.
- Si $u_n = O(v_n)$ et $w_n = O(x_n)$ alors $u_n \times w_n = O(v_n \times x_n)$.
- Si les termes u_n et v_n sont > 0 avec $u_n = O(v_n)$, alors pour $\alpha > 0$ on a $u_n^\alpha = O(v_n^\alpha)$.

Comparaison logartithmique

Proposition - Comparaison logarithmique

Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes strictement positifs telles qu'à partir d'un certain rang on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Alors $u_n = O(v_n)$.

Comparaison logartithmique

Proposition - Comparaison logarithmique

Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes strictement positifs telles qu'à partir d'un certain rang on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

Alors $u_n = O(v_n)$.

Corollaire - Demi-critère de D'Alembert

Soit (u_n) est une suite à termes positifs, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1 \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 1 \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Comparaison logartithmique

Proposition - Comparaison logarithmique

Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes strictement positifs telles qu'à partir d'un certain rang on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

Alors $u_n = O(v_n)$.

Corollaire - Demi-critère de D'Alembert

Soit (u_n) est une suite à termes positifs, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1 \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 1 \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Démonstration

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Méthodes

Conclusion

Objectifs

⇒ Méthodes

- Encadrement

Conclusion

Objectifs

⇒ Méthodes

- Encadrement
- Suites extraites

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Méthodes

- Encadrement
- Suites extraites
- Suite monotone (et bornée)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Méthodes

- Encadrement
- Suites extraites
- Suite monotone (et bornée)
- Suites adjacentes

Conclusion

Objectifs

⇒ Méthodes

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 19 - Topologie réelle
  1 Problèmes
  2. Halo 3. Intervalles et connexité
- Exercices N°364 & 371