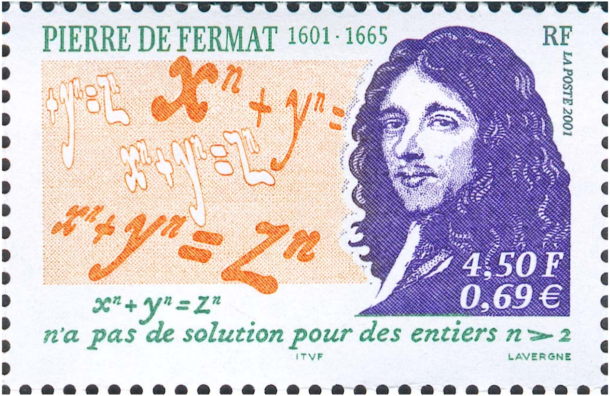


# Leçon 38 - Questions topologiques interprétées sur $\mathbb{R}$

2 décembre 2024



⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles


1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
   - 2.1. Voisinages
   - 2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité
   - 3.1. Connexité
   - 3.2. Intervalle réel
   - 3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Problèmes

**Problème -** Extension aux suites de la propriété de la borne supérieure.



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Problèmes

**Problème -** Extension aux suites de la propriété de la borne supérieure.

**Problème -** Voisinage



⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Problèmes

**Problème -** Extension aux suites de la propriété de la borne supérieure.

**Problème -** Voisinage

**Problème -** Pas de trou



⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Problèmes

**Problème** - Extension aux suites de la propriété de la borne supérieure.

**Problème** - Voisinage

**Problème** - Pas de trou

**Problème** - Principe de dichotomie




⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Voisinage

## Heuristique. Exemple de limite de suites

On a vu que pour les suites il y a deux formalismes différents selon qu'elle converge vers un nombre $\ell$ ou diverge vers l'infini :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \mid \forall\ n \geqslant N, |u_n - \ell| < \epsilon$$

$$\forall\ A > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \mid \forall\ n \geqslant N, u_n > A$$

- $n \geqslant N$, correspond à un certain voisinage entiers de $+\infty$,
- $\forall\ A, \cdots > A$ à l'ensemble des voisinages réels de $+\infty$
- $\forall\ \epsilon > 0, |\cdots - \ell| < \epsilon$ à l'ensemble des voisinage de $\ell$.

Il est préférable d'unifier en une notation ces différents types de voisinage.



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Voisinage autour d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

## Définition - Voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $a$ s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \subset V$.

$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $[A, +\infty[ \subset V$

$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, B] \subset V$

Une propriété est dite vraie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

si elle est vraie sur un voisinage de $a$.

On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages du point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.



⇒ Voisinage et débordement
⇒ Connexité et intervalles
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Voisinage autour d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

## Définition - Voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Soit $a \in \mathbb{R}$.
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $a$ s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $[a - \epsilon, a + \epsilon] \subset V$.
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $[A, +\infty[ \subset V$
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, B] \subset V$
Une propriété est dite vraie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
si elle est vraie sur un voisinage de $a$.
On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages du point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

**Exemple** $[2, 3] \cup ]4, 6[$



⇒ Voisinage et débordement
⇒ Connexité et intervalles
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Voisinage autour d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

## Définition - Voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Soit $a \in \mathbb{R}$.
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $a$ s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $[a - \epsilon, a + \epsilon] \subset V$.
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $[A, +\infty[ \subset V$
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, B] \subset V$
Une propriété est dite vraie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
si elle est vraie sur un voisinage de $a$.
On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages du point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

**Exemple** $[2,3] \cup ]4,6[$

**Remarque** Voisinage avec des ouverts

# Stabilité pour des intervalles

## Proposition - Stabilité de voisinage par intersection

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \{-\infty, +\infty\}$ (i.e. $a \in \overline{\mathbb{R}}$).

- Pour tout voisinage $V$ de $a$ (i.e. $V \in \mathcal{V}_a$), $a \in V$.
- Si $V \in \mathcal{V}_a$ et $V \subset W$, alors $W \in \mathcal{V}_a$.
- L'intersection de deux voisinages de $a$ est un voisinage de $a$ (non vide) :

$$\forall\ V_1, V_2 \in \mathcal{V}_a,\ V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_a.$$

- $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_a} = \{a\}$ (borne inférieure...) - *qui n'est pas un voisinage de* $a$.




1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Stabilité pour des intervalles



⇒ Voisinage et débordement
⇒ Connexité et intervalles
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

## Proposition - Stabilité de voisinage par intersection

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \{-\infty, +\infty\}$ (i.e. $a \in \overline{\mathbb{R}}$).

- Pour tout voisinage $V$ de $a$ (i.e. $V \in \mathcal{V}_a$), $a \in V$.
- Si $V \in \mathcal{V}_a$ et $V \subset W$, alors $W \in \mathcal{V}_a$.
- L'intersection de deux voisinages de $a$ est un voisinage de $a$ (non vide) :

$$\forall\ V_1, V_2 \in \mathcal{V}_a,\ V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_a.$$

- $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_a} = \{a\}$ (borne inférieure...) - *qui n'est pas un voisinage de* $a$.

**Demonstration**

# Stabilité pour des intervalles



⇒ Voisinage et débordement
⇒ Connexité et intervalles
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

## Proposition - Stabilité de voisinage par intersection

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \{-\infty, +\infty\}$ (i.e. $a \in \overline{\mathbb{R}}$).

- Pour tout voisinage $V$ de $a$ (i.e. $V \in \mathcal{V}_a$), $a \in V$.
- Si $V \in \mathcal{V}_a$ et $V \subset W$, alors $W \in \mathcal{V}_a$.
- L'intersection de deux voisinages de $a$ est un voisinage de $a$ (non vide) :

$$\forall\ V_1, V_2 \in \mathcal{V}_a,\ V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_a.$$

- $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_a} = \{a\}$ (borne inférieure...) - *qui n'est pas un voisinage de* $a$.

**Demonstration**

Exercice

Soient $\ell_1$, $\ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que :

Si $\forall\ V \in \mathcal{V}_{\ell_1}$, $\ell_2 \in V$ (i.e $V \in \mathcal{V}_{\ell_2}$), alors $\ell_1 = \ell_2$.

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
   - 2.1. Voisinages
   - 2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité
   - 3.1. Connexité
   - 3.2. Intervalle réel
   - 3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Intérieur

Pour nous, le but des définitions qui suivront est de donner le vocabulaire le plus adaptée aux questions qui se poseront pour définir avec précision la continuité (mais aussi la dérivabilité) des fonctions numériques.



⇒ Voisinage et débordement
⇒ Connexité et intervalles
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Intérieur

Pour nous, le but des définitions qui suivront est de donner le vocabulaire le plus adaptée aux questions qui se poseront pour définir avec précision la continuité (mais aussi la dérivabilité) des fonctions numériques.

## Définition - Point intérieur à une partie de $\mathbb{R}$

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que $a$ est un point intérieur de $A$, si il existe $\epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \subset A$.
Ou encore si $A$ est un voisinage de $a$. On note alors $a \in \mathring{A}$.
$\mathring{A}$ est l'ensemble des points intérieurs de $A$.



⇒ Voisinage et débordement
⇒ Connexité et intervalles
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Intérieur

Pour nous, le but des définitions qui suivront est de donner le vocabulaire le plus adaptée aux questions qui se poseront pour définir avec précision la continuité (mais aussi la dérivabilité) des fonctions numériques.

**Définition - Point intérieur à une partie de $\mathbb{R}$**

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que $a$ est un point intérieur de $A$, si il existe $\epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \subset A$.
Ou encore si $A$ est un voisinage de $a$. On note alors $a \in \mathring{A}$.
$\mathring{A}$ est l'ensemble des points intérieurs de $A$.

**Exemple.** Cas d'un intervalle semi-ouvert



1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Stabilité

## Propostion - Stabilité

Soit $A_1, A_2$ deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A_1 \subset A_2$.
Alors $\mathring{A}_1 \subset \mathring{A}_2$.



1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Stabilité

**Propostion - Stabilité**

Soit $A_1, A_2$ deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A_1 \subset A_2$.
Alors $\mathring{A}_1 \subset \mathring{A}_2$.

**Démonstration**



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Adhérence

**Définition - Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$**

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que $a$ est un point adhérant de $A$, si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A \neq \emptyset$.
On note alors $a \in \overline{A}$.
$\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents de $A$.




1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Adhérence

## Définition - Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que $a$ est un point adhérant de $A$, si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A \neq \emptyset$.
On note alors $a \in \overline{A}$.
$\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents de $A$.

## Attention. Ne pas confondre. . .

Point adhérent à une partie et valeur d'adhérence d'une suite.


1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Adhérence

## Définition - Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que $a$ est un point adhérant de $A$, si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A \neq \emptyset$.
On note alors $a \in \overline{A}$.
$\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents de $A$.

## Attention. Ne pas confondre...

Point adhérent à une partie et valeur d'adhérence d'une suite.

**Exemple** Cas d'un intervalle semi-ouvert



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Adhérence



⇒ Voisinage et débordement
⇒ Connexité et intervalles
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

## Définition - Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que $a$ est un point adhérant de $A$, si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A \neq \emptyset$.
On note alors $a \in \overline{A}$.
$\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents de $A$.

## Attention. Ne pas confondre...

Point adhérent à une partie et valeur d'adhérence d'une suite.

**Exemple** Cas d'un intervalle semi-ouvert

## Proposition - Stabilité

Soit $A_1, A_2$ deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A_1 \subset A_2$.
Alors $\overline{A_1} \subset \overline{A_2}$.

# Adhérence

## Définition - Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que $a$ est un point adhérant de $A$, si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A \neq \emptyset$.
On note alors $a \in \overline{A}$.
$\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents de $A$.

## Attention. Ne pas confondre...

Point adhérent à une partie et valeur d'adhérence d'une suite.

**Exemple** Cas d'un intervalle semi-ouvert

## Proposition - Stabilité

Soit $A_1, A_2$ deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A_1 \subset A_2$.
Alors $\overline{A_1} \subset \overline{A_2}$.

**Démonstration**



1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Point d'accumulation

On a parfois besoin d'une suite convergente vers $a$, tout en étant différente de $a$.



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Point d'accumulation

On a parfois besoin d'une suite convergente vers $a$, tout en étant différente de $a$.

## Définition - Point d'accumulation

On dit que $a$ est un point d'accumulation de $A$
si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $\left[[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A\right] \setminus \{a\} \neq \emptyset$.
Autrement écrit $a$ est un point d'accumulation ssi $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$.



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Point d'accumulation

On a parfois besoin d'une suite convergente vers $a$, tout en étant différente de $a$.

## Définition - Point d'accumulation

On dit que $a$ est un point d'accumulation de $A$
si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $\big[[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A\big] \setminus \{a\} \neq \emptyset$.
Autrement écrit $a$ est un point d'accumulation ssi $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$.

**Remarque**. Points isolés



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Point d'accumulation

On a parfois besoin d'une suite convergente vers $a$, tout en étant différente de $a$.

## Définition - Point d'accumulation

On dit que $a$ est un point d'accumulation de $A$
si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $\left[[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A\right] \setminus \{a\} \neq \emptyset$.
Autrement écrit $a$ est un point d'accumulation ssi $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$.

**Remarque**. Points isolés

**Exemple**. Point d'accumulation de $A = \{0\} \cup [1, 4[$




1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Point d'accumulation

On a parfois besoin d'une suite convergente vers $a$, tout en étant différente de $a$.

## Définition - Point d'accumulation

On dit que $a$ est un point d'accumulation de $A$

si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $\left[[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A\right] \setminus \{a\} \neq \emptyset$.

Autrement écrit $a$ est un point d'accumulation ssi $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$.

**Remarque**. Points isolés

**Exemple**. Point d'accumulation de $A = \{0\} \cup [1,4[$

<u>Exercice</u>

Montrer que si $a$ est un point d'accumulation, alors dans chaque voisinage de $a$, il existe une infinité de points de $A$.




1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Suite convergente

Les points adhérents sont les points que l'on peut approcher par des points de $A$, ou encore pour lesquels la question du calcul de $\lim\limits_{x\to a, x\in A}$ a un sens.

Les points d'accumulation sont les points que l'on peut approcher par des points de $A \setminus \{a\}$ , ou encore pour lesquels la question du calcul de $\lim\limits_{x\to a, x\in A, x\neq a}$ a un sens.



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

## Suite convergente

Les points adhérents sont les points que l'on peut approcher par des points de $A$, ou encore pour lesquels la question du calcul de $\lim\limits_{x \to a, x \in A}$ a un sens.
Les points d'accumulation sont les points que l'on peut approcher par des points de $A \setminus \{a\}$ , ou encore pour lesquels la question du calcul de $\lim\limits_{x \to a, x \in A, x \neq a}$ a un sens.

### Proposition - Suite convergente d'éléments de $A$

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$. Soit $a \in A$
$a$ est adhérent à $A$ si et seulement si il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a = \lim(a_n)$.
Les points adhérents de $A$ sont toutes les limites possibles d'éléments de $A$.



⇒ Voisinage et débordement
⇒ Connexité et intervalles
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Suite convergente

Les points adhérents sont les points que l'on peut approcher par des points de $A$, ou encore pour lesquels la question du calcul de $\lim\limits_{x\to a, x\in A}$ a un sens.

Les points d'accumulation sont les points que l'on peut approcher par des points de $A \setminus \{a\}$ , ou encore pour lesquels la question du calcul de $\lim\limits_{x\to a, x\in A, x\neq a}$ a un sens.

## Proposition - Suite convergente d'éléments de $A$

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$. Soit $a \in A$

$a$ est adhérent à $A$ si et seulement si il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a = \lim(a_n)$.

Les points adhérents de $A$ sont toutes les limites possibles d'éléments de $A$.

**Démonstration**




1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Complément sur la borne supérieure (inférieure)

## Proposition - Borne supérieure

Soit $X$ une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Soit $M$ un majorant de $X$.
$M \in \overline{X}$ ($M$ est adhérent de $X$). Plus précisément, c'est le seul majorant adhérent à $X$ : Alors $M = \sup X$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de $X$ qui converge vers $M$.



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Complément sur la borne supérieure (inférieure)



⇒ Voisinage et débordement
⇒ Connexité et intervalles
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

## Proposition - Borne supérieure

Soit $X$ une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Soit $M$ un majorant de $X$.
$M \in \overline{X}$ ($M$ est adhérent de $X$). Plus précisément, c'est le seul majorant adhérent à $X$ : Alors $M = \sup X$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de $X$ qui converge vers $M$.

<u>Exercice</u>
Donner la caractérisation équivalente pour $m = \inf X$

# Complément sur la borne supérieure (inférieure)

**Proposition - Borne supérieure**

Soit $X$ une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Soit $M$ un majorant de $X$.
$M \in \overline{X}$ ($M$ est adhérent de $X$). Plus précisément, c'est le seul majorant adhérent à $X$ : Alors $M = \sup X$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de $X$ qui converge vers $M$.

Exercice

Donner la caractérisation équivalente pour $m = \inf X$

**Démonstration**




1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Densité dans $\mathbb{R}$

**Remarque** Rappel de la définition de la densité



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Densité dans $\mathbb{R}$

**Remarque** Rappel de la définition de la densité

## Proposition - Densité

Une partie $X$ de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$

ssi $\overline{X} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est égal à l'adhérence de $X$.)

ssi pour tout $a$ réel il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n) \to a$.




1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Densité dans $\mathbb{R}$

**Remarque** Rappel de la définition de la densité

## Proposition - Densité

Une partie $X$ de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$

ssi $\overline{X} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est égal à l'adhérence de $X$.)

ssi pour tout $a$ réel il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n) \to a$.

**Démonstration**



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Densité dans $\mathbb{R}$

**Remarque** Rappel de la définition de la densité

## Proposition - Densité

Une partie $X$ de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$
ssi $\overline{X} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est égal à l'adhérence de $X$.)
ssi pour tout $a$ réel il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n) \to a$.

**Démonstration**

## Proposition - Densité des rationnels dans $\mathbb{R}$

La densité des rationnels dans $\mathbb{R}$ permet d'affirmer que :
tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.



1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Densité dans $\mathbb{R}$

**Remarque** Rappel de la définition de la densité

## Proposition - Densité

Une partie $X$ de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$

ssi $\overline{X} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est égal à l'adhérence de $X$.)

ssi pour tout $a$ réel il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n) \to a$.

**Démonstration**

## Proposition - Densité des rationnels dans $\mathbb{R}$

La densité des rationnels dans $\mathbb{R}$ permet d'affirmer que :
tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.

**Remarque** On a mieux encore...



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Ensemble (non) séparé

Le but est donné un nom propre aux ensembles « continues », i.e. sans trou afin d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Ensemble (non) séparé

Le but est donné un nom propre aux ensembles « continues », i.e. sans trou afin d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

## Définition - Ensemble séparé

Soient $A$ et $B$, deux parties de $\mathbb{R}$.
On dit $A$ et $B$ sont séparés si $A \cap \overline{B} = \emptyset$ et $\overline{A} \cap B = \emptyset$.
Aucun point de $A$ n'est dans l'adhérence de $B$, aucun point de $B$ n'est dans l'adhérence de $A$.



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Ensemble (non) séparé



⇒ Voisinage et débordement
⇒ Connexité et intervalles
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

Le but est donné un nom propre aux ensembles « continues », i.e. sans trou afin d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

## Définition - Ensemble séparé

Soient $A$ et $B$, deux parties de $\mathbb{R}$.
On dit $A$ et $B$ sont séparés si $A \cap \overline{B} = \emptyset$ et $\overline{A} \cap B = \emptyset$.
Aucun point de $A$ n'est dans l'adhérence de $B$, aucun point de $B$ n'est dans l'adhérence de $A$.

**Exemple** Cas de $A = ]0,1[$ et $B = ]1,2]$ ou $B = [1,2]$

# Ensemble connexe

**Définition - Ensemble connexe**

Soit $E$ une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que $E$ est connexe, si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux sous-ensembles séparés non vide.



⇒ Voisinage et débordement
⇒ Connexité et intervalles
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Ensemble connexe

## Définition - Ensemble connexe

Soit $E$ une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que $E$ est connexe, si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux sous-ensembles séparés non vide.

**Exemple** Réunion d'intervalles



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Ensemble connexe

## Définition - Ensemble connexe

Soit $E$ une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que $E$ est connexe, si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux sous-ensembles séparés non vide.

**Exemple** Réunion d'intervalles

Exercice

Faire la démonstration de $[0,4]$ est connexe.



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Ensemble connexe

## Définition - Ensemble connexe

Soit $E$ une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que $E$ est connexe, si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux sous-ensembles séparés non vide.

**Exemple** Réunion d'intervalles

Exercice

Faire la démonstration de $[0, 4]$ est connexe.
La méthode s'adapte à tout intervalle. Ainsi, dans $\mathbb{R}$, tous les intervalles (même ouverts) sont connexes.

## Savoir-faire. Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est connexe

La méthode consiste souvent à faire un raisonnement par l'absurde et à travailler à partir du nombre $x_0$ qui est obtenu comme borne supérieure d'un ensemble $A$ (à inventer) et élément de $B$ ou bien élément de $A$ et borne inférieure de $B$.
A partir de ce $x_0$, trouver une contradiction.



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Intervalles

**Définition - Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$**

Soit $I$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si il vérifie :

$$\forall\, x < y \in I, \qquad \{t \in \mathbb{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\} \subset I$$

($I$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$).



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Intervalles

**Définition - Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$**

Soit $I$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si il vérifie :

$$\forall\, x < y \in I, \qquad \{t \in \mathbb{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\} \subset I$$

($I$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$).

On notera plus simplement $[a,b]$ l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\}$ dont il est question dans la définition.



1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Intervalles

**Définition - Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$**

Soit $I$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si il vérifie :

$$\forall\, x < y \in I, \qquad \{t \in \mathbb{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\} \subset I$$

($I$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$).

On notera plus simplement $[a,b]$ l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\}$ dont il est question dans la définition.

**Exemple** Ensemble des majorants d'une partie majorée



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Intervalles de $\mathbb{R}$

## Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de la forme $(a, b)$, avec $a < b$ et $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Par notation $"(", ")" \in \{"[", "]"\}$.
Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $]a, b[ \subset I \subset [a, b]$.

Leçon 38 - Questions topologiques interprétées sur $\mathbb{R}$

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
   2.1. Voisinages
   2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
   3.1. Connexité
   3.2. Intervalle réel
   3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Intervalles de $\mathbb{R}$

## Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de la forme $(a,b)$, avec $a < b$ et $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Par notation $"(","")" \in \{"[","]"\}$.
Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $]a,b[ \subset I \subset [a,b]$.

**Démonstration**




1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Intervalles de $\mathbb{R}$

## Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de la forme $(a,b)$, avec $a < b$ et $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Par notation "(",")" $\in$ {"[","]"}.
Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $]a,b[\subset I \subset [a,b]$.

**Démonstration**

On a vu que dans $\mathbb{R}$, les intervalles étaient connexes. La réciproque est vraie .

## Proposition - Les connexes de $\mathbb{R}$

Si $X$ est un connexe de $\mathbb{R}$, alors $X$ est un intervalle.



⇒ Voisinage et débordement
⇒ Connexité et intervalles
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Intervalles de $\mathbb{R}$

## Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de la forme $(a,b)$, avec $a<b$ et $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Par notation "(",")" $\in$ {"[","]"}.
Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $]a,b[\subset I \subset [a,b]$.

**Démonstration**

On a vu que dans $\mathbb{R}$, les intervalles étaient connexes. La réciproque est vraie .

## Proposition - Les connexes de $\mathbb{R}$

Si $X$ est un connexe de $\mathbb{R}$, alors $X$ est un intervalle.

**Démonstration**



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
  - 2.1. Voisinages
  - 2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité
  - 3.1. Connexité
  - 3.2. Intervalle réel
  - 3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Achevons $\mathbb{R}$

## Heuristique. Donner une borne supérieure à une partie non majorée

Cela correspond à donner une borne supérieure : $+\infty$ à une partie non majorée de $\mathbb{R}$ et une borne inférieure : $-\infty$ à une partie non minorée de $\mathbb{R}$.
Cela permet d'écrire certaines propriétés de manière plus simple en différenciant moins de cas.
Par exemple, le théorème fondamental n'est plus : *toute partie bornée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure*, mais il devient *toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure*



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Achevons $\mathbb{R}$

## Heuristique. Donner une borne supérieure à une partie non majorée

Cela correspond à donner une borne supérieure : $+\infty$ à une partie non majorée de $\mathbb{R}$ et une borne inférieure : $-\infty$ à une partie non minorée de $\mathbb{R}$.
Cela permet d'écrire certaines propriétés de manière plus simple en différenciant moins de cas.
Par exemple, le théorème fondamental n'est plus : *toute partie bornée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure*, mais il devient *toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure*

## Définition - Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On définit : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ où $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$
et on prolonge la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, x \leqslant +\infty \text{ et } x \geqslant -\infty.$$



1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Le coût

### Attention. Mais il y a un coût...

Il est difficile d'étendre les opérations $+$ et $\times$ à $\overline{\mathbb{R}}$ sans aboutir à des incohérences ;
pour « $0 \times +\infty$, $0 \times -\infty$ et $(+\infty)+(-\infty)$ ».



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Le coût

## Attention. Mais il y a un coût. . .

Il est difficile d'étendre les opérations $+$ et $\times$ à $\overline{\mathbb{R}}$ sans aboutir à des incohérences ;
pour « $0 \times +\infty$, $0 \times -\infty$ et $(+\infty)+(-\infty)$ ».

Ce que l'on gagne :

## Proposition - Existence de la borne supérieure

Dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute partie de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure



1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Le coût

### Attention. Mais il y a un coût...

Il est difficile d'étendre les opérations $+$ et $\times$ à $\overline{\mathbb{R}}$ sans aboutir à des incohérences ;
pour « $0 \times +\infty$, $0 \times -\infty$ et $(+\infty) + (-\infty)$ ».

Ce que l'on gagne :

### Proposition - Existence de la borne supérieure

Dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute partie de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure

**Démonstration**




1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles



⇒ Voisinage et débordement
⇒ Connexité et intervalles
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Conclusion

## Objectifs

### $\Rightarrow$ Voisinage et débordement

- Définition de voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ ou de $+\infty$, $-\infty$



$\Rightarrow$ Voisinage et débordement
$\Rightarrow$ Connexité et intervalles
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Voisinage et débordement

- Définition de voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ ou de $+\infty$, $-\infty$
- Stabilité par réunion, intersection. . .



⇒ Voisinage et débordement
⇒ Connexité et intervalles

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Conclusion

## Objectifs

### $\Rightarrow$ Voisinage et débordement

- Définition de voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ ou de $+\infty$, $-\infty$
- Stabilité par réunion, intersection...
- Points intérieurs, points adhérent, point isolé, point d'accumulation



$\Rightarrow$ Voisinage et débordement
$\Rightarrow$ Connexité et intervalles
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Conclusion

## Objectifs

### $\Rightarrow$ Voisinage et débordement

- Définition de voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ ou de $+\infty$, $-\infty$
- Stabilité par réunion, intersection...
- Points intérieurs, points adhérent, point isolé, point d'accumulation
- Ré-interprétation de borne supérieure/inférieure ou de densité en terme de limite de suites.



$\Rightarrow$ Voisinage et débordement
$\Rightarrow$ Connexité et intervalles
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
2.1. Voisinages
2.2. Intérieur, adhérence
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Conclusion

**Objectifs**

$\Rightarrow$ Voisinage et débordement

$\Rightarrow$ Connexité et intervalles



$\Rightarrow$ Voisinage et débordement

$\Rightarrow$ Connexité et intervalles

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

- Ensemble connexe : ensemble non séparable



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

- Ensemble connexe : ensemble non séparable
- Dans $\mathbb{R}$ : les intervalles !



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Conclusion

**Objectifs**

$\Rightarrow$ Voisinage et débordement

$\Rightarrow$ Connexité et intervalles

- Ensemble connexe : ensemble non séparable
- Dans $\mathbb{R}$ : les intervalles !
- L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$



1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

**Pour la prochaine fois**

- Lecture du cours : chapitre 19 - Topologie réelle
  4. Segment & 5. Complétude
- Exercices : N° 373 & 378
- TD de jeudi :
  8h-10h : 374, 377, 379, 385, 387
  10h-12h : 37, 376, 381, 384, 386



⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

2.1. Voisinages

2.2. Intérieur, adhérence

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée