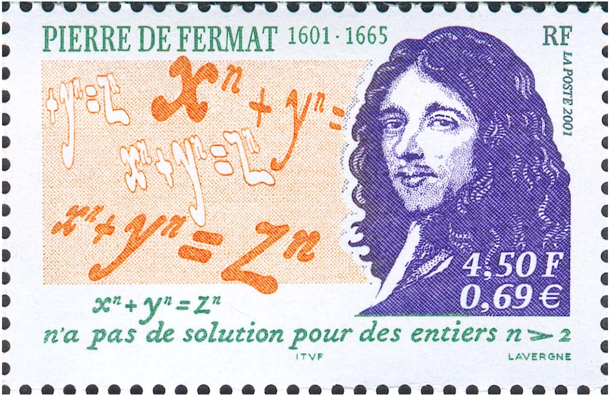

Leçon 39 - Questions topologiques interprétées sur ℝ

3 décembre 2024

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité
   - 3.1. Connexité
   - 3.2. Intervalle réel
   - 3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités
   - 4.1. Segments emboîtés
   - 4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
   - 4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
   - 4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude
   - 5.1. Suites de Cauchy
   - 5.2. ℝ est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

 3.1. Connexité

 3.2. Intervalle réel

 3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

 4.1. Segments emboîtés

 4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

 4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

 4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

 5.1. Suites de Cauchy

 5.2. $\mathbb{R}$ est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Ensemble (non) séparé

Définition - Ensemble séparé

Soient A et B, deux parties de $\mathbb{R}$.
On dit A et B sont séparés si $A \cap \overline{B} = \emptyset$ et $\overline{A} \cap B = \emptyset$.
Aucun point de A n'est dans l'adhérence de B, aucun point de B n'est dans l'adhérence de A.

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Ensemble connexe

Définition - Ensemble connexe

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que E est connexe, si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux sous-ensembles séparés non vide.

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Ensemble connexe

Définition - Ensemble connexe

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que E est connexe, si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux sous-ensembles séparés non vide.

Savoir-faire. Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est connexe

La méthode consiste souvent à faire un raisonnement par l'absurde et à travailler à partir du nombre x_0 qui est obtenu comme borne supérieure d'un ensemble A (à inventer) et élément de B ou bien élément de A et borne inférieure de B.
A partir de ce x_0, trouver une contradiction.

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Intervalles

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
   3.1. Connexité
   3.2. Intervalle réel
   3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
   4.1. Segments emboîtés
   4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
   4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
   4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
   5.1. Suites de Cauchy
   5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Définition - Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si il vérifie :

$$\forall\, x < y \in I, \qquad \{t \in \mathbb{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\} \subset I$$

(I est une partie convexe de $\mathbb{R}$).

Intervalles

Définition - Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si il vérifie :

$$\forall\, x < y \in I, \qquad \{t \in \mathbb{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\} \subset I$$

(I est une partie convexe de $\mathbb{R}$).

On notera plus simplement $[a, b]$ l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\}$ dont il est question dans la définition.

Leçon 39 - Questions topologiques interprétées sur $\mathbb{R}$

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Intervalles

Définition - Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si il vérifie :

$$\forall\ x < y \in I, \qquad \{t \in \mathbb{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\} \subset I$$

(I est une partie convexe de $\mathbb{R}$).

On notera plus simplement $[a, b]$ l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\}$ dont il est question dans la définition.

Exemple Ensemble des majorants d'une partie majorée

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Intervalles de $\mathbb{R}$

Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de la forme (a, b), avec $a < b$ et $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Par notation $"(", ")" \in \{"[", "]"\}$.
Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $]a, b[\subset I \subset [a, b]$.

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Intervalles de $\mathbb{R}$

Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de la forme (a,b), avec $a < b$ et $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Par notation "(","")" $\in$ {"[","]"}.
Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $]a,b[\subset I \subset [a,b]$.

Démonstration

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Intervalles de $\mathbb{R}$

Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de la forme (a,b), avec $a<b$ et $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$.
Par notation "(","")" $\in$ {"[","]"}.
Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ tel que $]a,b[\subset I\subset[a,b]$.

Démonstration

On a vu que dans $\mathbb{R}$, les intervalles étaient connexes. La réciproque est vraie .

Proposition - Les connexes de $\mathbb{R}$

Si X est un connexe de $\mathbb{R}$, alors X est un intervalle.

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a\in\mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Intervalles de $\mathbb{R}$

Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de la forme (a,b), avec $a<b$ et $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Par notation "(","")" $\in$ {"[","]"}.
Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $]a,b[\subset I \subset [a,b]$.

Démonstration

On a vu que dans $\mathbb{R}$, les intervalles étaient connexes. La réciproque est vraie .

Proposition - Les connexes de $\mathbb{R}$

Si X est un connexe de $\mathbb{R}$, alors X est un intervalle.

Démonstration

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité
   - 3.1. Connexité
   - 3.2. Intervalle réel
   - 3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités
   - 4.1. Segments emboîtés
   - 4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
   - 4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
   - 4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude
   - 5.1. Suites de Cauchy
   - 5.2. $\mathbb{R}$ est complet

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Achevons $\mathbb{R}$

Heuristique. Donner une borne supérieure à une partie non majorée

Cela correspond à donner une borne supérieure : $+\infty$ à une partie non majorée de $\mathbb{R}$ et une borne inférieure : $-\infty$ à une partie non minorée de $\mathbb{R}$.
Cela permet d'écrire certaines propriétés de manière plus simple en différenciant moins de cas.
Par exemple, le théorème fondamental n'est plus : *toute partie bornée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure*, mais il devient *toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure*

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Achevons $\mathbb{R}$

Heuristique. Donner une borne supérieure à une partie non majorée

Cela correspond à donner une borne supérieure : $+\infty$ à une partie non majorée de $\mathbb{R}$ et une borne inférieure : $-\infty$ à une partie non minorée de $\mathbb{R}$.
Cela permet d'écrire certaines propriétés de manière plus simple en différenciant moins de cas.
Par exemple, le théorème fondamental n'est plus : *toute partie bornée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure*, mais il devient *toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure*

Définition - Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On définit : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ où $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$
et on prolonge la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, x \leqslant +\infty \text{ et } x \geqslant -\infty.$$

Le coût

Attention. Mais il y a un coût...

Il est difficile d'étendre les opérations $+$ et $\times$ à $\overline{\mathbb{R}}$ sans aboutir à des incohérences ;
pour « $0 \times +\infty$, $0 \times -\infty$ et $(+\infty) + (-\infty)$ ».

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Le coût

Attention. Mais il y a un coût. . .

Il est difficile d'étendre les opérations $+$ et $\times$ à $\overline{\mathbb{R}}$ sans aboutir à des incohérences ;
pour « $0 \times +\infty, 0 \times -\infty$ et $(+\infty) + (-\infty)$ ».

Ce que l'on gagne :

Proposition - Existence de la borne supérieure

Dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute partie de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Le coût

Attention. Mais il y a un coût…

Il est difficile d'étendre les opérations $+$ et $\times$ à $\overline{\mathbb{R}}$ sans aboutir à des incohérences ;
pour « $0 \times +\infty$, $0 \times -\infty$ et $(+\infty) + (-\infty)$ ».

Ce que l'on gagne :

Proposition - Existence de la borne supérieure

Dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute partie de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure

Démonstration

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Segment

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Définition - Segment

On appelle segment de $\mathbb{R}$, tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

Segment

Définition - Segment

On appelle segment de $\mathbb{R}$, tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

Remarque Listes

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Suite de segments emboités de limite nulle

En exploitant les suites adjacentes réelles :

Proposition - Théorème des segments emboîtés de longueur tendant vers 0

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments emboîtés (i.e. $I_{n+1} \subset I_n$), de longueur tendant vers 0 (i.e. si $I_n = [a_n, b_n]$ alors $b_n - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).
Alors leur intersection est un singleton :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \mid \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\ell\}.$$

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Suite de segments emboités de limite nulle

En exploitant les suites adjacentes réelles :

Proposition - Théorème des segments emboîtés de longueur tendant vers 0

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments emboîtés (i.e. $I_{n+1} \subset I_n$), de longueur tendant vers 0 (i.e. si $I_n = [a_n, b_n]$ alors $b_n - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).
Alors leur intersection est un singleton :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \mid \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\ell\}.$$

Démonstration

Leçon 39 - Questions topologiques interprétées sur $\mathbb{R}$

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
   3.1. Connexité
   3.2. Intervalle réel
   3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
   4.1. Segments emboîtés
   4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
   4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
   4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
   5.1. Suites de Cauchy
   5.2. $\mathbb{R}$ est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Fonctions d'intervalles

Définition - Fonctions d'intervalles. Sous-additivité

On appelle fonction d'intervalles de (a, b) une application F de l'ensemble des sous-intervalles de (a, b) dans $\mathbb{R}$.
On dit que F est sous-additive sur (a, b) si

$$\forall\ \alpha < \beta < \gamma \in [a, b], \qquad F(\alpha, \gamma) \leqslant F(\alpha, \beta) + F(\beta, \gamma)$$

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Fonctions d'intervalles

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Définition - Fonctions d'intervalles. Sous-additivité

On appelle fonction d'intervalles de (a,b) une application F de l'ensemble des sous-intervalles de (a,b) dans $\mathbb{R}$.
On dit que F est sous-additive sur (a,b) si

$$\forall\ \alpha < \beta < \gamma \in [a,b], \qquad F(\alpha,\gamma) \leqslant F(\alpha,\beta) + F(\beta,\gamma)$$

Exemple L'intégrale de f

Fonctions d'intervalles

Définition - Fonctions d'intervalles. Sous-additivité

On appelle fonction d'intervalles de (a,b) une application F de l'ensemble des sous-intervalles de (a,b) dans $\mathbb{R}$.
On dit que F est sous-additive sur (a,b) si

$$\forall\ \alpha < \beta < \gamma \in [a,b], \qquad F(\alpha,\gamma) \leqslant F(\alpha,\beta) + F(\beta,\gamma)$$

Exemple L'intégrale de f

Définition - Fonction paramétrée par une famille de propositions

Soit $(\mathscr{P}_I)_{I\subset[a,b]}$, une famille de propositions sur les sous-intervalles de $[a,b]$.
L'application $f_{\mathscr{P}} : (\alpha,\beta) \mapsto [\mathscr{P}_{[\alpha,\beta]}] = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathscr{P}_{[\alpha,\beta]} \text{ vraie} \\ 0 & \text{si } \mathscr{P}_{[\alpha,\beta]} \text{ fausse} \end{cases}$ est une fonction d'intervalles.

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Fonctions d'intervalles (savoir-faire)

Savoir-faire. Sous-additivité pour un fonction d'intervalle définie par une propriété

Dans ce cas, on doit vérifier :

$$\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in[a,b],\qquad f_{\mathscr{P}}(\alpha,\gamma)\leqslant f_{\mathscr{P}}(\alpha,\beta)+f_{\mathscr{P}}(\beta,\gamma)$$

Or $f_{\mathscr{P}}$ est à valeurs dans $\{0,1\}$. Donc la sous-additivité est équivalente au fait que

$$f_{\mathscr{P}}(\alpha,\beta)=f_{\mathscr{P}}(\beta,\gamma)=0\Longrightarrow f_{\mathscr{P}}(\alpha,\gamma)=0$$

1. Problèmes

2. Halo autour de $a\in\mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Principe de Dichotomie

Le principe suivant nous sera utile plusieurs fois par la suite, toujours à propos de résultats très fins sur $\mathbb{R}$ (Bolzano-Weierstrass, Cousin, valeurs intermédiaires...)

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Principe de Dichotomie

Le principe suivant nous sera utile plusieurs fois par la suite, toujours à propos de résultats très fins sur $\mathbb{R}$ (Bolzano-Weierstrass, Cousin, valeurs intermédiaires...)

Proposition - Processus de dichotomie

Soit $[a,b]$ un segment (intervalle fermé) de $\mathbb{R}$.
Soit $(\mathscr{P}_I)$, une famille de propositions définie sur l'ensemble des sous-segments de $[a,b]$.
Supposons que $f_{\mathscr{P}}$ la fonction d'intervalles paramétrée par $(\mathscr{P}_I)$ est sous-additive.
Si $f_{\mathscr{P}}(a,b) = 1$, il existe (a_n), (b_n) adjacentes dans $[a,b]$ (ou une suite de segments $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ emboités de longueur tendant vers 0) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{\mathscr{P}}(a_n,b_n) = 1$.

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Principe de Dichotomie

Le principe suivant nous sera utile plusieurs fois par la suite, toujours à propos de résultats très fins sur $\mathbb{R}$ (Bolzano-Weierstrass, Cousin, valeurs intermédiaires...)

Proposition - Processus de dichotomie

Soit $[a, b]$ un segment (intervalle fermé) de $\mathbb{R}$.
Soit $(\mathscr{P}_I)$, une famille de propositions définie sur l'ensemble des sous-segments de $[a, b]$.
Supposons que $f_{\mathscr{P}}$ la fonction d'intervalles paramétrée par $(\mathscr{P}_I)$ est sous-additive.
Si $f_{\mathscr{P}}(a, b) = 1$, il existe (a_n), (b_n) adjacentes dans $[a, b]$ (ou une suite de segments $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ emboités de longueur tendant vers 0) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{\mathscr{P}}(a_n, b_n) = 1$.

Remarque Simplification des notations

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Application de la dichotomie

Voyons en action ce principe, même si les objets suivants ne sont pas encore bien définis.
La structure d'application est proche de celle de la récurrence ou plutôt de la méthode de la descente infinie de FERMAT.

Leçon 39 - Questions topologiques interprétées sur $\mathbb{R}$

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Application de la dichotomie

Voyons en action ce principe, même si les objets suivants ne sont pas encore bien définis.
La structure d'application est proche de celle de la récurrence ou plutôt de la méthode de la descente infinie de FERMAT.
Application Anticipation : TVI

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Principe de Dichotomie

Le principe suivant nous sera utile plusieurs fois par la suite, toujours à propos de résultats très fins sur $\mathbb{R}$ (Bolzano-Weierstrass, Cousin, valeurs intermédiaires...)

Proposition - Processus de dichotomie

Soit $[a,b]$ un segment (intervalle fermé) de $\mathbb{R}$.
Soit $(\mathscr{P}_I)$, une famille de propositions définie sur l'ensemble des sous-segments de $[a,b]$.
Supposons que $f_{\mathscr{P}}$ la fonction d'intervalles paramétrée par $(\mathscr{P}_I)$ est sous-additive.
Si $f_{\mathscr{P}}(a,b) = 1$, il existe (a_n), (b_n) adjacentes dans $[a,b]$ (ou une suite de segments $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ emboités de longueur tendant vers 0) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{\mathscr{P}}(a_n,b_n) = 1$.

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Principe de Dichotomie

Le principe suivant nous sera utile plusieurs fois par la suite, toujours à propos de résultats très fins sur $\mathbb{R}$ (Bolzano-Weierstrass, Cousin, valeurs intermédiaires...)

Proposition - Processus de dichotomie

Soit $[a,b]$ un segment (intervalle fermé) de $\mathbb{R}$.
Soit $(\mathscr{P}_I)$, une famille de propositions définie sur l'ensemble des sous-segments de $[a,b]$.
Supposons que $f_{\mathscr{P}}$ la fonction d'intervalles paramétrée par $(\mathscr{P}_I)$ est sous-additive.
Si $f_{\mathscr{P}}(a,b)=1$, il existe (a_n), (b_n) adjacentes dans $[a,b]$ (ou une suite de segments $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ emboités de longueur tendant vers 0) tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_{\mathscr{P}}(a_n,b_n)=1$.

Démonstration

1. Problèmes
2. Halo autour de $a\in\mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Principe de Dichotomie

Le principe suivant nous sera utile plusieurs fois par la suite, toujours à propos de résultats très fins sur $\mathbb{R}$ (Bolzano-Weierstrass, Cousin, valeurs intermédiaires...)

Proposition - Processus de dichotomie

Soit $[a,b]$ un segment (intervalle fermé) de $\mathbb{R}$.
Soit $(\mathscr{P}_I)$, une famille de propositions définie sur l'ensemble des sous-segments de $[a,b]$.
Supposons que $f_{\mathscr{P}}$ la fonction d'intervalles paramétrée par $(\mathscr{P}_I)$ est sous-additive.
Si $f_{\mathscr{P}}(a,b)=1$, il existe (a_n), (b_n) adjacentes dans $[a,b]$ (ou une suite de segments $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ emboités de longueur tendant vers 0) tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_{\mathscr{P}}(a_n,b_n)=1$.

Démonstration

Remarque Longueur de I_n

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a\in\mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Mode d'application du principe de dichotomie

Analysez bien ces deux types d'applications du processus de dichotomie. Dans quel cas se trouve l'application qui conduit au TVI ?

Leçon 39 - Questions topologiques interprétées sur $\mathbb{R}$

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $\alpha \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Mode d'application du principe de dichotomie

Analysez bien ces deux types d'applications du processus de dichotomie. Dans quel cas se trouve l'application qui conduit au TVI ?

Savoir-faire. Comment exploiter le « processus de dichotomie ».

De manière générale, on exploite le processus de dichotomie de deux façons :

- Pour mettre en avant un objet x qui vérifie une propriété particulière. On le construit en tant que limite des suites adjacentes qui émergent. On suit un mouvement descendant.
  (C'est le cas de la démonstration du théorème de BOLZANO-WEIERSTRASSS).
- Pour montrer une propriété vraie sur un intervalle compact (global). On le couple à un raisonnement par l'absurde. On suit un mouvement ascendant.
  (C'est le cas de la démonstration du lemme de COUSIN).

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
    3.1. Connexité
    3.2. Intervalle réel
    3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
    4.1. Segments emboîtés
    4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
    4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
    4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
    5.1. Suites de Cauchy
    5.2. $\mathbb{R}$ est complet

TBW

Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

TBW

Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

On a le corollaire (équivalent) :

Corollaire - Suite de points d'un segment

Soit (u_n) une suite de points du segment $[a, b]$. Alors il existe une suite extraite convergente.

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

TBW

Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

On a le corollaire (équivalent) :

Corollaire - Suite de points d'un segment

Soit (u_n) une suite de points du segment $[a, b]$. Alors il existe une suite extraite convergente.

Démonstration

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

TBW

Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

On a le corollaire (équivalent) :

Corollaire - Suite de points d'un segment

Soit (u_n) une suite de points du segment $[a,b]$. Alors il existe une suite extraite convergente.

Démonstration

Savoir-faire. Suite-extraite dans N_k

Dans la démonstration, :
S'il existe une suite (N_k) de sous-ensembles de $\mathbb{N}$, tel que pour tout k, N_k est infinie.
Alors, il existe une suite (v_k) strictement croissante telles que $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $v_k \in N_k$.
Il suffit de prendre $v_{k+1} := \min(N_{k+1} \cap [\![v_k+1, +\infty [\![)$.

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Version complexe

Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Version complexe

Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Pour la démonstration, on exploite le critère précédent.

La subtilité : il y a deux suites extraites, a priori.

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. ℝ est complet

Version complexe

Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Pour la démonstration, on exploite le critère précédent.

La subtilité : il y a deux suites extraites, a priori.

Démonstration

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Motivations

Heuristique. Pourquoi le lemme de Cousin ?

Le lemme de Cousin est une formulation particulièrement efficace des propriétés de compacité de $\mathbb{R}$.

Bien qu'il ne soit pas au programme officiel de la MPSI (ni de la MP), il figure dans ce cours car

- Il est vrai
- Il est commode. Nous l'exploiterons à quelques reprises dans le prochain chapitre de cours
- Il est nécessaire à la construction d'une intégrale robuste sur $\mathbb{R}$: l'intégrale de Kurzweil-Henstock que nous construirons au deuxième semestre.

Cela commence par deux définitions.

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Subdivision pointée adaptée

Définition - Subdivision pointée

Soit $I = [a, b]$, un segment de $\mathbb{R}$.
On appelle subdivision pointée de I la donnée

- d'une subdivision (finie !) $\sigma = (x_0, x_1, \ldots x_n)$ de $[a, b]$,
  $\forall\ i \in \mathbb{N}_{n-2},\ a = x_0 \leqslant x_i \leqslant x_{i+1} \leqslant x_n = b$
- un pointage de cette subdivision $t_1, t_2, \ldots t_n \in I$ tels que
  $\forall\ i \in \mathbb{N}_n,\ t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

On la notera $\sigma_p = \{([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \ldots ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$,
on appelera les (t_i) les points de marquage de σ_p.

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Subdivision pointée adaptée

Définition - Subdivision pointée

Soit $I = [a, b]$, un segment de $\mathbb{R}$.
On appelle subdivision pointée de I la donnée

- d'une subdivision (finie !) $\sigma = (x_0, x_1, \ldots x_n)$ de $[a, b]$,
  $\forall\ i \in \mathbb{N}_{n-2},\ a = x_0 \leqslant x_i \leqslant x_{i+1} \leqslant x_n = b$
- un pointage de cette subdivision $t_1, t_2, \ldots t_n \in I$ tels que
  $\forall\ i \in \mathbb{N}_n,\ t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

On la notera $\sigma_p = \{([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \ldots ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$,
on appelera les (t_i) les points de marquage de σ_p.

Définition - Subdivision pointée adaptée à un jauge

Un pas ou une jauge est une application $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$.
Une subdvision $\sigma_p = \{([x_0, x_1], t_1), \ldots ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$ est dite adaptée au pas δ ou δ-fine, si

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n, \qquad [x_{k-1}, x_k] \subset \left[t_k - \frac{\delta(t_k)}{2}, t_k + \frac{\delta(t_k)}{2}\right]$$

On remarquera que $0 \leqslant x_k - x_{k-1} \leqslant \delta(t_k)$

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Remarques

Attention. Strictement positif

Il est important que $\delta(\cdot) > 0$, comme on va le voir dans la démonstration du lemme de Cousin.
Par contre, il n'est pas nécessaire que δ soit continue

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Remarques

Attention. Strictement positif

Il est important que $\delta(\cdot) > 0$, comme on va le voir dans la démonstration du lemme de Cousin.
Par contre, il n'est pas nécessaire que δ soit continue

Remarque Compacité

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Remarques

Attention. Strictement positif

Il est important que $\delta(\cdot) > 0$, comme on va le voir dans la démonstration du lemme de Cousin.
Par contre, il n'est pas nécessaire que δ soit continue

Remarque Compacité

Théorème - Lemme de Cousin

Pour tout δ, jauge sur $[a, b]$, il existe une subdivision pointée $\sigma_p = \{([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$, adaptée à δ (δ-fine)

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Remarques

Attention. Strictement positif

Il est important que $\delta(\cdot) > 0$, comme on va le voir dans la démonstration du lemme de Cousin.
Par contre, il n'est pas nécessaire que δ soit continue

Remarque Compacité

Théorème - Lemme de Cousin

Pour tout δ, jauge sur $[a,b]$, il existe une subdivision pointée $\sigma_p = \{([x_0,x_1],t_1),([x_1,x_2],t_2),\dots([x_{n-1},x_n],t_n)\}$, adaptée à δ (δ-fine)

Remarque Une question de recouvrement

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Remarques

Attention. Strictement positif

Il est important que $\delta(\cdot) > 0$, comme on va le voir dans la démonstration du lemme de Cousin.
Par contre, il n'est pas nécessaire que δ soit continue

Remarque Compacité

Théorème - Lemme de Cousin

Pour tout δ, jauge sur $[a,b]$, il existe une subdivision pointée $\sigma_p = \{([x_0,x_1],t_1),([x_1,x_2],t_2),\dots([x_{n-1},x_n],t_n)\}$, adaptée à δ (δ-fine)

Remarque Une question de recouvrement

Exercice

Formaliser le lemme de Cousin

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Remarques

Attention. Strictement positif

Il est important que $\delta(\cdot) > 0$, comme on va le voir dans la démonstration du lemme de Cousin.
Par contre, il n'est pas nécessaire que δ soit continue

Remarque Compacité

Théorème - Lemme de Cousin

Pour tout δ, jauge sur $[a,b]$, il existe une subdivision pointée $\sigma_p = \{([x_0,x_1],t_1),([x_1,x_2],t_2),\dots([x_{n-1},x_n],t_n)\}$, adaptée à δ (δ-fine)

Remarque Une question de recouvrement

<u>Exercice</u>

Formaliser le lemme de Cousin

Démonstration

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Mode d'application du lemme de Cousin

Savoir-faire. Exploiter le lemme de Cousin

Il y a deux façons d'exploiter le lemme de Cousin.

• On peut exploiter le lemme de Cousin par l'absurde.
On doit vérifier une certaine propriété $\mathscr{P}$.
On démontre alors que sa contradiction conduit à l'existence d'une jauge δ sur un segment fermé qui n'admet pas de subdivision δ-fine, ou une contradiction sur la finitude de la subdivision.
Trouver δ n'est pas toujours évident. (On a une application de cette méthode plus bas).

• Une jauge δ est naturellement donnée (exemple, la jauge de continuité).
Alors l'utilisation du lemme de Cousin conduit à couper l'intervalle en un nombre **fini** d'intervalles dont on maitrise le « centre »(t_i).
Il reste ensuite à considérer un $\max$ et non un $\sup$. (On applique cette méthode pour démontrer le théorème de Heine).

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Mode d'application du lemme de Cousin

Savoir-faire. Exploiter le lemme de Cousin

Il y a deux façons d'exploiter le lemme de Cousin.

• On peut exploiter le lemme de Cousin par l'absurde.
On doit vérifier une certaine propriété $\mathscr{P}$.
On démontre alors que sa contradiction conduit à l'existence d'une jauge δ sur un segment fermé qui n'admet pas de subdivision δ-fine, ou une contradiction sur la finitude de la subdivision.
Trouver δ n'est pas toujours évident. (On a une application de cette méthode plus bas).

• Une jauge δ est naturellement donnée (exemple, la jauge de continuité).
Alors l'utilisation du lemme de Cousin conduit à couper l'intervalle en un nombre **fini** d'intervalles dont on maitrise le « centre »(t_i).
Il reste ensuite à considérer un $\max$ et non un $\sup$. (On applique cette méthode pour démontrer le théorème de Heine).

Exemple Nouvelle démonstration du TBW

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude
1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. ℝ est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
   3.1. Connexité
   3.2. Intervalle réel
   3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
   4.1. Segments emboîtés
   4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
   4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
   4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
   5.1. Suites de Cauchy
   5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Concept

Heuristique. Mise en place du concept

La difficulté avec les suites, c'est que pour démontrer leur convergence, on doit connaître la limite (la définition nécessite le calcul $|u_n - \ell|$).
Que peut-on dire si la suite ne « bouge »plus, visiblement après un certain nombre de calculs ? CAUCHY propose de s'intéresser à ces suites là en particulier (on les appelle suite de CAUCHY).
Sont-elles nécessairement convergentes ? famille de suites
Autre définition avec u_N au lieu de u_q, plus naturelle. Puis équivalence des deux défintions.
Interprétation avec $\epsilon = 10^{-k}$

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Définition

Définition - Suites de CAUCHY

On dit que la suite (u_n) vérifie le critère de CAUCHY si elle verifie l'un des deux critères suivants équivalents :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall\ p \geqslant n_0, |u_p - u_{n_0}| < \epsilon$$

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \mid \forall\ p, q \geqslant N, |u_p - u_q| < \epsilon$$

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Définition

Définition - Suites de CAUCHY

On dit que la suite (u_n) vérifie le critère de CAUCHY si elle verifie l'un des deux critères suivants équivalents :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall p \geqslant n_0, |u_p - u_{n_0}| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall p, q \geqslant N, |u_p - u_q| < \epsilon$$

Montrons que les deux critères sont équivalents.

Démonstration

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Définition

Définition - Suites de CAUCHY

On dit que la suite (u_n) vérifie le critère de CAUCHY si elle verifie l'un des deux critères suivants équivalents :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall\ p \geqslant n_0, |u_p - u_{n_0}| < \epsilon$$

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \mid \forall\ p, q \geqslant N, |u_p - u_q| < \epsilon$$

Montrons que les deux critères sont équivalents.

Démonstration

Application Suite, écrite décimalement

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

$\mathbb{R}$ complet

L'idée de CAUCHY est de trouver un critère de suite convergente sans avoir à connaître la limite.

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

$\mathbb{R}$ complet

L'idée de CAUCHY est de trouver un critère de suite convergente sans avoir à connaître la limite.

Proposition - Condition nécessaire

Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente, alors elle vérifie le critère de Cauchy

⇒ Méthodes segments
⇒ Complétude

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

$\mathbb{R}$ complet

L'idée de CAUCHY est de trouver un critère de suite convergente sans avoir à connaître la limite.

Proposition - Condition nécessaire

Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente, alors elle vérifie le critère de Cauchy

Démonstration

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

$\mathbb{R}$ complet

L'idée de CAUCHY est de trouver un critère de suite convergente sans avoir à connaître la limite.

Proposition - Condition nécessaire

Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente, alors elle vérifie le critère de Cauchy

Démonstration

Proposition - Condition suffisante

Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy, alors elle est convergente.

1. Problèmes
2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Démonstration

La démonstration de la proposition est faite dans l'exercice suivant

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Démonstration

La démonstration de la proposition est faite dans l'exercice suivant

Exercice

1. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2. Montrer que toute suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente, converge vers cette même limite.
3. Conclure, en exploitant le théorème de Bolzano-Weiertrass.

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Conclusion

Objectifs

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $\alpha \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Méthodes avec les segments

- Suite de segments de limite nulle, puis principe de dichotomie

$\Rightarrow$ Méthodes segments

$\Rightarrow$ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $\alpha \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité
   - 3.1. Connexité
   - 3.2. Intervalle réel
   - 3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités
   - 4.1. Segments emboîtés
   - 4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
   - 4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
   - 4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude
   - 5.1. Suites de Cauchy
   - 5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Méthodes avec les segments

- Suite de segments de limite nulle, puis principe de dichotomie
- Fonctions d'intervalles

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Conclusion

Objectifs

⇒ Méthodes avec les segments

- Suite de segments de limite nulle, puis principe de dichotomie
- Fonctions d'intervalles
- Théorème de Bolzano-Weierstrass

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Conclusion

Objectifs

⇒ Méthodes avec les segments

- Suite de segments de limite nulle, puis principe de dichotomie
- Fonctions d'intervalles
- Théorème de Bolzano-Weierstrass
- Lemme de Cousin et mode d'application

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Conclusion

Objectifs

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

1. Problèmes
2. Halo autour de $\alpha \in \mathbb{R}$
3. Intervalles et connexité
3.1. Connexité
3.2. Intervalle réel
3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée
4. Segments et compacités
4.1. Segments emboîtés
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass
4.4. Lemme de Cousin
5. Curiosité topologique : complétude
5.1. Suites de Cauchy
5.2. ℝ est complet

Conclusion

Objectifs

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

- Suite de Cauchy

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Conclusion

Objectifs

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

- Suite de Cauchy
- $\mathbb{R}$ est complet : une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet

Conclusion

Objectifs

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 13 - Groupes
- Exercice N°380, 382

1. Problèmes

2. Halo autour de $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. $\mathbb{R}$ est complet