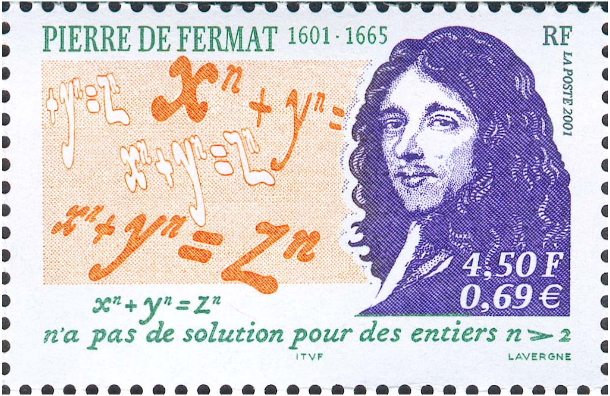

Leçon 41 - Groupes

6 décembre 2024

Définition

Par la suite, on considérera $(G, \top)$ un groupe.

Définition

Par la suite, on considérera $(G, \top)$ un groupe.

Définition - Sous-groupe

$H \subset G$ (non vide) est un sous-groupe de G si H est stable pour la loi interne et si la loi induite (restriction de la loi à H) munit H d'une structure de groupe. On note $H < G$

Définition

Par la suite, on considérera $(G, \top)$ un groupe.

Définition - Sous-groupe

$H \subset G$ (non vide) est un sous-groupe de G si H est stable pour la loi interne et si la loi induite (restriction de la loi à H) munit H d'une structure de groupe. On note $H < G$

Proposition - Elément neutre et symétriques

Soit $H < G$. Alors l'élément neutre de H est l'élément neutre de G.
Si $x \in H$, le symétrique de x dans H est le symétrique de x dans G.

Définition

Par la suite, on considérera $(G, \top)$ un groupe.

Définition - Sous-groupe

$H \subset G$ (non vide) est un sous-groupe de G si H est stable pour la loi interne et si la loi induite (restriction de la loi à H) munit H d'une structure de groupe. On note $H < G$

Proposition - Elément neutre et symétriques

Soit $H < G$. Alors l'élément neutre de H est l'élément neutre de G.
Si $x \in H$, le symétrique de x dans H est le symétrique de x dans G.

Démonstration

Caractérisations

Théorème - Caractérisation 1

Soit $H \subset G$. H est un sous-groupe de G si et seulement si il vérifie :

- $H \neq \emptyset$
- $\forall (x, y) \in H^2, x \top y \in H$
- $\forall x \in H, x^{-1} \in H$

Caractérisations

Théorème - Caractérisation 1

Soit $H \subset G$. H est un sous-groupe de G si et seulement si il vérifie :

- $H \neq \emptyset$
- $\forall (x, y) \in H^2, x \top y \in H$
- $\forall x \in H, x^{-1} \in H$

Théorème - Caractérisation 2

Soit $H \subset G$. H est un sous-groupe de G si et seulement si il vérifie :

- $H \neq \emptyset$
- $\forall (x, y) \in H^2, x \top y^{-1} \in H$
  (en notation multiplicative : $\forall (x, y) \in H^2, xy^{-1} \in H$;
  en notation additive : $\forall (x, y) \in H^2, x - y \in H$)

Savoir-faire

Savoir-faire. Démontrer que H est un (sous-)groupe

Dans la pratique, lorsque H est une partie de E, groupe. On démontre qu'il s'agit d'un sous-groupe de E

- avec la caractérisation 1, lorsque H et E sont explicites
- avec la caractérisation 2, lorsque H et E sont théoriques

Caractérisations

Théorème - Caractérisation 1

Soit $H \subset G$. H est un sous-groupe de G ssi il vérifie :

- $H \neq \emptyset$
- $\forall (x,y) \in H^2, x \top y \in H$
- $\forall x \in H, x^{-1} \in H$

Théorème - Caractérisation 2

Soit $H \subset G$. H est un sous-groupe de G ssi il vérifie :

- $H \neq \emptyset$
- $\forall (x,y) \in H^2, x \top y^{-1} \in H$
  (en notation multiplicative : $\forall (x,y) \in H^2, xy^{-1} \in H$;
  en notation additive : $\forall (x,y) \in H^2, x - y \in H$)

Démonstration

Caractérisations

Théorème - Caractérisation 1

Soit $H \subset G$. H est un sous-groupe de G ssi il vérifie :

- $H \neq \emptyset$
- $\forall (x,y) \in H^2, x \top y \in H$
- $\forall x \in H, x^{-1} \in H$

Théorème - Caractérisation 2

Soit $H \subset G$. H est un sous-groupe de G ssi il vérifie :

- $H \neq \emptyset$
- $\forall (x,y) \in H^2, x \top y^{-1} \in H$
  (en notation multiplicative : $\forall (x,y) \in H^2, xy^{-1} \in H$;
  en notation additive : $\forall (x,y) \in H^2, x - y \in H$)

Démonstration

Exercice Montrer que si $H_1 < G_1$ et $H_2 < G_2$, alors $H_1 \times H_2 < G_1 \times G_2$.

Deux groupes

Théorème - Intersection

Soit H et $K < G$. Alors $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

Deux groupes

Théorème - Intersection

Soit H et $K < G$. Alors $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

Démonstration

Deux groupes

Théorème - Intersection

Soit H et $K < G$. Alors $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

Démonstration

L'exercice suivant donne TOUS les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$:

Exercice

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, $G \neq \{0\}$.
   Justifier que $G \cap \mathbb{N}^*$ a un plus petit élément $a > 0$.
   Montrer que $G = a\mathbb{Z}$ (utiliser la division euclidienne).

Famille de groupes

Théorème - Intersection de sous-groupes

Soit $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de $(G, \top)$.
Alors $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G.

Famille de groupes

Théorème - Intersection de sous-groupes

Soit $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de $(G, \top)$.
Alors $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G.

Démonstration

Trouver un candidat !

Analyse Plus petit groupe contenant une partie A de G

Trouver un candidat !

Analyse Plus petit groupe contenant une partie A de G

Définition - Groupe engendré

Soit $(G,\top)$ un groupe. Soit A une partie de G.
On appelle groupe engendré par A, le plus petit sous-groupe de G, parmi les sous-groupes de G contenant A.
On le note $< A >$. On a donc $< A > = \bigcap_{H \in \mathscr{A}} H = \inf \mathscr{A}$

(où $\mathscr{A} = \{H < G \mid A \subset H\}$).

Trouver un candidat !

Analyse Plus petit groupe contenant une partie A de G

Définition - Groupe engendré

Soit $(G, \top)$ un groupe. Soit A une partie de G.
On appelle groupe engendré par A, le plus petit sous-groupe de G, parmi les sous-groupes de G contenant A.
On le note $< A >$. On a donc $< A > = \bigcap_{H \in \mathscr{A}} H = \inf \mathscr{A}$

(où $\mathscr{A} = \{H < G \mid A \subset H\}$).

Il faut démontrer que $\bigcap_{H \in \mathscr{A}} H$ est bien le plus petit sous-groupe de G contenant A.

Démonstration

Croissance

Proposition - Croissance de l'engendrement

Si $A \subset B$ sont deux parties d'un groupe G.

Alors $< A > \subset < B >$ (en fait : $< A > < < B >$

Croissance

Proposition - Croissance de l'engendrement

Si $A \subset B$ sont deux parties d'un groupe G.
Alors $< A > \subset < B >$ (en fait : $< A > < < B >$

Démonstration

Applications

Application Réflexes

Applications

Application Réflexes

Savoir-faire. Comment trouver le sous-groupe engendré par une partie A ?

Il faut

1. Pré-sentir la bonne description (efficace) de ce sous-groupe. On donne alors un nom à cet ensemble : K.
2. Montrer que K est bien un groupe et qu'il contient A
3. Montrer que K est nécessairement entièrement inclus dans $< A >$ ou dans tous sous-groupe de $\mathscr{A}$.

Comme $< A >$ est le plus petit sous-groupe contenant A, propriété vérifiée par K, alors $< A > = K$.

Croissance par engendrement

Attention. Nom contradictoire ?

Ce nom semble contradictoire. Par groupe engendré, on entend plutôt quelque chose qui s'agrandit (pour l'inclusion) à partir de A, alors que visiblement il s'agit de quelque chose quo diminue à partir de G.
A-t-on la même chose ?

Croissance par engendrement

Attention. Nom contradictoire ?

Ce nom semble contradictoire. Par groupe engendré, on entend plutôt quelque chose qui s'agrandit (pour l'inclusion) à partir de A, alors que visiblement il s'agit de quelque chose quo diminue à partir de G.
A-t-on la même chose ?

Analyse Engendrement

Croissance par engendrement

Attention. Nom contradictoire ?

Ce nom semble contradictoire. Par groupe engendré, on entend plutôt quelque chose qui s'agrandit (pour l'inclusion) à partir de A, alors que visiblement il s'agit de quelque chose quo diminue à partir de G.
A-t-on la même chose ?

Analyse Engendrement
Exemple Groupes engendré par p dans $\mathbb{Z}$.

Croissance par engendrement

Attention. Nom contradictoire ?

Ce nom semble contradictoire. Par groupe engendré, on entend plutôt quelque chose qui s'agrandit (pour l'inclusion) à partir de A, alors que visiblement il s'agit de quelque chose quo diminue à partir de G.
A-t-on la même chose ?

Analyse Engendrement
Exemple Groupes engendré par p dans $\mathbb{Z}$.
<u>Exercice</u>
Quel est le sous-groupe engendré par $\{p, q\}$ dans $(\mathbb{Z}, +)$?

Groupe monogène

Définition - Groupe monogène

On dit que G est un groupe monogène, s'il existe $x \in G$ tel que $G =< x >$.

Dans ce cas $G = \{x^k, x \in \mathbb{Z}\}$.

Groupe monogène

Définition - Groupe monogène

On dit que G est un groupe monogène, s'il existe $x \in G$ tel que $G = < x >$.
Dans ce cas $G = \{x^k, x \in \mathbb{Z}\}$.

Savoir-faire. Etudier des groupes monogènes

Si G est un groupe que l'on sait monogène, alors il existe $x \in G$ (référence que l'on fixe) tel que $G = < x >$.
L'application $\varphi : \mathbb{Z} \to G$, $x \mapsto x^k$ est bien définie, et surjective. Elle peut être injective ou non (cas fini).
On transfère ensuite par φ (ou φ^{-1}) l'étude de G, à partir de propriétés de $\mathbb{Z}$.

Groupe monogène

Définition - Groupe monogène

On dit que G est un groupe monogène, s'il existe $x \in G$ tel que $G =< x >$.
Dans ce cas $G = \{x^k, x \in \mathbb{Z}\}$.

Savoir-faire. Etudier des groupes monogènes

Si G est un groupe que l'on sait monogène, alors il existe $x \in G$ (référence que l'on fixe) tel que $G =< x >$.
L'application $\varphi : \mathbb{Z} \to G$, $x \mapsto x^k$ est bien définie, et surjective. Elle peut être injective ou non (cas fini).
On transfère ensuite par φ (ou φ^{-1}) l'étude de G, à partir de propriétés de $\mathbb{Z}$.

Exercice

Montrer qu'un groupe monogène est nécessairement abélien

Exemples à partir de $\mathbb{U}$

L'exercice suivant nous aide à faire le point.

Exercice

On considère le groupe $(\mathbb{U}, \times)$.

1. Soit $z_k = e^{\frac{2i\pi}{k}}$. Que vaut le groupe $< z_k >$?
2. Avec les mêmes notations, que vaut le groupe $< z_r, z_s >$?
3. A-t-on pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \mathbb{U}_n$, $\mathbb{U}_n =< z >$?
   Sinon, à quelle condition sur z, a-t-on : $\mathbb{U}_n =< z >$?
4. Quel est le groupe $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$?
5. $\mathbb{U}$ est-il monogène ?

⇒ Decomposer les groupes

Théorème de Lagrange

Proposition - Relation d'équivalence modulo un sous-groupe

Soit $(G,*)$ un groupe et $H < G$, un sous-groupe de G.
On note $\mathscr{R}_H$, la relation définie sur G par :

$$a\mathscr{R}_H a' \longleftrightarrow a^{-1} * a' \in H$$

Alors $\mathscr{R}_H$ est une relation d'équivalence.

Théorème de Lagrange

Proposition - Relation d'équivalence modulo un sous-groupe

Soit $(G,*)$ un groupe et $H < G$, un sous-groupe de G.
On note $\mathscr{R}_H$, la relation définie sur G par :

$$a \mathscr{R}_H a' \longleftrightarrow a^{-1} * a' \in H$$

Alors $\mathscr{R}_H$ est une relation d'équivalence.

Démonstration

Théorème de Lagrange

Proposition - Relation d'équivalence modulo un sous-groupe

Soit $(G,*)$ un groupe et $H < G$, un sous-groupe de G.
On note $\mathscr{R}_H$, la relation définie sur G par :

$$a \mathscr{R}_H a' \longleftrightarrow a^{-1} * a' \in H$$

Alors $\mathscr{R}_H$ est une relation d'équivalence.

Démonstration

Remarque Lien : relation d'équivalence et sous-groupe

Décomposition

Quand on a une relation d'équivalence, on a naturellement une décomposition en réunion disjointe

Décomposition

Quand on a une relation d'équivalence, on a naturellement une décomposition en réunion disjointe

Proposition - Décomposition de G

Soit H un sous-groupe de G.
On note $S := S_{\frac{G}{\mathscr{R}_H}}$ un système de représentant des classes d'équivalences de $\mathscr{R}_H$.
Alors $G = \uplus_{a \in S} \overline{a}$, la réunion disjointes des classes de a.
$\overline{a}$ n'est pas un groupe, mais il est en bijection avec H.
Par la suite, on notera aH, cet ensemble. On a donc
$aH = a'H \Leftrightarrow a\mathscr{R}_H a' \Leftrightarrow a^{-1}a' \in H$
Le produit cartésien $H \times S$ et le groupe G sont en bijection (c'est la décomposition).

Décomposition

Quand on a une relation d'équivalence, on a naturellement une décomposition en réunion disjointe

Proposition - Décomposition de G

Soit H un sous-groupe de G.
On note $S := S_{\frac{G}{\mathscr{R}_H}}$ un système de représentant des classes d'équivalences de $\mathscr{R}_H$.
Alors $G = \uplus_{a \in S} \overline{a}$, la réunion disjointes des classes de a.
$\overline{a}$ n'est pas un groupe, mais il est en bijection avec H.
Par la suite, on notera aH, cet ensemble. On a donc
$aH = a'H \Leftrightarrow a \mathscr{R}_H a' \Leftrightarrow a^{-1}a' \in H$
Le produit cartésien $H \times S$ et le groupe G sont en bijection (c'est la décomposition).

Démonstration

Décomposition

Quand on a une relation d'équivalence, on a naturellement une décomposition en réunion disjointe

Proposition - Décomposition de G

Soit H un sous-groupe de G.
On note $S := S_{\frac{G}{\mathscr{R}_H}}$ un système de représentant des classes d'équivalences de $\mathscr{R}_H$.
Alors $G = \uplus_{a \in S} \overline{a}$, la réunion disjointes des classes de a.
$\overline{a}$ n'est pas un groupe, mais il est en bijection avec H.
Par la suite, on notera aH, cet ensemble. On a donc
$aH = a'H \Leftrightarrow a\mathscr{R}_H a' \Leftrightarrow a^{-1}a' \in H$
Le produit cartésien $H \times S$ et le groupe G sont en bijection (c'est la décomposition).

Démonstration

En fait, les $\overline{a}$ sont comme des sous-groupes affines de G...

Théorème de Lagrange

Proposition - Théorème de LAGRANGE

Si H un sous-groupe de G, groupe de cardinal fini, alors $\mathrm{card} H | \mathrm{card} G$.

Théorème de Lagrange

Proposition - Théorème de Lagrange

Si H un sous-groupe de G, groupe de cardinal fini, alors $\mathrm{card} H | \mathrm{card} G$.

Démonstration

Sous-groupe distingué

Analyse S comme un groupe ?

Sous-groupe distingué

Analyse S comme un groupe ?

Définition - Sous-groupe distingué

On dit que $H < G$ est un sous-groupe distingué (ou normal) de G si

$$\forall\ a \in G, \forall\ x \in H, \quad a^{-1}xa \in H$$

On peut retenir que pour tout $a \in G$, $aH = Ha$.
On note alors $H \lhd G$

Sous-groupe distingué

Analyse S comme un groupe ?

Définition - Sous-groupe distingué

On dit que $H < G$ est un sous-groupe distingué (ou normal) de G si

$$\forall\ a \in G, \forall\ x \in H, \qquad a^{-1}xa \in H$$

On peut retenir que pour tout $a \in G$, $aH = Ha$.
On note alors $H \lhd G$

Démonstration

Groupe quotient

Proposition - Groupe quotient

Soit $(G, *)$ un groupe.

Si $H \lhd G$ est un sous-groupe distingué de G, alors $S = \dfrac{G}{\mathscr{R}_H}$, souvent noté $\dfrac{G}{H}$ est un groupe pour la loi $\overline{*}$ définie par $aH \overline{*} bH = (a * b)H$.

Groupe quotient

Proposition - Groupe quotient

Soit $(G, *)$ un groupe.

Si $H \lhd G$ est un sous-groupe distingué de G, alors $S = \dfrac{G}{\mathscr{R}_H}$, souvent noté $\dfrac{G}{H}$ est un groupe pour la loi $\overline{*}$ définie par $aH \overline{*} bH = (a * b)H$.

<u>Exercice</u>

A démontrer ! (Attention, ce n'est pas un sous-groupe. Il faut donc tout redémontrer à commencer par la bonne définition de la loi...)

Groupe quotient

Proposition - Groupe quotient

Soit $(G, *)$ un groupe.

Si $H \lhd G$ est un sous-groupe distingué de G, alors $S = \dfrac{G}{\mathscr{R}_H}$, souvent noté $\dfrac{G}{H}$ est un groupe pour la loi $\overline{*}$ définie par $aH \overline{*} bH = (a * b)H$.

<u>Exercice</u>

A démontrer ! (Attention, ce n'est pas un sous-groupe. Il faut donc tout redémontrer à commencer par la bonne définition de la loi...)

Exemple Groupe trivial

Groupe quotient

Proposition - Groupe quotient

Soit $(G, *)$ un groupe.

Si $H \lhd G$ est un sous-groupe distingué de G, alors $S = \dfrac{G}{\mathscr{R}_H}$, souvent noté $\dfrac{G}{H}$ est un groupe pour la loi $\overline{*}$ définie par $aH \overline{*} bH = (a * b)H$.

<u>Exercice</u>

A démontrer ! (Attention, ce n'est pas un sous-groupe. Il faut donc tout redémontrer à commencer par la bonne définition de la loi...)

Exemple Groupe trivial

Exemple G abélien

Groupe simple

Définition - Groupe simple

On dit qu'un groupe est simple lorsqu'il ne possède pas de sous-groupe distingué autre que $\{e\}$ et lui-même

Cela ne vous rappelle pas une autre définition ?

Groupe simple

Définition - Groupe simple

On dit qu'un groupe est simple lorsqu'il ne possède pas de sous-groupe distingué autre que $\{e\}$ et lui-même

Cela ne vous rappelle pas une autre définition ?

<u>Exercice</u>

Soit G un groupe de cardinal p, premier.

Montrer que G est simple

Morphisme

Soient $(G,\star)$ et $(G',\top)$ deux groupes.

Définition - Morphisme de groupes

Une application f de G dans G' vérifiant :

$$\forall (x,y)\in G^2, f(x\star y)=f(x)\top f(y).$$

est appelé morphisme (de groupes) de $(G,\star)$ sur $(G',\top)$.

Morphisme

Soient $(G, \star)$ et $(G', \top)$ deux groupes.

Définition - Morphisme de groupes

Une application f de G dans G' vérifiant :

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x \star y) = f(x) \top f(y).$$

est appelé morphisme (de groupes) de $(G, \star)$ sur $(G', \top)$.

Proposition - Conservation du noyau

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Alors $f(e_G) = e_{G'}$.

Morphisme

Soient $(G, \star)$ et $(G', \top)$ deux groupes.

Définition - Morphisme de groupes

Une application f de G dans G' vérifiant :

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x \star y) = f(x) \top f(y).$$

est appelé morphisme (de groupes) de $(G, \star)$ sur $(G', \top)$.

Proposition - Conservation du noyau

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Alors $f(e_G) = e_{G'}$.

Démonstration

Cas de l'inverse

Proposition - Image de l'inverse

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.
Alors pour tout $x \in G$, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

Cas de l'inverse

Proposition - Image de l'inverse

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.
Alors pour tout $x \in G$, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

Démonstration

Cas de l'inverse

Proposition - Image de l'inverse

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.
Alors pour tout $x \in G$, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

Démonstration

Exemple $\exp$

⇒ Decomposer les groupes

Sous-groupe image et sous-groupe réciproque

Proposition - Sous-groupe

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.
Soit A un sous-groupe de G, alors $f(A)$ est un sous-groupe de G'.
Soit B un sous-groupe de G', alors $f^{-1}(B)$ est un sous-groupe de G.
En particulier :

- $\mathrm{Im}\, f = f(G) = \{f(x), x \in G\}$ est un sous-groupe de G', appelé image de G
- $\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(e_{G'}) = \{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\}$ est un sous-groupe de G, appelé noyau de f.

Sous-groupe image et sous-groupe réciproque

Proposition - Sous-groupe

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.
Soit A un sous-groupe de G, alors $f(A)$ est un sous-groupe de G'.
Soit B un sous-groupe de G', alors $f^{-1}(B)$ est un sous-groupe de G.
En particulier :

- $\mathrm{Im}\, f = f(G) = \{f(x), x \in G\}$ est un sous-groupe de G', appelé image de G
- $\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(e_{G'}) = \{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\}$ est un sous-groupe de G, appelé noyau de f.

Exemple $\mathbb{Z} \to \mathbb{U}_n$

Sous-groupe image et sous-groupe réciproque

Proposition - Sous-groupe

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.
Soit A un sous-groupe de G, alors $f(A)$ est un sous-groupe de G'.
Soit B un sous-groupe de G', alors $f^{-1}(B)$ est un sous-groupe de G.
En particulier :

- $\mathrm{Im}\, f = f(G) = \{f(x), x \in G\}$ est un sous-groupe de G', appelé image de G
- $\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(e_{G'}) = \{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\}$ est un sous-groupe de G, appelé noyau de f.

Exemple $\mathbb{Z} \to \mathbb{U}_n$
Démonstration

Noyau distingué

<u>Exercice</u>

Montrer que $f : G \to G'$ morphisme de groupes est :

- surjective ssi $\mathrm{Im}\ f = G'$
- injective ssi $\mathrm{Ker}\ f = \{e_G\}$

Noyau distingué

Exercice

Montrer que $f : G \to G'$ morphisme de groupes est :

- surjective ssi $\mathrm{Im}\ f = G'$
- injective ssi $\mathrm{Ker}\ f = \{e_G\}$

Exemple $\mathrm{Ker}\ f$ est un sous-groupe distingué

Si $\operatorname{Ker} f$ est distingué...

Théorème - Premier théorème

Soient G et G' deux groupes et $f : G \to G'$, un morphisme de groupes.

Alors f induit un isomorphisme de groupes : $\hat{f} : \dfrac{G}{\operatorname{Ker} f} \to \Im f$ (bijectif).

Si $\mathrm{Ker}\ f$ est distingué...

Théorème - Premier théorème

Soient G et G' deux groupes et $f : G \to G'$, un morphisme de groupes.

Alors f induit un isomorphisme de groupes : $\hat{f} : \dfrac{G}{\mathrm{Ker}\ f} \to \Im f$ (bijectif).

Démonstration

Si $\operatorname{Ker} f$ est distingué...

Théorème - Premier théorème

Soient G et G' deux groupes et $f : G \to G'$, un morphisme de groupes.

Alors f induit un isomorphisme de groupes : $\hat{f} : \dfrac{G}{\operatorname{Ker} f} \to \Im f$ (bijectif).

Démonstration

Remarque Notation symbolique ou formelle

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Decomposer les groupes

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Decomposer les groupes

- Qu'est-ce qu'un sous-groupe ? Un groupe engendré ?

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Decomposer les groupes

- Qu'est-ce qu'un sous-groupe ? Un groupe engendré ?
- Décomposition (démontage) d'un groupe avec des groupes distingués.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Decomposer les groupes

- Qu'est-ce qu'un sous-groupe ? Un groupe engendré ?
- Décomposition (démontage) d'un groupe avec des groupes distingués.
- Morphisme de groupes et propriétés immédiates

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Decomposer les groupes

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 15 - Divisibilité et congruence sur $\mathbb{Z}$
- Exercices N° 272, 275 & 277