

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures d'anneau

- 2.1. Définitions et propriétés premières
- 2.2. Construction d'anneaux
- 2.3. Idéaux
- 2.4. Anneau euclidien. Anneau principal

3. Structures de corps

- 3.1. Corps
- 3.2. Idéaux maximaux. Idéaux premiers
- 3.3. Sous-corps. Morphisme (de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures d'anneau

2.1. Définitions et propriétés premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau principal

3. Structures de corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme (de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

Proposition - Anneau principal

Soit A un anneau.

On dit qu'un idéal I de A est principal si il existe $a \in I$ tel que $I = (a)$.

On dit qu'un anneau est principal s'il est intègre (commutatif) et tous ses idéaux sont principaux.

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

Proposition - Anneau principal

Soit A un anneau.

On dit qu'un idéal I de A est principal si il existe $a \in I$ tel que $I = (a)$.

On dit qu'un anneau est principal s'il est intègre (commutatif) et tous ses idéaux sont principaux.

Exemple \mathbb{Z} est principal

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Anneau principal

Proposition - Anneau principal

Soit A un anneau.

On dit qu'un idéal I de A est principal si il existe $a \in I$ tel que $I = (a)$.

On dit qu'un anneau est principal s'il est intègre (commutatif) et tous ses idéaux sont principaux.

Exemple \mathbb{Z} est principal

Savoir-faire. Montrer qu'un anneau est principal

Une méthode qui ne marche pas toujours est de montrer qu'un tel anneau est d'abord euclidien

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Anneau euclidien

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

Définition - Anneau euclidien

Soit A un anneau. On dit que A est euclidien s'il existe une application $\varphi : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ (appelé **stathme** euclidien) telle que :

$$\forall (a, b) \in A \times A \setminus \{0\}, \exists (q, r) \in A^2 \text{ tel que } a = bq + r \\ \text{avec } r = 0 \text{ ou } \varphi(r) < \varphi(b)$$

Notons que l'unicité n'est pas demandé.

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Anneau euclidien

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

Définition - Anneau euclidien

Soit A un anneau. On dit que A est euclidien s'il existe une application $\varphi : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ (appelé **stathme** euclidien) telle que :

$$\forall (a, b) \in A \times A \setminus \{0\}, \exists (q, r) \in A^2 \text{ tel que } a = bq + r$$

avec $r = 0$ ou $\varphi(r) < \varphi(b)$

Notons que l'unicité n'est pas demandé.

Proposition - Anneau euclidien \Rightarrow Anneau principal

Si A est euclidien, alors A est principal

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Anneau euclidien

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

Définition - Anneau euclidien

Soit A un anneau. On dit que A est euclidien s'il existe une application $\varphi : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ (appelé **stathme** euclidien) telle que :

$$\forall (a, b) \in A \times A \setminus \{0\}, \exists (q, r) \in A^2 \text{ tel que } a = bq + r$$

avec $r = 0$ ou $\varphi(r) < \varphi(b)$

Notons que l'unicité n'est pas demandé.

Proposition - Anneau euclidien \Rightarrow Anneau principal

Si A est euclidien, alors A est principal

Démonstration

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

Exemples Nombreux

Exercice On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib; a, b \in \mathbb{Z}\}$, l'ensemble des entiers de Gauss.

1. Trouver une division euclidienne sur $\mathbb{Z}[i]$

On prendra, le carré de la fonction module comme stathme

2. En déduire que $\mathbb{Z}[i]$ est principal

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures d'anneau

2.1. Définitions et propriétés premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau principal

3. Structures de corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme (de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Définition

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

Définition - Corps

Un corps est un anneau commutatif $(K, +, \times)$ dans lequel tous les éléments autres que 0 sont inversibles pour \times c'est-à-dire que : $(K, +, \times)$ est un corps si :

- ▶ $(K, +)$ est un groupe commutatif ;
- ▶ (K^*, \times) est un groupe commutatif, où 0 désigne l'élément neutre de K pour $+$ et $K^* = K \setminus \{0\}$.
- ▶ la loi \times est distributive par rapport à la loi $+$;

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Exemples. Régularité

Exemples Nombreux

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premières

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Exemples. Régularité

Exemples Nombreux

Tout élément est régulier

Un corps n'a pas de diviseurs de 0. Tout élément autre que 0 est donc régulier (on peut simplifier).

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premières

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Exemples. Régularité

Exemples Nombreux

Tout élément est régulier

Un corps n'a pas de diviseurs de 0. Tout élément autre que 0 est donc régulier (on peut simplifier).

Démonstration

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premières3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures d'anneau

2.1. Définitions et propriétés premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau principal

3. Structures de corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme (de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Anneau quotient comme un corps ?

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

Analyse A quel condition un anneau quotient est-il un corps ?

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Anneau quotient comme un corps ?

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

Analyse A quel condition un anneau quotient est-il un corps ?

Définition - Idéal maximal

Soit I un idéal de A .

On dit que I est maximal s'il $I \neq A$ et A est le seul idéal distinct de I , contenant I

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Ideaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Ideaux maximaux. Ideaux
premiers3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

Proposition - Corps

Soit I un idéal maximal de A . Alors $\left(\frac{A}{I}, \overline{+}, \overline{\times}\right)$ est un corps.

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

Proposition - Corps

Soit I un idéal maximal de A . Alors $\left(\frac{A}{I}, \overline{+}, \overline{\times}\right)$ est un corps.

Remarque Réciproque

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

Proposition - Corps

Soit I un idéal maximal de A . Alors $\left(\frac{A}{I}, \overline{+}, \overline{\times}\right)$ est un corps.

Remarque Réciproque

Exemple $6\mathbb{Z}$ n'est pas maximal

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

Proposition - Corps

Soit I un idéal maximal de A . Alors $\left(\frac{A}{I}, \overline{+}, \overline{\times}\right)$ est un corps.

Remarque Réciproque

Exemple $6\mathbb{Z}$ n'est pas maximal

Démonstration

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

$$\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$$

Exemple $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ avec p premier.

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premières

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures d'anneau

2.1. Définitions et propriétés premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau principal

3. Structures de corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme (de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

Définition - Sous-corps, morphisme

On peut généraliser les définitions précédentes.

- ▶ Un sous-corps est un sous-anneau muni d'une structure de corps.
- ▶ Un morphisme de corps est un morphisme d'anneaux.
- ▶ L'image d'un corps par un morphisme de corps est un corps.

Le dernier point est un exercice à démontrer.

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premières

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Conclusion

Objectifs

⇒ Idéaux et anneau quotient

⇒ Corps

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Conclusion

Objectifs

⇒ Idéaux et anneau quotient

- ▶ Idéaux : groupe pour $+$, hemi-stabilité pour \times

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Conclusion

Objectifs

⇒ Idéaux et anneau quotient

- ▶ Idéaux : groupe pour $+$, hemi-stabilité pour \times
- ▶ Si I est un idéal, $\frac{A}{I}$ est un anneau (pour les lois induites)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Conclusion

Objectifs

⇒ Idéaux et anneau quotient

- ▶ Idéaux : groupe pour $+$, hemi-stabilité pour \times
- ▶ Si I est un idéal, $\frac{A}{I}$ est un anneau (pour les lois induites)
- ▶ Les anneaux (α) (principaux) sont essentiels.
Donc nécessité d'anneaux principaux (où tous les idéaux sont principaux)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Conclusion

Objectifs

⇒ Idéaux et anneau quotient

- ▶ Idéaux : groupe pour $+$, hemi-stabilité pour \times
- ▶ Si I est un idéal, $\frac{A}{I}$ est un anneau (pour les lois induites)
- ▶ Les anneaux (α) (principaux) sont essentiels.
Donc nécessité d'anneaux principaux (où tous les idéaux sont principaux)
- ▶ Une condition suffisante : l'anneau est euclidien.

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Conclusion

Objectifs

⇒ Idéaux et anneau quotient

⇒ Corps

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Conclusion

Objectifs

⇒ Idéaux et anneau quotient

⇒ Corps

- ▶ Tous les éléments non nuls sont inversibles

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Objectifs

⇒ Idéaux et anneau quotient

⇒ Corps

- ▶ Tous les éléments non nuls sont inversibles
- ▶ Sous-corps, morphisme de corps

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premières

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

Objectifs

⇒ Idéaux et anneau quotient

⇒ Corps

- ▶ Tous les éléments non nuls sont inversibles
- ▶ Sous-corps, morphisme de corps
- ▶ $\frac{A}{I}$ est un corps si I est maximal ou premier.

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premières

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)

⇒ Anneau quotient

⇒ Corps

Objectifs

⇒ Idéaux et anneau quotient

⇒ Corps

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 23 : Structure algébrique de l'ensemble des polynômes
- ▶ Exercice n° 333, 336

1. Problèmes

2. Structures
d'anneau

2.1. Définitions et propriétés
premières

2.2. Construction d'anneaux

2.3. Idéaux

2.4. Anneau euclidien. Anneau
principal

3. Structures de
corps

3.1. Corps

3.2. Idéaux maximaux. Idéaux
premiers

3.3. Sous-corps. Morphisme
(de corps)