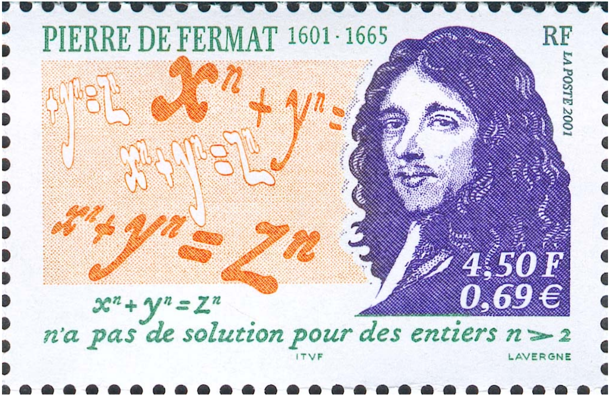

Leçon 49 - Calcul matriciel

8 janvier 2025

⇒ Produit par blocs

⇒ L'ensemble des matrices, vu comme un espace vectoriel

⇒ Produit de deux matrices bien calilbrées

⇒ Produit par blocs

⇒ L'ensemble des matrices, vu comme un espace vectoriel

⇒ Produit de deux matrices bien calilbrées

Définition

Définition - Produit de deux matrices

Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est une matrice de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par

$$C = AB = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$$

où

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Savoir-faire : LA formule

Savoir-faire. Notation

On note $\mathrm{Coef}_{i,j}(A)$ ou ${}^{i}[A]_{j}$, le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice A. On a donc

$$\mathrm{Coef}_{i,j}(AB) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Coef}_{i,k}(A) \times \mathrm{Coef}_{k,j}(B)$$

$${}^{i}[AB]_{j} = \sum_{k=1}^{p} {}^{i}[A]_{k}\,{}^{k}[B]_{j}$$

comme si $\sum_k \dots]_k^k[\dots = \emptyset$.

Il faut savoir passer d'un sens vers un autre.

⇒ Produit par blocs

⇒ L'ensemble des matrices, vu comme un espace vectoriel

⇒ Produit de deux matrices bien calilbrées

Associativité

Proposition - Associativité du produit

Le produit de matrices est associatif.
Plus précisément si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{q,m}(\mathbb{K})$ alors on a

$$(AB)C = A(BC)$$

qui est une matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Associativité

Proposition - Associativité du produit

Le produit de matrices est associatif.
Plus précisément si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{q,m}(\mathbb{K})$ alors on a

$$(AB)C = A(BC)$$

qui est une matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Démonstration

Associativité

Proposition - Associativité du produit

Le produit de matrices est associatif.
Plus précisément si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{K})$ alors on a

$$(AB)C = A(BC)$$

qui est une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Démonstration

Remarque En terme de $\mathrm{Coef}_{i,j}$

Bilinéarité

Proposition - Bilinéarité

Si A et B sont des matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et C, D de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ alors

$$A(\lambda C + \mu D) = \lambda AC + \mu AD \quad \text{et} \quad (\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$$

En résumé l'application $(A, C) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \mapsto AC \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ est bilinéaire.
Cela se résume en

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

Bilinéarité

Proposition - Bilinéarité

Si A et B sont des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et C, D de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ alors

$$A(\lambda C + \mu D) = \lambda AC + \mu AD \qquad \text{et} \qquad (\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$$

En résumé l'application $(A, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \mapsto AC \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ est bilinéaire. Cela se résume en

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$$

Démonstration

Produit canonique

Propostion - Cas à connaître !

$(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ i.e. ${}^{a}[E_{i,j}]_b = \delta_{a,i}\delta_{b,j}$

et $(F_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ celle de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Alors $E_{i,j}\times F_{k,\ell} = \delta_{k,j}G_{i,\ell}$, avec $(G_{s,t})_{\substack{1\leqslant s\leqslant n\\1\leqslant r\leqslant q}}$ base canonique de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

Produit canonique

Propostion - Cas à connaître !

$(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ i.e. ${}^{a}[E_{i,j}]_b = \delta_{a,i}\delta_{b,j}$

et $(F_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ celle de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Alors $E_{i,j} \times F_{k,\ell} = \delta_{k,j} G_{i,\ell}$, avec $(G_{s,t})_{\substack{1\leqslant s\leqslant n\\1\leqslant r\leqslant q}}$ base canonique de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

Démonstration

Produit canonique

Propostion - Cas à connaître !

$(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ i.e.
${}^a[E_{i,j}]_b = \delta_{a,i}\delta_{b,j}$
et $(F_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ celle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Alors $E_{i,j} \times F_{k,\ell} = \delta_{k,j} G_{i,\ell}$, avec $(G_{s,t})_{\substack{1\leqslant s\leqslant n\\ 1\leqslant r\leqslant q}}$ base canonique de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

Démonstration

Exercice

Comment écrire la matrice $AE_{i,j}$ à partir de la matrice A ?
De même pour $E_{i,j}A$?

Multiplication et transposition

Proposition - Transposition d'un produit

Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a

$$^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA \quad \text{ou} \quad (A \times B)^T = B^T \times A^T$$

Multiplication et transposition

Proposition - Transposition d'un produit

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a

$$^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA \quad \text{ou} \quad (A \times B)^T = B^T \times A^T$$

Attention. Eviter d'écrire des bêtises

Notons bien que ${}^tB \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
Donc le produit ${}^tA \times {}^tB$ n'aurait aucun sens (aucune raison que $n = q$.)

Multiplication et transposition

Proposition - Transposition d'un produit

Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a

$$^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA \quad \text{ou} \quad (A \times B)^T = B^T \times A^T$$

Attention. Eviter d'écrire des bêtises

Notons bien que ${}^tB \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et ${}^tA \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
Donc le produit ${}^tA \times {}^tB$ n'aurait aucun sens (aucune raison que $n = q$.)

Démonstration

⇒ Produit par blocs

⇒ L'ensemble des matrices, vu comme un espace vectoriel

⇒ Produit de deux matrices bien calilbrées

1. Problèmes
2. Espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
3. Multiplication matricielle
   - 3.1. Définition
   - 3.2. Interprétation en terme de systèmes linéaires
   - 3.3. Propriété du produit
   - **3.4. Produit par blocs**
4. Les matrices carrées
   - 4.1. L'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$
   - 4.2. Puissance de matrices
   - 4.3. Inversibilité d'une matrice
   - 4.4. Quelques sous-ensembles remarquables
   - 4.5. Trace d'une matrice carrée

Proposition

Proposition - Produit par blocs

Soient deux matrices $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $M' \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Considérons des entiers $k \leqslant n$, $\ell \leqslant p$, $m \leqslant q$ et des matrices $A \in \mathscr{M}_{k,\ell}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{k,p-\ell}(\mathbb{K}), C \in \mathscr{M}_{n-k,\ell}(\mathbb{K}), D \in \mathscr{M}_{n-k,p-\ell}(\mathbb{K}), A' \in \mathscr{M}_{\ell,m}(\mathbb{K}), B' \in \mathscr{M}_{\ell,q-m}(\mathbb{K}), C' \in \mathscr{M}_{p-\ell,m}(\mathbb{K}), D' \in \mathscr{M}_{p-\ell,q-m}(\mathbb{K})$ telles que M et N s'écrivent par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

Alors, on peut calculer le produit MM' par blocs de la manière suivante :

$$MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

Attention !

Attention. Bien faire attention aux dimensions

Il est nécessaire que les dimensions correspondent bien. Sinon, le calcul écrit n'aurait pas de sens

Attention !

Attention. Bien faire attention aux dimensions

Il est nécessaire que les dimensions correspondent bien.
Sinon, le calcul écrit n'aurait pas de sens

Démonstration

Réinterprétation

On peut avoir intérêt à considérer les matrices sous forme d'une association de colonnes ou de lignes.
On peut voir ces opérations, comme une forme de calculs parallèles, à la physicienne.

Réinterprétation

Proposition - Matrice et association de colonnes ou de lignes

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{pmatrix}$ association de n lignes, où $L_i(A) = L_i$

On note $B = (C_1|C_2|\dots|C_n)$ comme association de n colonnes, avec $C_j(B) = C_j$

On a alors $AB = (AC_1|AC_2|\dots|AC_n) = \begin{pmatrix} L_1B \\ \hline L_2B \\ \hline \vdots \\ \hline L_nB \end{pmatrix}$ et

${}^i[A \times B]_j = L_i \times C_j$.

Réinterprétation

Proposition - Matrice et association de colonnes ou de lignes

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{pmatrix}$ association de n lignes, où $L_i(A) = L_i$

On note $B = (C_1 | C_2 | \ldots | C_n)$ comme association de n colonnes, avec $C_j(B) = C_j$

On a alors $AB = (AC_1 | AC_2 | \ldots | AC_n) = \begin{pmatrix} L_1 B \\ \hline L_2 B \\ \hline \vdots \\ \hline L_n B \end{pmatrix}$ et

${}^i[A \times B]_j = L_i \times C_j$.

Exercice

Comment écrire la matrice $E_{i,j}A$ à partir de la matrice A et $AE_{i,j}$, en raisonnant par blocs ?

⇒ Produit par blocs

⇒ L'ensemble des matrices, vu comme un espace vectoriel

⇒ Produit de deux matrices bien calilbrées

S'intéresser aux matrices carrées

Heuristique. Pourquoi les matrices carrées ?

Si on multiplie deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on trouve un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la multiplication est donc interne dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On peut ainsi effectuer les calculs $A \times B$ et $B \times A$, mais aussi A^k pour tout entier k...
Nous verrons qu'ains $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.

$\mathbb{K}$-algèbre

Théorème - La $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$

$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif et non intègre dès que $n \geqslant 2$, d'élément unité I_n ;
(et donc $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2.)

$\mathbb{K}$-algèbre

Théorème - La $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$

$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif et non intègre dès que $n \geqslant 2$, d'élément unité I_n ;
(et donc $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2.)

Exemple Non commutativité et non intégrité

$\mathbb{K}$-algèbre

Théorème - La $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$

$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif et non intègre dès que $n \geqslant 2$, d'élément unité I_n ;
(et donc $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2.)

Exemple Non commutativité et non intégrité

Exemple L'inverse d'une matrice d'ordre 2

⇒ Produit par blocs

⇒ L'ensemble des matrices, vu comme un espace vectoriel

⇒ Produit de deux matrices bien calilbrées

Puissance

Définition - Puissance d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit par récurrence :

$$A^0 = I_n, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},\, A^{k+1} = A \times A^k$$

On a alors, par commutation :

$$A^k = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}} = A^m \times A^{k-m} \qquad (\text{pour tout } m \leqslant k)$$

Puissance

Définition - Puissance d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit par récurrence :

$$A^0 = I_n, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},\, A^{k+1} = A \times A^k$$

On a alors, par commutation :

$$A^k = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}} = A^m \times A^{k-m} \qquad (\text{pour tout } m \leqslant k)$$

Les règles de calcul dans un anneau s'appliquent d'où :

Proposition - Formules matricielles

Pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, si $AB = BA$ alors

$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ (Formule du binôme de Newton)

$$A^p - B^p = (A-B)(A^{p-1} + A^{p-2}B + \cdots + AB^{p-2} + B^{p-1})$$

$$I_n - A^p = (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1})$$

⇒ Produit par blocs

⇒ L'ensemble des matrices, vu comme un espace vectoriel

⇒ Produit de deux matrices bien calilbrées

Matrices inversibles

Définition - Inversibilité de A

On dit que A, matrice carré d'ordre n, est inversible, si elle admet un inverse pour la loi $\times$, c'est-à-dire s'il existe une matrice carrée d'ordre n B telle que

$$BA = AB = I_n$$

(où I_n est la matrice identité). B est alors notée A^{-1} et appelée inverse de A.

Matrices inversibles

Définition - Inversibilité de A

On dit que A, matrice carré d'ordre n, est inversible, si elle admet un inverse pour la loi $\times$, c'est-à-dire s'il existe une matrice carrée d'ordre n B telle que

$$BA = AB = I_n$$

(où I_n est la matrice identité). B est alors notée A^{-1} et appelée inverse de A.

Remarque Des matrices non inversibles

Matrices inversibles

Définition - Inversibilité de A

On dit que A, matrice carré d'ordre n, est inversible, si elle admet un inverse pour la loi $\times$, c'est-à-dire s'il existe une matrice carrée d'ordre n B telle que

$$BA = AB = I_n$$

(où I_n est la matrice identité). B est alors notée A^{-1} et appelée inverse de A.

Remarque Des matrices non inversibles

Exemple Matrice inversible, moins triviale

Matrices inversibles

Définition - Inversibilité de A

On dit que A, matrice carré d'ordre n, est inversible, si elle admet un inverse pour la loi $\times$, c'est-à-dire s'il existe une matrice carrée d'ordre n B telle que

$$BA = AB = I_n$$

(où I_n est la matrice identité). B est alors notée A^{-1} et appelée inverse de A.

Remarque Des matrices non inversibles
Exemple Matrice inversible, moins triviale
Remarque Rappels ($A^{\times}$)

Groupes des inversibles

Définition - Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$

L'ensemble $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ des inversibles de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe, non commutatif. On l'appelle le groupe linéaire.
On a donc pour $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Groupes des inversibles

Définition - Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$

L'ensemble $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ des inversibles de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe, non commutatif. On l'appelle le groupe linéaire.
On a donc pour $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Proposition - Inverse de la transposé

Si A est une matrice carrée inversible alors ${}^tA$ est aussi inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Groupes des inversibles

Définition - Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$

L'ensemble $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ des inversibles de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe, non commutatif. On l'appelle le groupe linéaire.
On a donc pour $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Proposition - Inverse de la transposé

Si A est une matrice carrée inversible alors ${}^tA$ est aussi inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration

Exercice

<u>Exercice</u>

Soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont des 1.

1. On suppose $n = 2$. Calculer J^2, J^3, J^k pour $k \in \mathbb{N}$.
2. Mêmes questions avec $n \geqslant 2$ quelconque. J est-elle inversible ?
3. Calculer A^p où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Polynôme annulateur

Savoir-faire. Exploiter un polynôme annulateur pour trouver M^{-1}

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ annule M, i.e. $P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k = 0$. Alors

- si $a_0 \neq 0$, on a alors
  $I_n = \frac{-1}{a_0}\left(\sum_{k=1}^{d} a_k M^k\right) = M \times \frac{-1}{a_0}\left(\sum_{k=1}^{d} a_k M^{k-1}\right)$.
  Et donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{-1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{d-1} a_{k+1} M^k\right)$
- si $a_0 = 0$, alors il faut faire un raisonnement par l'absurde : si M était inversible alors en multipliant par M^{-1}, on a
  $$M^{-1} \times P(M) = \sum_{k=1}^{d} a_k M^{k-1} = 0 \text{ et donc}$$
  $\sum_{k=0}^{d-1} a_{k+1} M^k = 0$.
  - ou bien cette somme n'est pas nulle, et M n'est pas inversible,
  - ou bien cette somme vaut bien 0 et donc on recommence...

Polynôme annulateur

Savoir-faire. Exploiter un polynôme annulateur pour trouver M^n

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ annule M, i.e.
$$P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k = 0.$$
Alors, on peut faire la division euclidienne de X^n par P :

il existe $Q_n, R_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que
$$X^n = Q_n(X) \times P(X) + R_n(X) \text{ avec } \deg(R_n) < \deg(P) = d.$$
On a alors, puisque $M^n = 0 + R_n(M)$ car $P(M) = 0$.

Cela permet de

- démontrer que $\{M^n, \in \mathbb{Z}\} \subset \text{vect}(I_n, M, M^2, \ldots M^{d-1})$ (résultat théorique classique)
- calculer explicitement M^n, si l'on sait faire explicitement cette division euclidienne. Pour faire celle-ci, il arrive souvent qu'on utilise les racines de P...

Applications

Application Inverse et puissance de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Applications

Application Inverse et puissance de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Exercice</u>

Soit $A = (a_{pq}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{pq} = \exp(\frac{2i\pi pq}{n})$ et $\overline{A} = (\overline{a_{pq}})$.

Calculer $A\overline{A}$ et en déduire que A est inversible.

Matrices diagonales

Proposition - Matrices scalaires

L'ensemble des matrices scalaires d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension 1, contenant I_n et stable par la multiplication (c'est un sous-anneau commutatif et aussi une sous-algèbre commutative de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$). (En fait il s'agit de $\mathrm{Vect} I_n$.)

Matrices diagonales

Proposition - Espace des matrices diagonales

L'ensemble des matrices diagonales d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n, contenant I_n et stable par la multiplication (c'est un sous-anneau commutatif et une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).
(En fait il s'agit de $\mathrm{Vect}\big((E_{i,i})_{i\in\mathbb{N}_n}\big)$)

Matrices diagonales

Proposition - Inverse de matrices diagonales

Si D est diagonale, $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, alors D est inversible si et seulement pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $d_i \neq 0$ et alors $D^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{d_1}, \ldots, \frac{1}{d_n})$.
Donc D^{-1} est elle-même une matrice diagonale.

Matrices diagonales

Proposition - Inverse de matrices diagonales

Si D est diagonale, $D = \mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$, alors D est inversible si et seulement pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $d_i \neq 0$ et alors

$$D^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{d_1},\dots,\frac{1}{d_n}).$$

Donc D^{-1} est elle-même une matrice diagonale.

Démonstration

Matrices symétriques et antisymétriques

Définition - Matrices symétriques et antisymétriques

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est dite **symétrique** si ${}^tA = A$, soit si pour tout (i,j), ${}^i[A]_j =^j [A]_i$;
on note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
A est dite **antisymétrique** si ${}^tA = -A$, soit si pour tout (i,j), ${}^i[A]_j = -{}^j[A]_i)$;
on note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ (ou $\mathscr{A}\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

En l'absence d'ambiguité, on peut noter $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$.

Diagonale de matrice antisymétrique

Proposition - Diagonale d'une matrice antisymétrique

Les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

Diagonale de matrice antisymétrique

Proposition - Diagonale d'une matrice antisymétrique

Les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

Diagonale de matrice antisymétrique

Proposition - Diagonale d'une matrice antisymétrique

Les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

Démonstration

Ensemble des matrices triangulaires (supérieures)

Théorème - Espace des matrices triangulaires

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, contenant I_n et stable par la multiplication (donc un sous-anneau et une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$).
En fait, il s'agit de $\mathrm{Vect}\big((E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\big)$

Ensemble des matrices triangulaires (supérieures)

Attention. Pas trop vite

L'ensemble des matrices triangulaires d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$, n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
L'addition d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure ne donne pas une matrice triangulaire, la plupart du temps

Ensemble des matrices triangulaires (supérieures)

Attention. Pas trop vite

L'ensemble des matrices triangulaires d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$, n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
L'addition d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure ne donne pas une matrice triangulaire, la plupart du temps

Remarque Mais notons
Une matrice à la fois triangulaire inférieure et supérieure est diagonale.

Ensemble des matrices triangulaires (supérieures)

Savoir-faire. Montrer qu'une matrice est triangulaire supérieure

Il faut montrer (condition nécessaire et suffisante) :

$$\forall\ i,j \in \mathbb{N}_n, \quad i > j \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Coef}_{i,j}(T) = 0$$

Ensemble des matrices triangulaires (supérieures)

Savoir-faire. Montrer qu'une matrice est triangulaire supérieure

Il faut montrer (condition nécessaire et suffisante) :

$$\forall\ i,j \in \mathbb{N}_n, \quad i > j \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Coef}_{i,j}(T) = 0$$

Démonstration

Ensemble des matrices triangulaires (supérieures)

Savoir-faire. Montrer qu'une matrice est triangulaire supérieure

Il faut montrer (condition nécessaire et suffisante) :

$$\forall\ i,j \in \mathbb{N}_n, \quad i > j \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Coef}_{i,j}(T) = 0$$

Démonstration

Exercice

Montrer que si T est triangulaire supérieure.
Alors T est inversible ssi $\forall\ i \in \mathbb{N}_n$, $\mathrm{Coef}_{i,i}(T) \neq 0$.
Et dans ce cas, T^{-1} est également triangulaire supérieure.

⇒ Produit par blocs

⇒ L'ensemble des matrices, vu comme un espace vectoriel

⇒ Produit de deux matrices bien calilbrées

Définition

Définition - Trace d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle trace de A le scalaire égal à la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Coef}_{i,i}(A)$$

Linéarité et commutation

Proposition - Propriété de la trace

L'application

$$\mathrm{Tr}: \quad \begin{aligned} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ A &\mapsto \mathrm{Tr}\, A \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{Tr}\, A + \mu \mathrm{Tr}\, B$ et

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Linéarité et commutation

Proposition - Propriété de la trace

L'application

$$\mathrm{Tr}: \quad \begin{array}{l} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ A \mapsto \mathrm{Tr}\,A \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{Tr}\,A + \mu \mathrm{Tr}\,B$ et

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Démonstration

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Produit par blocs

$\Rightarrow$ Matrice carrée. Puissance et polynôme.

$\Rightarrow$ Inversibilité d'une matrice (carrée)

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit par blocs

- On peut interpréter le produit de matrices de matrices.
  Tout se passe avec la même formule, à condition que les tailles correspondent !

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit par blocs

⇒ Matrice carrée. Puissance et polynôme.

⇒ Inversibilité d'une matrice (carrée)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Produit par blocs

$\Rightarrow$ Matrice carrée. Puissance et polynôme.

- Structures : $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau et $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ev.
  Mais $\times$ non commutative et non intégrité.

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit par blocs

⇒ Matrice carrée. Puissance et polynôme.

- Structures : $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau et $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ev.
  Mais $\times$ non commutative et non intégrité.
- On définit, par récurrence, A^k

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Produit par blocs

$\Rightarrow$ Matrice carrée. Puissance et polynôme.

- Structures : $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau et $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ev.
  Mais $\times$ non commutative et non intégrité.
- On définit, par récurrence, A^k
- On retrouve les propriétés des éléments des anneaux.
  En particulier, si $AB = BA$: le binôme de Newton et la factorisation de $A^n - B^n$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit par blocs

⇒ Matrice carrée. Puissance et polynôme.

- Structures : $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau et $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ev.
  Mais $\times$ non commutative et non intégrité.
- On définit, par récurrence, A^k
- On retrouve les propriétés des éléments des anneaux.
  En particulier, si $AB = BA$: le binôme de Newton et la factorisation de $A^n - B^n$.
- Matrices symétriques et matrices antisymétriques

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Produit par blocs

$\Rightarrow$ Matrice carrée. Puissance et polynôme.

- Structures : $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau et $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$ev.
  Mais $\times$ non commutative et non intégrité.
- On définit, par récurrence, A^k
- On retrouve les propriétés des éléments des anneaux.
  En particulier, si $AB = BA$: le binôme de Newton et la factorisation de $A^n - B^n$.
- Matrices symétriques et matrices antisymétriques
- Trace d'une matrice.

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit par blocs

⇒ Matrice carrée. Puissance et polynôme.

- Structures : $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau et $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ev.
  Mais $\times$ non commutative et non intégrité.
- On définit, par récurrence, A^k
- On retrouve les propriétés des éléments des anneaux.
  En particulier, si $AB = BA$: le binôme de Newton et la factorisation de $A^n - B^n$.
- Matrices symétriques et matrices antisymétriques
- Trace d'une matrice.
- Pour toute A et B : $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit par blocs

⇒ Matrice carrée. Puissance et polynôme.

⇒ Inversibilité d'une matrice (carrée)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Produit par blocs

$\Rightarrow$ Matrice carrée. Puissance et polynôme.

$\Rightarrow$ Inversibilité d'une matrice (carrée)

- Définition

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit par blocs

⇒ Matrice carrée. Puissance et polynôme.

⇒ Inversibilité d'une matrice (carrée)

- Définition
- Inverse d'un produit, d'une transposition

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit par blocs

⇒ Matrice carrée. Puissance et polynôme.

⇒ Inversibilité d'une matrice (carrée)

- Définition
- Inverse d'un produit, d'une transposition
- Utilisation d'un polynôme annulateur (et également pour calculer des puissances).

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit par blocs

⇒ Matrice carrée. Puissance et polynôme.

⇒ Inversibilité d'une matrice (carrée)

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit par blocs

⇒ Matrice carrée. Puissance et polynôme.

⇒ Inversibilité d'une matrice (carrée)

Pour le prochain cours

- Lecture du cours
    5. Opérations élémentaires sur les matrices
- Exercice n° 206 & 210