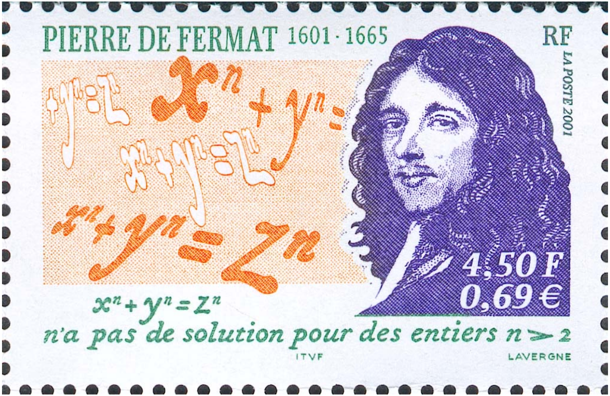

Leçon 52 : Dénombrement

16 janvier 2025

⇒ Exercices et élargissement

⇒ Exercices et élargissement

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

4. Exercices d'applications

4.1. Tableau des dénombrements classiques

4.2. Coefficient multinomial

4.3. Séries génératrices

⇒ Exercices et élargissement

Résumé

Savoir-faire. Questions à se poser

On considère un ensemble E de cardinal n. On effectue alors un tirage de p éléments (avec des hypothèses évoluantes)

	Ordre ?	Répétition ?	Nombre de cas	Ex. classique
Nombres de permutations (Arrangement **total**)	OUI	NON	$n!$	Nbre de bijections
Nbres de p-liste sans répétition (Arragenments simples)	OUI	NON	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	Nbre d'applications injectives
Nombres de p-liste (Arrangements avec répétition)	OUI	OUI	n^p	Nbre d'applications
Nombre de sous ensembles (Combinaisons simples)	NON	NON	$\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$	Pioche d'une poignée

Il faut savoir remplir ce tableau de **façon intuitive** (et non uniquement grâce à la mémoire).

Exercice d'application

<u>Exercice</u>

On considère une urne de 10 boules, 6 rouges et 4 bleues. Combien existe-t-il de façons différentes de tirer 4 boules dans l'urne dont au moins deux serait rouges.

1. si le tirage se fait simultanément ?
2. si le tirage se fait une à une et avec remise ?
3. si le tirage se fait une à une et sans remise ?

La méthode est toujours la même. A chaque fois on prendra un paramètre ou **un conditionnement** : on supposera que le nombre de boules bleues tirées vaut k avec k variant de 0 à 2.

Exercice d'application

<u>Exercice</u>

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Déterminer le nombre de couples $(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.

⇒ Exercices et élargissement

⇒ Exercices et élargissement

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

4. Exercices d'applications
4.1. Tableau des dénombrements classiques
4.2. Coefficient multinomial
4.3. Séries génératrices

Permutation avec répétitions

Analyse Anagramme de mots avec lettres dédoublées

Permutation avec répétitions

Analyse Anagramme de mots avec lettres dédoublées

Savoir-faire. Permutations avec répétition

Le nombre de permutations de n éléments avec k sous groupes tq :

- le premier sous groupe est composé de n_1 éléments identiques (ou indiscernables)
- le deuxième sous groupe est composé de n_2 éléments identiques (ou indiscernables)
- $\ldots$,
- le k^{e}sous groupe est composé de n_k éléments identiques (ou indiscernables)

vérifiant donc $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$,

est égal à : $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

Coefficient multinomial

Remarque Coefficient multinomial

Coefficient multinomial

Remarque Coefficient multinomial

Remarque Autre expression

Coefficient multinomial

Remarque Coefficient multinomial

Remarque Autre expression

Exemple A écrire

Les $\dfrac{5!}{2!1!2!} = 30$ permutations des 5 éléments a, a, b, c et c sont :

Exercices

Exercice

Combien existe-t-il d'anagramme du mot “abracadabra" ?

Exercices

Exercice

Combien existe-t-il d'anagramme du mot “abracadabra" ?

Exercice

Dans un anneau, avec a, b, c et d qui commutent, exprimer

$$(a+b+c+d)^{10}$$

⇒ Exercices et élargissement

Formule de Vandermonde

On commence par une première formule (importante) qui conduit vers une méthode plus générale.

Formule de Vandermonde

On commence par une première formule (importante) qui conduit vers une méthode plus générale.

Proposition - Formule de Vandermonde

Soient $n, m, p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant \min(n, m)$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p} \binom{n}{i}\binom{m}{p-i} = \binom{n+m}{p}$ (Formule de Vandermonde)

Formule de Vandermonde

On commence par une première formule (importante) qui conduit vers une méthode plus générale.

Proposition - Formule de Vandermonde

Soient $n, m, p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant \min(n, m)$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p} \binom{n}{i}\binom{m}{p-i} = \binom{n+m}{p}$ (Formule de Vandermonde)

Démonstration

Autre point de vue

Analyse Calcul de deux façons le développement de $(1+X)^{n+m}$.

Autre point de vue

Analyse Calcul de deux façons le développement de $(1+X)^{n+m}$.
Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et $p \leqslant \min(n, m)$.

1. Quel est le coefficient de x^p lorsque l'on développe $(1+x)^{n+m}$?
2. Quel est le coefficient de x^p lorsque l'on développe $(1+x)^n \times (1+x)^m$?
3. Retrouvez la formule de Vandermonde

Série génératrice. Heuristique

Heuristique. Fonction ou série génératrice

Voici une méthode qui fonctionne particulièrement bien en dénombrement.
On considère un problème de dénombrement, dont l'hypothèse dépend d'une variable entière n.
On note a_n, le dénombrement recherché et on crée la fonction :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Alors, la plupart des hypothèses se transpose en une propriété calculatoire de f.
Puis, on cherche alors la fonction f. Et enfin, il ne reste plus qu'à trouver ses coefficients (identification)

Série génératrice. Définition

On peut même, sans soucis de convergence, étudier des séries génératrices, sorte de polynôme de degré infini

Définition - Série génératrice

On considère $u = (u_n)$, une suite à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$.

On lui associe <u>la série génératrice</u> $S(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n X^n$.

On note $\mathbb{K}[[X]]$, l'ensemble des séries génératrices.

Série génératrice. Définition

On peut même, sans soucis de convergence, étudier des séries génératrices, sorte de polynôme de degré infini

Définition - Série génératrice

On considère $u = (u_n)$, une suite à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$.
On lui associe <u>la série génératrice</u> $S(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n X^n$.
On note $\mathbb{K}[[X]]$, l'ensemble des séries génératrices.

Remarque Inclusion algébrique

Série génératrice. Définition

On peut même, sans soucis de convergence, étudier des séries génératrices, sorte de polynôme de degré infini

Définition - Série génératrice

On considère $u = (u_n)$, une suite à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$.
On lui associe la série génératrice $S(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n X^n$.
On note $\mathbb{K}[[X]]$, l'ensemble des séries génératrices.

Remarque Inclusion algébrique
Exercice Série géométrique

Règles opératoires

On a les règles opératoires suivantes qui permettent de passer de propriétés sur (u_n) à des propriétés sur S.

Règles opératoires

Proposition - Règles opératoires sur les séries génératrices

On généralise les opérations sur les polynômes aux opérations équivalentes sur les séries.
On a alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

- $S(u+v) = S(u) + S(v)$
- $S(\lambda u) = \lambda S(u)$
- $X^k S(u) = S(\underbrace{0, 0, \ldots 0}_{k}, u)$ (règle de décalage)

  ou $S(u) = (u_0 - u_1 X - \ldots u_{k-1} X^{k-1}) + X^k S\big((u_{n+k}\big)$
- $S'(u) = S\big((n u_n)_{n \geqslant 1}\big) =$ (règle de dérivation)
- $S(u) \times S(v) = S\Big(\big(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\big)_{n \geqslant 0}\Big)$ (règle de produit de Cauchy)

Si $u_0 \neq 0$, on peut même définir l'inverse de $S(u)\ldots$(comme pour des DL)

Identification

Heuristique - Comme pour les polynômes…

On a montrer comme pour les polynômes, en exploitant la dérivation formelle, qu'il y a une unique façon d'écrire une série formelle.

Identification

Heuristique - Comme pour les polynômes. . .

On a montrer comme pour les polynômes, en exploitant la dérivation formelle, qu'il y a une unique façon d'écrire une série formelle.

On peut identifier

Proposition - Identification

Si $S(u) = S(v)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$.

Application

Application Suite de Fibonacci

On considère la suite de Fibonacci vérifiant $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et $F_0 = F_1 = 1$.

On note $F(X) = S(F_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} F_n X^n$.

Application

<u>Exercice</u> Déterminer, avec les séries génératrices,
$\operatorname{card}\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3 \mid n_1 + n_2 + n_3 = 8\}$.
On pourra noter $u_k = \textit{card}\,\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3 \mid n_1 + n_2 + n_3 = k\}$,

Dérangement

Définition - Dérangement sur n

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérangement de l'ensemble $\mathbb{N}_n$, une permutation (bijection) de $\mathbb{N}_n$ sans points fixes.
On note D_n le nombre de dérangement de $\mathbb{N}_n$.

Dérangement

Définition - Dérangement sur n

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérangement de l'ensemble $\mathbb{N}_n$, une permutation (bijection) de $\mathbb{N}_n$ sans points fixes.
On note D_n le nombre de dérangement de $\mathbb{N}_n$.

Le but : trouver D_n !

Dérangement

Définition - Dérangement sur n

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérangement de l'ensemble $\mathbb{N}_n$, une permutation (bijection) de $\mathbb{N}_n$ sans points fixes.
On note D_n le nombre de dérangement de $\mathbb{N}_n$.

Le but : trouver D_n !

Proposition - Relation (inversée)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$ avec la convention que $D_0 = 1$.

Dérangement

Définition - Dérangement sur n

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérangement de l'ensemble $\mathbb{N}_n$, une permutation (bijection) de $\mathbb{N}_n$ sans points fixes.
On note D_n le nombre de dérangement de $\mathbb{N}_n$.

Le but : trouver D_n !

Proposition - Relation (inversée)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$ avec la convention que $D_0 = 1$.

Démonstration

Stratégie : inversion !

Cela ne répond pas à la question…

Stratégie : inversion !

Cela ne répond pas à la question. . .

Analyse Stratégie !

Stratégie : inversion !

Cela ne répond pas à la question...

Analyse Stratégie !

Exercice

Quelle est la limite du taux moyen de dérangement $\frac{D_n}{n!}$?

Stratégie : inversion !

Cela ne répond pas à la question...

Analyse Stratégie !

Exercice

Quelle est la limite du taux moyen de dérangement $\frac{D_n}{n!}$?

Exercice

En exploitant les séries génératrices montrer également que $D_n - nD_{n-1} = (-1)^n$

Application au p-partage

Définition - p-partage de n

On appelle p-partage de n, un p-uplet d'entier naturel $(n_1, n_2, \dots n_p)$ tel que $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$.
On note $E_p(n) = \text{card}\ \{(n_1, n_2, \dots n_p) \in \mathbb{N}^p \mid \sum_{i=1}^{p} n_i = n\}$.

Application au p-partage

Définition - p-partage de n

On appelle p-partage de n, un p-uplet d'entier naturel $(n_1, n_2, \dots n_p)$ tel que $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$.
On note $E_p(n) = \text{card}\ \{(n_1, n_2, \dots n_p) \in \mathbb{N}^p \mid \sum_{i=1}^{p} n_i = n\}$.

Exemple 3-partage de 5.

Application au p-partage

Définition - p-partage de n

On appelle p-partage de n, un p-uplet d'entier naturel $(n_1, n_2, \dots n_p)$ tel que $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$.
On note $E_p(n) = \text{card } \{(n_1, n_2, \dots n_p) \in \mathbb{N}^p \mid \sum_{i=1}^p n_i = n\}$.

Exemple 3-partage de 5.

Proposition - Dénombrement des p-partage de n

Le nombre de p partage de n est $E_p(n) = \binom{p+n-1}{n}$

Application au p-partage

Définition - p-partage de n

On appelle p-partage de n, un p-uplet d'entier naturel $(n_1, n_2, \dots n_p)$ tel que $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$.
On note $E_p(n) = \text{card } \{(n_1, n_2, \dots n_p) \in \mathbb{N}^p \mid \sum_{i=1}^{p} n_i = n\}$.

Exemple 3-partage de 5.

Proposition - Dénombrement des p-partage de n

Le nombre de p partage de n est $E_p(n) = \binom{p+n-1}{n}$

Exemple 3-partage de 5.

Application au p-partage

Définition - p-partage de n

On appelle p-partage de n, un p-uplet d'entier naturel $(n_1, n_2, \dots n_p)$ tel que $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$.
On note $E_p(n) = \text{card }\{(n_1, n_2, \dots n_p) \in \mathbb{N}^p \mid \sum_{i=1}^p n_i = n\}$.

Exemple 3-partage de 5.

Proposition - Dénombrement des p-partage de n

Le nombre de p partage de n est $E_p(n) = \binom{p+n-1}{n}$

Exemple 3-partage de 5.

Démonstration

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Exercices et élargissement

Conclusion

Objectifs

⇒ Exercices et élargissement

- Formule de Vandermonde (HP)

Conclusion

Objectifs

⇒ Exercices et élargissement

- Formule de Vandermonde (HP)
- Coefficient multinomial (HP)

Conclusion

Objectifs

⇒ Exercices et élargissement

- Formule de Vandermonde (HP)
- Coefficient multinomial (HP)
- Série génératrice (HP1)

Conclusion

Objectifs

⇒ Exercices et élargissement

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 32 : Groupes symétriques
- Exercice n°58 & 590