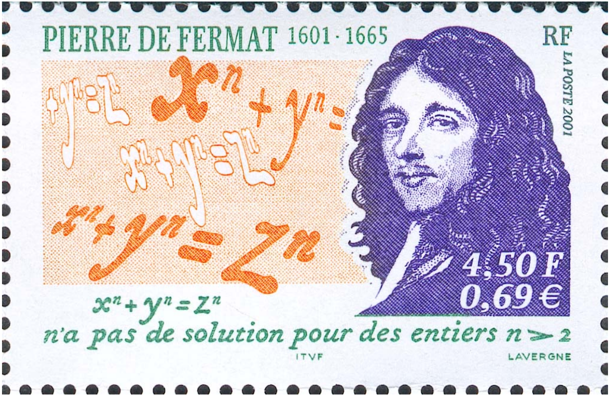

Leçon 50 : Dénombrement

14 janvier 2025

⇒ Qu'est-ce que c'est que le dénombrement ?

⇒ Premiers bons réflexes à mettre en place

1. Expérience, modélisation et ensembles
   1.1. Questionnement
   1.2. Expériences réelles et modélisation

2. Ensembles finis
   2.1. Cardinal d'un ensemble
   2.2. Dénombrement par applications (entre ensembles finis)
   2.3. Dénombrement par calcul du cardinal d'une réunion
   2.4. Dénombrement par calcul du cardinal d'un produit cartésien

⇒ Qu'est-ce que c'est que le dénombrement ?

⇒ Premiers bons réflexes à mettre en place

Premier contact

<u>Exercice</u>

1. Combien de mots de cinq lettres (compréhensibles ou non) existe-t-il en utilisant l'alphabet usuel ?

Premier contact

Exercice

1. Combien de mots de cinq lettres (compréhensibles ou non) existe-t-il en utilisant l'alphabet usuel ?
2. Xavier part en vacances aux États-Unis. Avant de rentrer, il décide d'écrire une carte à chacun de ses meilleurs amis : Arthur, Brigitte, Claude, Dominique et Emeric. Il se précipite chez le vendeurs de cartes postales, qui possèdent 26 modèles de cartes différents. Xavier se demande combien de possibilités il a pour envoyer des cartes postales à ses amis .

Questions

Analyse Pourquoi trouve-t-on le même résultat ?

Questions

Analyse Pourquoi trouve-t-on le même résultat ?

Existe-t-il un **représentant** de l'ensemble de tous ces problèmes identiques ?

Informations importantes

Analyse Quelles sont les informations importantes dans ces problèmes ?

Informations importantes

Analyse Quelles sont les informations importantes dans ces problèmes ?

1. Combien existe-t-il d'éléments dans l'ensemble des objets que l'on peut prendre ?
2. Combien d'objets doit-on retirer ?
3. Est-il possible de prendre ces éléments plusieurs fois ou non ?
4. Lorsque l'on décrit l'ensemble des solutions possibles, faut-il considérer que les solutions sont différentes si on permute les objets ?

Informations importantes

Analyse Quelles sont les informations importantes dans ces problèmes ?
Pouvez-vous faire quatre exercice où les réponses aux deux premières questions sont les mêmes (26 et 5 respectivement) et où celles aux deux secondes sont différentes ?

⇒ Qu'est-ce que c'est que le dénombrement ?
⇒ Premiers bons réflexes à mettre en place
1. Expérience, modélisation et ensembles
1.1. Questionnement
1.2. Expériences réelles et modélisation
2. Ensembles finis
2.1. Cardinal d'un ensemble
2.2. Dénombrement bijectif
2.3. Réunion
2.4. Produit cartésien

A partir d'exercices

Exercice **Boules tirées dans une urne**

On considère une urne avec 15 boules, numérotées de 1 à 15.

On en tire 3 avec remise, puis 5 sans remise et enfin une poignée de 4 boules.

Pouvez-vous décrire un exemple donné par une expérience ?

Quelle est la forme de la l'ensemble des résultats possibles ?

A partir d’exercices

Exercice **Boules tirées dans une urne**

On considère une urne avec 15 boules, numérotées de 1 à 15. On en tire 3 avec remise, puis 5 sans remise et enfin une poignée de 4 boules.

Pouvez-vous décrire un exemple donné par une expérience ?

Quelle est la forme de la l’ensemble des résultats possibles ?

Un exemple : on tire dans l’ordre $2, 4, 2$ puis $1, 3, 4, 7, 2$ puis l’ensemble $\{10, 14, 15, 5\}$.

A partir d'exercices

Exercice **Boules tirées dans une urne (bis)**

On considère une urne avec 15 boules, 5 vertes, 5 bleues et 5 rouges.

On en tire 3 avec remise, puis 5 sans remise et enfin une poignée de 4 boules.

Pouvez-vous décrire un exemple donné par une expérience ?

Quelle est la forme de la l'ensemble des résultats possibles ?

A partir d'exercices

Exercice

Nous lançons deux dés à 6 faces (un rouge, un bleu). Combien de lancers différents existe-il ? Combien de score différents peut-on réaliser en sommant les deux résultats ?

Savoir-faire

Savoir-faire. Méthode : description des expériences

But : **décrire les résultats possibles** d'une expérience.
C'est souvent une excellente idée de donner un exemple de description et de mesurer au moment de son écriture si nous avons à faire à une liste, un ensemble, des répétitions possibles, comment les paramètres se combinent les uns avec les autres...On note E, l'ensemble des résultats possibles ; la description de ces expériences permet de préciser la nature de l'ensemble E
Enfin, pour dénombrer l'ensemble des résultats possibles, il « suffit » de calculer le cardinal de E

⇒ Qu'est-ce que c'est que le dénombrement ?

⇒ Premiers bons réflexes à mettre en place

Heuristique

Heuristique. Principe du calcul du cardinal

La notion de cardinal d'un ensemble repose sur le fait suivant :

S'il existe une bijection de $[\![1, p]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$ alors $n = p$.

Dénombrer, c'est déterminer le cardinal d'un ensemble fini. L'ensemble $\mathbb{N}_n$ est le représentant principal de tous les ensembles en bijection avec lui (classe d'équivalence).

Ensemble fini

Définition - Ensemble fini ou infini

On dit qu'un ensemble non vide E est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit en bijection avec $[\![1,n]\!]$ (i.e. il existe $f : E \to [\![1,n]\!]$ bijective).

Par convention $\emptyset$ est un ensemble fini.

Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.

Cardinal d'un ensemble fini

Propositon - Taille des ensembles

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

- S'il existe une application injective $f : \mathbb{N}_p \to \mathbb{N}_n$, alors $p \leqslant n$.
  (Principe des tiroirs ou lemme de Dirichlet)
- S'il existe une application bijective $f : \mathbb{N}_p \to \mathbb{N}_n$, alors $n = p$.

Cardinal d'un ensemble fini

Propositon - Taille des ensembles

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

- S'il existe une application injective $f : \mathbb{N}_p \to \mathbb{N}_n$, alors $p \leqslant n$.
  (Principe des tiroirs ou lemme de Dirichlet)
- S'il existe une application bijective $f : \mathbb{N}_p \to \mathbb{N}_n$, alors $n = p$.

Démonstration

Cardinal d'un ensemble fini

Corollaire - Invariant

Soient E un ensemble et $n, p \in \mathbb{N}$.
S'il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}_n$ et une bijection de E sur $\mathbb{N}_p$ alors $n = p$.

Cardinal d'un ensemble fini

Définition - Cardinal

Si E est fini, l'élément n de $\mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec $[\![1,n]\!]$, s'appelle le cardinal de E, noté $\text{card}\, E$ (ou $|E|$, $\sharp(E)$).
On peut alors noter $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Par convention, $\text{card}\, \emptyset = 0$.

Cardinal d'un ensemble fini

Définition - Cardinal

Si E est fini, l'élément n de $\mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$, s'appelle le cardinal de E, noté $\text{card}\, E$ (ou $|E|$, $\sharp(E)$).
On peut alors noter $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Par convention, $\text{card}\, \emptyset = 0$.

Remarque Relation d'équivalence.

Cardinal d'un ensemble fini

Définition - Cardinal

Si E est fini, l'élément n de $\mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec $[\![1,n]\!]$, s'appelle le cardinal de E, noté $\operatorname{card} E$ (ou $|E|$, $\sharp(E)$).
On peut alors noter $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Par convention, $\operatorname{card} \emptyset = 0$.

Remarque Relation d'équivalence.

Propriété - Critère d'égalité des cardinaux

Si E et F sont deux ensembles finis et $f : E \to F$ une bijection, alors $\operatorname{card} E = \operatorname{card} F$.

Cardinal d'un ensemble fini

Définition - Cardinal

Si E est fini, l'élément n de $\mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$, s'appelle le cardinal de E, noté $\mathrm{card}\, E$ (ou $|E|$, $\sharp(E)$).
On peut alors noter $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Par convention, $\mathrm{card}\, \emptyset = 0$.

Remarque Relation d'équivalence.

Propriété - Critère d'égalité des cardinaux

Si E et F sont deux ensembles finis et $f : E \to F$ une bijection,
alors $\mathrm{card}\, E = \mathrm{card}\, F$.

Corollaire - Injection (principe des tiroirs)

Soit E un ensemble et $n \in \mathbb{N}$. S'il existe une injection de E sur $[\![1, n]\!]$,
alors E est de cardinal fini et $\mathrm{card}\, E \leqslant n$

Sous-ensembles

Propriété - Sous-ensemble. Critère d'égalité

Tout sous-ensemble A d'un ensemble fini E est fini. On a

$$\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} E \text{ avec égalité si et seulement si } A = E.$$

Sous-ensembles

Propriété - Sous-ensemble. Critère d'égalité

Tout sous-ensemble A d'un ensemble fini E est fini. On a

$$\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} E \text{ avec égalité si et seulement si } A = E.$$

Démonstration

Heuristique

Heuristique - Trois types de méthode pour le dénombrement

Ce théorème est fondamental, beaucoup de dénombrements sont basés dessus :

- **Méthode 1 - directe** :
  on montre que E en bijection avec un ensemble de cardinal connu.
- **Méthode 2 - addititve** :
  on écrit E comme une réunion disjointe (partition finie) d'ensembles de cardinaux connus.
- **Méthode 3 - multiplicative** :
  on écrit E comme un produit cartésien d'ensemble de cardinaux connus.

Il arrive aussi que les trois méthodes soient exploitées ensemble dans un même problème

Avec injectivité/surjectivité

Proposition - Relation entre cardinaux

Soient E, F des ensembles et f une application de E dans F.

- Si f est injective et F fini, alors E est fini
  $$\text{et card } E = \text{card }(f(E)) \leqslant \text{card } F.$$
  S'il y a égalité, f est bijective.
- Si f est surjective et E fini, alors F est fini
  $$\text{et card } F = \text{card }(f(E)) \leqslant \text{card } E.$$
  S'il y a égalité, f est bijective.

Avec injectivité/surjectivité

Proposition - Relation entre cardinaux

Soient E, F des ensembles et f une application de E dans F.

- Si f est injective et F fini, alors E est fini
  $$\text{et card } E = \text{card } (f(E)) \leqslant \text{card } F.$$
  S'il y a égalité, f est bijective.
- Si f est surjective et E fini, alors F est fini
  $$\text{et card } F = \text{card } (f(E)) \leqslant \text{card } E.$$
  S'il y a égalité, f est bijective.

Démonstration

Avec injectivité/surjectivité

Le théorème suivant est comparable à un théorème connu.

Théorème - Critère d'équivalence

Si E et F sont finis de **même cardinal** et $f : E \to F$,

$$f \text{ injective } \iff f \text{ surjective } \iff f \text{ bijective.}$$

Savoir-faire

Savoir-faire. Montrer qu'un ensemble est fini

Pour montrer qu'un ensemble E est fini, on peut

- soit montrer que $E \subset F$ avec F fini ;
- soit chercher une injection de E dans F fini. Si de plus on a une bijection et que l'on connait $\operatorname{card} F$, alors on a $\operatorname{card} E$.

Savoir-faire

Savoir-faire. Montrer qu'un ensemble est fini

Pour montrer qu'un ensemble E est fini, on peut

- soit montrer que $E \subset F$ avec F fini ;
- soit chercher une injection de E dans F fini. Si de plus on a une bijection et que l'on connait $\operatorname{card} F$, alors on a $\operatorname{card} E$.

Savoir-faire. Calculer, théoriquement, le cardinal d'un ensemble fini

La fonction caractéristique (indicatrice) est intéressante :

- elle donne le cardinal d'un ensemble $F \subset E$:
$$\operatorname{card} F = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_F(x)$$
- on a la relation $x \in F \Leftrightarrow \mathbb{1}_F(x) = 1$

Fonction caractéristique

Proposition - Cardinal du complémentaire

Soit A une partie de E fini. Alors

$$\mathbb{1}_{\complement_E(A)} = 1 - \mathbb{1}_A \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Card}\,(\complement_E A) = \mathrm{Card} E - \mathrm{Card} A$$

Fonction caractéristique

Proposition - Cardinal du complémentaire

Soit A une partie de E fini. Alors

$$\mathbb{1}_{\complement_E(A)} = 1 - \mathbb{1}_A \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Card}(\complement_E A) = \mathrm{Card} E - \mathrm{Card} A$$

Démonstration

Réunion

Théorème - Réunion d'ensembles

Soit E un ensemble (non nécessairement fini)

- Soient A, B deux sous-ensembles finis. Alors $A \cup B$ est fini et

  si $A \cap B = \emptyset$ alors $\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$

  sinon : $\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card } (A \cap B)$.
- Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties deux à deux disjointes de E alors

$$\text{card } (A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \text{card } \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{card } A_i$$

Réunion

Théorème - Réunion d'ensembles

Soit E un ensemble (non nécessairement fini)

- Soient A, B deux sous-ensembles finis. Alors $A \cup B$ est fini et
$$\text{si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } \mathrm{card}\,(A \cup B) = \mathrm{card}\,A + \mathrm{card}\,B$$
sinon : $\mathrm{card}\,(A \cup B) = \mathrm{card}\,A + \mathrm{card}\,B - \mathrm{card}\,(A \cap B)$.
- Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties deux à deux disjointes de E alors
$$\mathrm{card}\,(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{card}\,A_i$$

Savoir-faire. Formule du crible

Comme au programme ne figure pas la formule du crible de Poincaré (cas non disjoints des ensembles), il faut donc savoir se remettre toujours dans de telles conditions.
Donc si les (A_i) ne sont pas disjoints deux à deux, on décompose en sous-ensembles disjoints (Ou bien les fonctions caractéristiques)

Réunion

Théorème - Réunion d'ensembles

Soit E un ensemble (non nécessairement fini)

- Soient A, B deux sous-ensembles finis. Alors $A \cup B$ est fini et
$$\text{si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } \operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$$
sinon : $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)$.
- Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties deux à deux disjointes de E alors

$$\operatorname{card}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \operatorname{card} A_i$$

Démonstration

Réunion

Théorème - Réunion d'ensembles

Soit E un ensemble (non nécessairement fini)

- Soient A, B deux sous-ensembles finis. Alors $A \cup B$ est fini et

  si $A \cap B = \emptyset$ alors $\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$

  sinon : $\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card } (A \cap B)$.

- Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties deux à deux disjointes de E alors

$$\text{card } (A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \text{card } \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{card } A_i$$

Démonstration

Exercice

Montrer que $1 - \mathbb{1}_{A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n} = \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$.

En déduire la formule du crible de Poincaré.

Application : partition

Rappel :

Définition - Partition

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties non vides de E. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E si

1. $E = \bigcup_{i\in I} A_i$
2. $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

On note $E = \biguplus_{i\in I} A_i$.

Application : partition

Rappel :

Définition - Partition

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties non vides de E. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E si

1. $E = \bigcup_{i\in I} A_i$
2. $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

On note $E = \biguplus_{i\in I} A_i$.

Remarque Classes d'équivalence

Application : partition

Rappel :

Définition - Partition

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties non vides de E. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E si

1. $E = \bigcup_{i\in I} A_i$
2. $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

On note $E = \biguplus_{i\in I} A_i$.

Remarque Classes d'équivalence

Proposition - Dénombrement par partition

Si E est un ensemble fini et si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E. Alors $\text{card}\,(E) = \sum_{i\in I} \text{card}\,(A_i)$

⇒ Qu'est-ce que c'est que le dénombrement ?

⇒ Premiers bons réflexes à mettre en place

Remarque

Les résultats suivants sont démontrés comme des applications des résultats précédents. Mais il faut bien les voir comme de nouveaux résultats sur lesquels s'appuyer pour faire du dénombrement (de même la multiplication dérive de l'addition, mais lorsqu'on doit calculer 5×7, on ne fait plus $7 + 7 + 7 + 7 + 7 \ldots$).

Produit cartésien

Théorème - Cardinal de produit cartésien

Soient E, F deux ensembles finis avec $\text{card } E = n, \text{card } F = p$.

- Alors $E \times F$ est fini et $\text{card }(E \times F) = \text{card } E \times \text{card } F = np$
- Plus généralement si les E_i sont finis

$$\text{card }(E_1 \times \cdots \times E_n) = \text{card } E_1 \times \cdots \times \text{card } E_n.$$

Produit cartésien

Théorème - Cardinal de produit cartésien

Soient E,F deux ensembles finis avec $\mathrm{card}\ E = n, \mathrm{card}\ F = p$.

- Alors $E \times F$ est fini et $\mathrm{card}\ (E \times F) = \mathrm{card}\ E \times \mathrm{card}\ F = np$
- Plus généralement si les E_i sont finis

$$\mathrm{card}\ (E_1 \times \cdots \times E_n) = \mathrm{card}\ E_1 \times \cdots \times \mathrm{card}\ E_n.$$

Démonstration

Savoir-faire

Savoir-faire. Quand est-ce que l'on voit apparaître un produit cartésien ?

Dans les exercices, lorsque l'on peut dire on tire PUIS on tire (à nouveau) PUIS . . . on tire (une dernière fois), alors c'est que l'on est en train de créer une liste des résultats.
Cela correspond exactement à notre modèle.
Ainsi de manière générale, dès qu'il y a PUIS, on effectue une MULTIPLICATION.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que c'est que le dénombrement ?

$\Rightarrow$ Premiers bons réflexes à mettre en place

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que c'est que le dénombrement ?

- Il s'agit de compter le nombre de situations telles que. . .

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que c'est que le dénombrement ?

- Il s'agit de compter le nombre de situations telles que. . .
- On considère alors l'ensemble des situations possibles. Il s'agit alors de trouver son cardinal !

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que c'est que le dénombrement ?

- Il s'agit de compter le nombre de situations telles que...
- On considère alors l'ensemble des situations possibles. Il s'agit alors de trouver son cardinal !
- Quelques notions, questions semblent très importantes : ensemble ou liste, avec ou sans remise...

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que c'est que le dénombrement ?

- Il s'agit de compter le nombre de situations telles que. . .
- On considère alors l'ensemble des situations possibles. Il s'agit alors de trouver son cardinal !
- Quelques notions, questions semblent très importantes : ensemble ou liste, avec ou sans remise. . .
- Il faut faire des exercices

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que c'est que le dénombrement ?

⇒ Premiers bons réflexes à mettre en place

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que c'est que le dénombrement ?

$\Rightarrow$ Premiers bons réflexes à mettre en place

- La clé n°1 : Exploiter des bijections

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que c'est que le dénombrement ?

⇒ Premiers bons réflexes à mettre en place

- La clé n°1 : Exploiter des bijections
- La clé n°2 : Décomposer l'ensemble en réunion de sous-ensembles (disjoints ?)
  ADDITION

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que c'est que le dénombrement ?

⇒ Premiers bons réflexes à mettre en place

- La clé n°1 : Exploiter des bijections
- La clé n°2 : Décomposer l'ensemble en réunion de sous-ensembles (disjoints ?)
  ADDITION
  On peut exploiter à bon escient des partitions (donc classes d'équivalence. . .)

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que c'est que le dénombrement ?

⇒ Premiers bons réflexes à mettre en place

- La clé n°1 : Exploiter des bijections
- La clé n°2 : Décomposer l'ensemble en réunion de sous-ensembles (disjoints ?)

  ADDITION

  On peut exploiter à bon escient des partitions (donc classes d'équivalence. . .)
- La clé n°3 : Décomposer l'ensemble en un produit cartésien de sous-ensemble

  MULTIPLICATION

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que c'est que le dénombrement ?

⇒ Premiers bons réflexes à mettre en place

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 26 : Dénombrement
  3. Listes et combinaisons
- Exercice n° 573 & 576
- TD de jeudi :
  8h-10h : 569, 575, 571, 582, 594
  10h-12h : 574, 577,, 572, 583, 598