

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒ Nombre de sous-ensembles à cardinal fixé. Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Définitions des différents types d'ensemble

3.2. Dénombrement d'un ensemble de listes avec répétition

3.3. Dénombrement de permutation d'un ensemble E

3.4. Dénombrement d'un ensemble de p -listes sans répétition

3.5. Dénombrement d'un ensemble de sous-ensemble à p éléments (combinaison)

3.6. Propriétés du coefficient binomial (rappels)

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒ Nombre de sous-ensembles à cardinal fixé. Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Définitions des différents types d'ensemble

3.2. Dénombrement d'un ensemble de listes avec répétition

3.3. Dénombrement de permutation d'un ensemble E

3.4. Dénombrement d'un ensemble de p -listes sans répétition

3.5. Dénombrement d'un ensemble de sous-ensemble à p éléments (combinaison)

3.6. Propriétés du coefficient binomial (rappels)

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3 Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

Dans cette partie, nous appliquons essentiellement le troisième principe (celui du produit, ou de décomposition) pour dénombrer quelques situations fréquentes. On commence par les définir, puis on se concentre sur chacune.

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Définition - Liste, permutation, combinaison

Soit E un ensemble. On appelle

- ▶ p -liste (ou p -uplet) d'éléments de E tout élément de E^p ;
- ▶ permutation de E (E fini) toute bijection de E sur E ;
- ▶ combinaison à p éléments de E (E fini) toute partie (ensemble) à p éléments de E .

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

⇒ Nombre de liste
Nombre de
permutation
⇒ Nombre de
combinaison

Définition - Liste, permutation, combinaison

Soit E un ensemble. On appelle

- ▶ p -liste (ou p -uplet) d'éléments de E tout élément de E^p ;
- ▶ permutation de E (E fini) toute bijection de E sur E ;
- ▶ combinaison à p éléments de E (E fini) toute partie (ensemble) à p éléments de E .

Exemple de 2-listes sans répétition

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Définition - Liste, permutation, combinaison

Soit E un ensemble. On appelle

- ▶ p -liste (ou p -uplet) d'éléments de E tout élément de E^p ;
- ▶ permutation de E (E fini) toute bijection de E sur E ;
- ▶ combinaison à p éléments de E (E fini) toute partie (ensemble) à p éléments de E .

Exemple de 2-listes sans répétition

Exemple de combinaison à 2 éléments à partir de \mathbb{N}_4 .

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

⇒ Nombre de liste
Nombre de
permutation
⇒ Nombre de
combinaison

Définition - Liste, permutation, combinaison

Soit E un ensemble. On appelle

- ▶ p -liste (ou p -uplet) d'éléments de E tout élément de E^p ;
- ▶ permutation de E (E fini) toute bijection de E sur E ;
- ▶ combinaison à p éléments de E (E fini) toute partie (ensemble) à p éléments de E .

Exemple de 2-listes sans répétition

Exemple de combinaison à 2 éléments à partir de \mathbb{N}_4 .

Remarque Vocabulaire

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒ Nombre de sous-ensembles à cardinal fixé. Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Définitions des différents types d'ensemble

3.2. Dénombrement d'un ensemble de listes avec répétition

3.3. Dénombrement de permutation d'un ensemble E

3.4. Dénombrement d'un ensemble de p -listes sans répétition

3.5. Dénombrement d'un ensemble de sous-ensemble à p éléments (combinaison)

3.6. Propriétés du coefficient binomial (rappels)

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

Dénombrement des p -listes avec répétition

Comme une p -liste (avec répétition possible) est un élément du produit cartésien E^p , on peut affirmer (même si cela est la répétition de 2.4.) :

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Dénombrement des p -listes avec répétition

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

Théorème - nombre de p -liste (répétition possible)

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Le nombre de p -listes d'éléments de E est $n \times n \times \dots \times n = n^p$.

Le nombre de p -listes, élément de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est $\text{card } E_1 \times \dots \times \text{card } E_p$

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Dénombrement des p -listes avec répétition

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

Théorème - nombre de p -liste (répétition possible)

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Le nombre de p -listes d'éléments de E est $n \times n \times \dots \times n = n^p$.

Le nombre de p -listes, élément de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est $\text{card } E_1 \times \dots \times \text{card } E_p$

Exemple Trajets !

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

⇒ Nombre de liste
Nombre de
permutation
⇒ Nombre de
combinaison

Exercice

Combien de mots différents de 7 lettres alternant consonnes et voyelles peut-on former

1. si la première lettre est une consonne ?
2. si la première lettre est une voyelle ?

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

⇒ Nombre de liste
Nombre de
permutation
⇒ Nombre de
combinaison

Exercice

Combien de mots différents de 7 lettres alternant consonnes et voyelles peut-on former

1. si la première lettre est une consonne ?
2. si la première lettre est une voyelle ?

Exercice

Un piano à queue à 88 touches. De combien de manières différentes peut-on jouer une mélodie de 7 sons consécutifs ?

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

n^p ou p^n ?

Attention. p^n ou n^p ?

Ce cours est composé de nombreux résultats à connaître.

L'expérience montre que lorsque l'élève n'a pas bien compris les résultats, mais juste appris les formules en temps voulu, il ne les connaît plus plus tard dans l'année, et en particulier au moment du concours.

Autrement dit : *si vous avez un doute sur la formule,*
REFLECHISSEZ!

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Application : nombre d'applications

Théorème - nombre d'applications

Soient E, F deux ensembles finis avec $\text{card } E = n, \text{card } F = p$.

Alors $\mathcal{F}(E, F)$ est fini et $\text{card } \mathcal{F}(E, F) = (\text{card } F)^{\text{card } E} = p^n$.

Et $\mathcal{P}(E)$ est fini et $\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{card } E} = 2^n$.

⇒ Nombre de liste

Nombre de
permutation

⇒ Nombre de
combinaison

1. Expérience,
modélisation et
ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et
combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

Application : nombre d'applications

Théorème - nombre d'applications

Soient E, F deux ensembles finis avec $\text{card } E = n, \text{card } F = p$.

Alors $\mathcal{F}(E, F)$ est fini et $\text{card } \mathcal{F}(E, F) = (\text{card } F)^{\text{card } E} = p^n$.

Et $\mathcal{P}(E)$ est fini et $\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{card } E} = 2^n$.

Démonstration

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Application : nombre d'applications

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

Théorème - nombre d'applications

Soient E, F deux ensembles finis avec $\text{card } E = n, \text{card } F = p$.

Alors $\mathcal{F}(E, F)$ est fini et $\text{card } \mathcal{F}(E, F) = (\text{card } F)^{\text{card } E} = p^n$.

Et $\mathcal{P}(E)$ est fini et $\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{card } E} = 2^n$.

Démonstration

Exercice

Soit E un ensemble de n éléments.

Démontrer que le nombre de sous-ensembles de E est 2^n .

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒ Nombre de sous-ensembles à cardinal fixé. Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Définitions des différents types d'ensemble

3.2. Dénombrement d'un ensemble de listes avec répétition

3.3. Dénombrement de permutation d'un ensemble E

3.4. Dénombrement d'un ensemble de p -listes sans répétition

3.5. Dénombrement d'un ensemble de sous-ensemble à p éléments (combinaison)

3.6. Propriétés du coefficient binomial (rappels)

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3 Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

⇒ Nombre de liste
Nombre de
permutation
⇒ Nombre de
combinaison

Analyse Représentation d'une permutation

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3 Permutation**
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

⇒ Nombre de liste
Nombre de
permutation
⇒ Nombre de
combinaison

Analyse Représentation d'une permutation

Proposition - Permutation (autre point de vue)

Soit E un ensemble à n éléments.

Toute n -liste (ordonnée) des n éléments distincts de E représente une permutation de E .

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3 Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

⇒ Nombre de liste
Nombre de
permutation
⇒ Nombre de
combinaison

Analyse Représentation d'une permutation

Proposition - Permutation (autre point de vue)

Soit E un ensemble à n éléments.

Toute n -liste (ordonnée) des n éléments distincts de E
représente une permutation de E .

Remarque Mot clés

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3 Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

⇒ Nombre de liste
Nombre de
permutation
⇒ Nombre de
combinaison

Analyse Représentation d'une permutation

Proposition - Permutation (autre point de vue)

Soit E un ensemble à n éléments.

Toute n -liste (ordonnée) des n éléments distincts de E représente une permutation de E .

Remarque Mot clés

Exemple Permutations de $\{a, b, c, d\}$

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3 Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Nombre de permutations

⇒ Nombre de liste
Nombre de
permutation
⇒ Nombre de
combinaison

Proposition - Nombre de permutations

Soit E un ensemble de n éléments.

Alors le nombre de permutations de E est $n!$.

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3 Permutation**
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Nombre de permutations

⇒ Nombre de liste
Nombre de
permutation
⇒ Nombre de
combinaison

Proposition - Nombre de permutations

Soit E un ensemble de n éléments.

Alors le nombre de permutations de E est $n!$.

Démonstration

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3 Permutation**
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Nombre de permutations

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

Proposition - Nombre de permutations

Soit E un ensemble de n éléments.

Alors le nombre de permutations de E est $n!$.

Démonstration

Exemple Simple

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3 Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Nombre de permutations

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

Proposition - Nombre de permutations

Soit E un ensemble de n éléments.

Alors le nombre de permutations de E est $n!$.

Démonstration

Exemple Simple

Exercice

Combien existe-t-il d'anagrammes du mot "compris" ?

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3 Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒ Nombre de sous-ensembles à cardinal fixé. Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Définitions des différents types d'ensemble

3.2. Dénombrement d'un ensemble de listes avec répétition

3.3. Dénombrement de permutation d'un ensemble E

3.4. Dénombrement d'un ensemble de p -listes sans répétition

3.5. Dénombrement d'un ensemble de sous-ensemble à p éléments (combinaison)

3.6. Propriétés du coefficient binomial (rappels)

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

Nombre de p -liste sans répétition

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

Théorème - Nombre de p -liste (sans répétition)

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Le nombre de p -listes d'éléments distincts de E est

$$n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n - p)!} \text{ si } p \leq n, 0 \text{ sinon.}$$

Par convention $0! = 1$.

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Nombre de p -liste sans répétition

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

Théorème - Nombre de p -liste (sans répétition)

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Le nombre de p -listes d'éléments distincts de E est

$$n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n - p)!} \text{ si } p \leq n, 0 \text{ sinon.}$$

Par convention $0! = 1$.

Démonstration

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Nombre de p -liste sans répétition

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

Théorème - Nombre de p -liste (sans répétition)

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Le nombre de p -listes d'éléments distincts de E est

$$n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n - p)!} \text{ si } p \leq n, 0 \text{ sinon.}$$

Par convention $0! = 1$.

Démonstration

Remarque Explication de la démonstration

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Exercice

Un piano à queue à 88 touches. De combien de manières différentes peut-on jouer une mélodie de 7 sons consécutifs sans jouer deux fois la même note ?

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition**
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Exercice

Exercice

Un piano à queue à 88 touches. De combien de manières différentes peut-on jouer une mélodie de 7 sons consécutifs sans jouer deux fois la même note ?

Corollaire - Nombre d'applications injectives

Soient E et F deux ensembles finis, $\text{card}(E) = p$, $\text{card}(F) = n$, alors : le nombre d'applications injectives de E dans F est $n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leq n$, 0 sinon ;

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Exercice

Exercice

Un piano à queue à 88 touches. De combien de manières différentes peut-on jouer une mélodie de 7 sons consécutifs sans jouer deux fois la même note ?

Corollaire - Nombre d'applications injectives

Soient E et F deux ensembles finis, $\text{card}(E) = p$, $\text{card}(F) = n$, alors : le nombre d'applications injectives de E dans F est $n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leq n$, 0 sinon ;

Démonstration

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒ Nombre de sous-ensembles à cardinal fixé. Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Définitions des différents types d'ensemble

3.2. Dénombrement d'un ensemble de listes avec répétition

3.3. Dénombrement de permutation d'un ensemble E

3.4. Dénombrement d'un ensemble de p -listes sans répétition

3.5. Dénombrement d'un ensemble de sous-ensemble à p éléments (combinaison)

3.6. Propriétés du coefficient binomial (rappels)

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

Nombre de combinaison

Théorème - Nombre de combinaison et coefficient binomial

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Pour $p \leq n$, on note $\binom{E}{p}$ l'ensemble des parties à p éléments de E . On a

$$\text{card} \binom{E}{p} = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Ce nombre est appelé nombre de combinaisons de p éléments parmi n et se lit « p parmi n ».

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

Nombre de combinaison

Théorème - Nombre de combinaison et coefficient binomial

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Pour $p \leq n$, on note $\binom{E}{p}$ l'ensemble des parties à p éléments de E . On a

$$\text{card} \binom{E}{p} = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Ce nombre est appelé nombre de combinaisons de p éléments parmi n et se lit « p parmi n ».

Remarque Autre notation

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

Nombre de combinaison

Théorème - Nombre de combinaison et coefficient binomial

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Pour $p \leq n$, on note $\binom{E}{p}$ l'ensemble des parties à p éléments de E . On a

$$\text{card} \binom{E}{p} = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Ce nombre est appelé nombre de combinaisons de p éléments parmi n et se lit « p parmi n ».

Remarque Autre notation

Démonstration

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

⇒ Nombre de liste
Nombre de
permutation

⇒ Nombre de
combinaison

Remarque Ensemble non ordonné

1. Expérience,
modélisation et
ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et
combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

⇒ Nombre de liste
Nombre de
permutation
⇒ Nombre de
combinaison

Remarque Ensemble non ordonné

Exercice

Quel est le nombre de main avec 3 as, si l'on distribue un jeu de 32 cartes ?

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Principe de décomposition

Savoir-faire. Dénombrement et principe de décomposition

Il s'agit décrire *exactement* (c'est à dire tous les éléments, sans les compter plusieurs fois) l'ensemble des situations possibles.

On peut écrire : « Une situation ...est parfaitement définie par :

1. le choix de ...

(combien d'éléments de disponible ? combien d'éléments choisis ? Remise ou non ? Liste ou un ensemble ?),

soit n_1 possibilités

Puis

2. le choix de, soit n_2 possibilités

Puis ...

- k . le choix de, soit n_k possibilités

Il y a donc $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ situations possibles. »

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3 Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

Remarque sur le coefficient binomial

Exercice

De combien de manières peut-on choisir parmi 30 personnes une équipe de 6 personnes en fixant parmi elles un capitaine ?

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3 Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Remarque sur le coefficient binomial

Exercice

De combien de manières peut-on choisir parmi 30 personnes une équipe de 6 personnes en fixant parmi elles un capitaine ?

Savoir-faire. Nature du coefficient binomial

Puisque le coefficient binomial exprime le nombre de quelque chose, il s'agit toujours d'un nombre entier, ainsi les calculs fractionnaires *se simplifient toujours*.

Il faut donc toujours commencer par simplifier les calculs avant d'effectuer les premières multiplications

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Remarque sur le coefficient binomial

Exercice

De combien de manières peut-on choisir parmi 30 personnes une équipe de 6 personnes en fixant parmi elles un capitaine ?

Savoir-faire. Nature du coefficient binomial

Puisque le coefficient binomial exprime le nombre de quelque chose, il s'agit toujours d'un nombre entier, ainsi les calculs fractionnaires *se simplifieront toujours*.

Il faut donc toujours commencer par simplifier les calculs avant d'effectuer les premières multiplications

Exemple Calculer $\binom{9}{5}$

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒ Nombre de sous-ensembles à cardinal fixé. Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Définitions des différents types d'ensemble

3.2. Dénombrement d'un ensemble de listes avec répétition

3.3. Dénombrement de permutation d'un ensemble E

3.4. Dénombrement d'un ensemble de p -listes sans répétition

3.5. Dénombrement d'un ensemble de sous-ensemble à p éléments (combinaison)

3.6. Propriétés du coefficient binomial (rappels)

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

Rappels

Proposition - Propriétés

On a vu : $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Pour $p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Pour $1 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

Par convention, si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$ (conforme au triangle de Pascal
(sauf en $\binom{0}{0}$))

⇒ Nombre de liste
Nombre de
permutation

⇒ Nombre de
combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Rappels

Proposition - Propriétés

On a vu : $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Pour $p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Pour $1 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

Par convention, si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$ (conforme au triangle de Pascal
(sauf en $\binom{0}{0}$))

Remarque - Binôme de Newton

⇒ Nombre de liste
Nombre de
permutation

⇒ Nombre de
combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Rappels

Proposition - Propriétés

On a vu : $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Pour $p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Pour $1 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

Par convention, si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$ (conforme au triangle de Pascal
(sauf en $\binom{0}{0}$))

Remarque - Binôme de Newton

Remarque - Nombre de chemins

⇒ Nombre de liste
Nombre de
permutation

⇒ Nombre de
combinaison

1. Expérience,
modélisation et
ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et
combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison (sous-ensemble à cardinal fixé)

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

- ▶ Nombre de permutation de $E_n : n!$

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

- ▶ Nombre de permutation de $E_n : n!$
- ▶ Nombre de p -liste (avec répétition) à partir de $E_n : n^p$

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

- ▶ Nombre de permutation de $E_n : n!$
- ▶ Nombre de p -liste (avec répétition) à partir de $E_n : n^p$
On en déduit le nombre d'applications. . .

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

▶ Nombre de permutation de $E_n : n!$

▶ Nombre de p -liste (avec répétition) à partir de $E_n : n^p$
On en déduit le nombre d'applications...

▶ Nombre de p -liste sans répétition à partir de $E_n : A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

- ▶ Nombre de permutation de $E_n : n!$
- ▶ Nombre de p -liste (avec répétition) à partir de $E_n : n^p$
On en déduit le nombre d'applications...

- ▶ Nombre de p -liste sans répétition à partir de $E_n : A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
On en déduit le nombre d'applications injectives...

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

▶ Nombre de permutation de $E_n : n!$

▶ Nombre de p -liste (avec répétition) à partir de $E_n : n^p$
On en déduit le nombre d'applications. . .

▶ Nombre de p -liste sans répétition à partir de $E_n : A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
On en déduit le nombre d'applications injectives. . .

⇒ Nombre de combinaison (sous-ensemble à cardinal fixé)

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

▶ Nombre de permutation de E_n : $n!$

▶ Nombre de p -liste (avec répétition) à partir de E_n : n^p
On en déduit le nombre d'applications...

▶ Nombre de p -liste sans répétition à partir de E_n : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
On en déduit le nombre d'applications injectives...

⇒ Nombre de combinaison (sous-ensemble à cardinal fixé)

▶ Nombre de sous-ensemble (sans répétition !) à partir de E_n est
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

3.1. Différents types

3.2. Listes avec répétition

3.3. Permutation

3.4. Listes sans répétition

3.5. Combinaison

3.6. Coefficient binomial

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison (sous-ensemble à cardinal fixé)

- ▶ Nombre de sous-ensemble (sans répétition !) à partir de E_n est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Reprise du cours de début d'année :

Propriété du coefficient binomial (Newton...)

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
 - 3.1. Différents types
 - 3.2. Listes avec répétition
 - 3.3. Permutation
 - 3.4. Listes sans répétition
 - 3.5. Combinaison
 - 3.6. Coefficient binomial

Conclusion

⇒ Nombre de liste
Nombre de permutation
⇒ Nombre de combinaison

Objectifs

- ⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation
- ⇒ Nombre de combinaison (sous-ensemble à cardinal fixé)

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 26 : Dénombrement
4. Exercices d'applications
- ▶ Exercice n° 587 & 589

1. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
3.1. Différents types
3.2. Listes avec répétition
3.3. Permutation
3.4. Listes sans répétition
3.5. Combinaison
3.6. Coefficient binomial