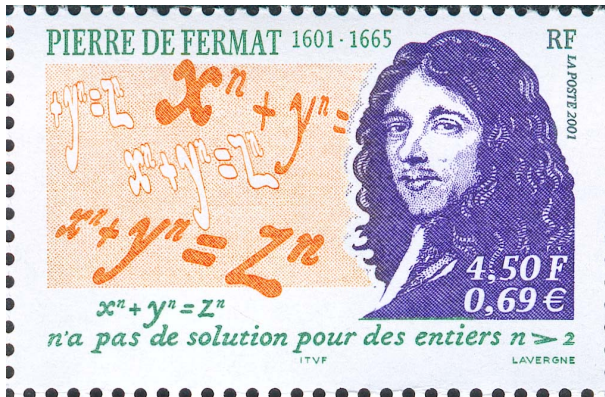




⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Leçon 55 - Continuité

22 janvier 2025

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité, prolongement. . .

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité,
prolongement. . .

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Continuité sur un intervalle

Avec des jauges qui permettent de faire une interversion de quantificateurs :

Définition - Continuité

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I .

$$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

ou de manière équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ tq } \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta_\varepsilon(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

On note $C(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I .

Ou $C(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ s'il y a un risque de confusion sur l'ensemble d'arrivée de I .

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Fonctions non continues ?

Attention. Fonctions usuelles, continues ?

La plupart des fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition, mais il existe des fonctions qui ne sont pas continues partout, par exemple la fonction partie entière ou la fonction indicatrice de $\{0\}$.

Il existe même des fonctions nulle part continues, comme le montre l'exercice suivant

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Fonctions non continues ?

Attention. Fonctions usuelles, continues ?

La plupart des fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition, mais il existe des fonctions qui ne sont pas continues partout, par exemple la fonction partie entière ou la fonction indicatrice de $\{0\}$.

Il existe même des fonctions nulle part continues, comme le montre l'exercice suivant

Exercice

Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, $1_{\mathbb{Q}}$, n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Application

Une application : résoudre des équations fonctionnelles

Exercice

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Déterminer $f(0)$. Montrer que f est impaire.
2. Déterminer la restriction de f à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Z}$, puis à $\mathbb{Q}$.
3. Déterminer finalement f .

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Application

Une application : résoudre des équations fonctionnelles

Exercice

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Déterminer $f(0)$. Montrer que f est impaire.
2. Déterminer la restriction de f à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Z}$, puis à $\mathbb{Q}$.
3. Déterminer finalement f .

Savoir-faire. Définir f (continue) de X à $\overline{X}$

Si f est définie sur un ensemble X , la continuité de f peut permettre d'étendre f sur $\overline{X}$.

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Opération sur la continuité

Proposition - Opération de continuité

Si f et g sont deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, continues en $x_0 \in I$, alors $|f|$, $f + g$, $f g$ sont continues en x_0 , ainsi que $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ si $g(x_0) \neq 0$.

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Opération sur la continuité

Proposition - Opération de continuité

Si f et g sont deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, continues en $x_0 \in I$, alors $|f|$, $f + g$, $f g$ sont continues en x_0 , ainsi que $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ si $g(x_0) \neq 0$.

Démonstration

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Opération sur la continuité

Proposition - Opération de continuité

Si f et g sont deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, continues en $x_0 \in I$, alors $|f|$, $f + g$, $f g$ sont continues en x_0 , ainsi que $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ si $g(x_0) \neq 0$.

Démonstration

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions f^+ et f^- par $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$. Montrer que si f est continue en x_0 , alors f^+ et f^- sont continues en x_0 .

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Opération sur la continuité

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

Proposition - Continuité d'une composée

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$, $f(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$. Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Opération sur la continuité

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

Proposition - Continuité d'une composée

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$, $f(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$. Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

Démonstration

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité, prolongement. . .

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité,
prolongement. . .

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Définition

Définition - Prolongement par continuité

Soit I un intervalle.

- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 une extrémité réelle de I , $x_0 \notin I$.

Si f admet une limite réelle ℓ en x_0 , alors la fonction $\bar{f}$ définie sur $I \cup \{x_0\}$ par
$$\begin{cases} \bar{f}(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0; \\ \bar{f}(x_0) = \ell \end{cases}$$
 prolonge f à $I \cup \{x_0\}$ et est continue en x_0 .

- Si $x_0 \in I$, si f définie sur $I \setminus \{x_0\}$ admet des limites réelles à droite et à gauche en x_0 et si ces limites sont égales (à ℓ) alors la fonction $\bar{f}$ définie sur I par

$$\begin{cases} \bar{f}(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0; \\ \bar{f}(x_0) = \ell \end{cases}$$
 prolonge f à I et est continue en x_0 .

Dans les deux cas $\bar{f}$ s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0 .

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

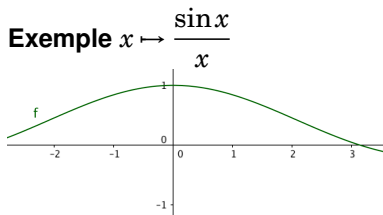
3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Exemple



La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$.

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Remarque

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Remarque Sur le vocabulaire

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Remarque

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Remarque Sur le vocabulaire

Exercice

Montrer que la fonction $x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ est prolongeable par continuité en 0.

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Savoir-faire

Savoir-faire. Démontrer la continuité de f sur I ou prolonger la continuité de f sur I

Dans les deux cas, la méthode est la même :

1. On s'assure, par les théorèmes généraux, que f est continue sur I sauf en un point x_0 particulier.
2. Puis, on regarde la limite de f en x_0 .
 - ▶ Si $x_0 \in \mathcal{D}_f$, alors $f(x_0)$ existe. Il s'agit de démontrer la continuité de f en x_0 .
 - ▶ Si $x_0 \notin \mathcal{D}_f$, alors $f(x_0)$ n'existe pas (ou pas encore). Il s'agit de voir si on peut ajouter un point x_0 dans l'ensemble de définition de f . De manière à ce que f reste continue. On dit que l'on fait un prolongement par continuité de f .

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité, prolongement. . .

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité,
prolongement. . .

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Le théorème

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Théorème - Théorème des valeurs intermédiaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Soient a et b deux réels, $(a, b) \in I^2$ et $a < b$. On suppose que $f(a) \times f(b) \leq 0$.

Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Le théorème

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Théorème - Théorème des valeurs intermédiaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Soient a et b deux réels, $(a, b) \in I^2$ et $a < b$. On suppose que $f(a) \times f(b) \leq 0$.

Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Autre énoncé

Corollaire - TVI entre $f(a)$ et $f(b)$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Soient a et b deux réels, $(a, b) \in I^2$ et $a < b$. Alors pour toute valeur d comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $t \in [a, b]$ tel que $f(t) = d$.

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Autre énoncé

Corollaire - TVI entre $f(a)$ et $f(b)$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Soient a et b deux réels, $(a, b) \in I^2$ et $a < b$. Alors pour toute valeur d comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $t \in [a, b]$ tel que $f(t) = d$.

Démonstration

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Autre énoncé

Corollaire - TVI entre $f(a)$ et $f(b)$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Soient a et b deux réels, $(a, b) \in I^2$ et $a < b$. Alors pour toute valeur d comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $t \in [a, b]$ tel que $f(t) = d$.

Démonstration

Corollaire - Image d'un intervalle par une fonction continue

Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I . Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Autre énoncé

Corollaire - TVI entre $f(a)$ et $f(b)$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Soient a et b deux réels, $(a, b) \in I^2$ et $a < b$. Alors pour toute valeur d comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $t \in [a, b]$ tel que $f(t) = d$.

Démonstration

Corollaire - Image d'un intervalle par une fonction continue

Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I . Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Démonstration

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Exercice

Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Exercice

Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité, prolongement. . .

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité,
prolongement. . .

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Théorème - Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists (x_1, x_2) \in [a, b]^2 \mid f(x_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \text{ et } f(x_2) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Théorème - Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists (x_1, x_2) \in [a, b]^2 \mid f(x_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \text{ et } f(x_2) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Remarque - Mieux ($f(K)$ avec K compact).

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Optimisation

Heuristique - Deux résultats !

Il y a en fait deux parties dans ce théorème :

- ▶ $f([a, b])$ est borné. C'est l'existence de $\sup_{x \in [a, b]} f(x)$.
- ▶ Cette borne supérieure est atteinte : $\exists x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$

La démonstration se fera également en deux temps (avec le principe de dichotomie).

On notera que pour cette démonstration, on exploite de deux façons distinctes ce principe : une fois par l'absurde (méthode ascendante et globale), une fois pour exhiber un nombre en particulier (méthode descendante et locale).

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Théorème - Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists (x_1, x_2) \in [a, b]^2 \mid f(x_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \text{ et } f(x_2) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Théorème - Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists (x_1, x_2) \in [a, b]^2 \mid f(x_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \text{ et } f(x_2) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Démonstration

(Avec le processus de dichotomie)

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Démonstrations

Exercice

Démontrer le théorème de Weierstrass à l'aide du théorème de BW.

- Supposons que f n'est pas bornée sur $[a, b]$.
Montrer qu'il existe $(x_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ tel que $f(x_n) \rightarrow +\infty$.
En déduire une contradiction avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- On considère alors $M = \sup f$. Montrer qu'il existe $(y_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ tel que $f(y_n) \rightarrow M$.
Conclure avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Démonstrations

Exercice

Démontrer le théorème de Weierstrass à l'aide du théorème de BW.

- Supposons que f n'est pas bornée sur $[a, b]$.
Montrer qu'il existe $(x_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ tel que $f(x_n) \rightarrow +\infty$.
En déduire une contradiction avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- On considère alors $M = \sup f$. Montrer qu'il existe $(y_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ tel que $f(y_n) \rightarrow M$.
Conclure avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice

Démontrer le théorème de Weierstrass à l'aide du lemme de Cousin.

L'existence d'un maximum est facile dans le cas d'un ensemble fini. En prenant un jauge puis une subdivision pointée bien choisies, on peut réduire à la recherche d'un maximum pour un nombre fini de points

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Image d'un segment

Théorème - Image d'un segment par une fonction continue

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a, b]$. Alors $f([a, b])$ (image directe du segment) est un segment de $\mathbb{R}$.

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Image d'un segment

Théorème - Image d'un segment par une fonction continue

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a, b]$. Alors $f([a, b])$ (image directe du segment) est un segment de $\mathbb{R}$.

Démonstration

C'est un corollaire du théorème précédent.

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Image d'un segment

Théorème - Image d'un segment par une fonction continue

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a, b]$. Alors $f([a, b])$ (image directe du segment) est un segment de $\mathbb{R}$.

Démonstration

C'est un corollaire du théorème précédent.

Exercice

Montrer qu'une fonction périodique, continue sur $\mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes.

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Montrer l'existence d'un point x tel que...

Plusieurs possibilités :

- ▶ Théorème des valeurs intermédiaires
- ▶ Théorème de Weierstrass
- ▶ Principe de dichotomie
- ▶ Principe de convergence monotone ou borne supérieure
- ▶ Théorème de Bolzano-Weierstrass (limite de la suite extraite)
- ▶ Théorème de Cauchy (espace complet)
- ▶ Théorème de Rolle (ou E.A.F.)

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Exercice

Soit f continue sur $[a, b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) < \alpha$.

Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall x \in [a, b], f(x) \leq \alpha - \epsilon$.

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Exercices

Exercice

Soit f continue sur $[a, b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) < \alpha$.

Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall x \in [a, b], f(x) \leq \alpha - \epsilon$.

Exercice

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], [a, b])$ telle que $\forall x \neq y$, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe, noté x_0
2. Soit (u_n) tel que $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n) \rightarrow x_0$.

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité, prolongement. . .

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité,
prolongement. . .

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

**3.5. Théorème de la bijection
(bis)**

3.6. Continuité uniforme

Théorème - Injectivité et monotonie stricte

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Théorème - Injectivité et monotonie stricte

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Théorème - Injectivité et monotonie stricte

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration

Théorème - Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie sur I , continue, strictement monotone sur I (intervalle de $\mathbb{R}$), alors f est bijective de I sur $J = f(I)$. Sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J , de même sens de variations que f .

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Théorème - Injectivité et monotonie stricte

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration

Théorème - Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie sur I , continue, strictement monotone sur I (intervalle de $\mathbb{R}$), alors f est bijective de I sur $J = f(I)$. Sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J , de même sens de variations que f .

Démonstration

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Théorème - Injectivité et monotonie stricte

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration

Théorème - Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie sur I , continue, strictement monotone sur I (intervalle de $\mathbb{R}$), alors f est bijective de I sur $J = f(I)$. Sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J , de même sens de variations que f .

Démonstration

Remarque Un théorème supplémentaire

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité, prolongement. . .

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité,
prolongement. . .

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Définition

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Définition - Fonction uniformément continue

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est uniformément continue sur I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Très important !

Attention. Différence entre continuité et uniforme continuité

La différence avec la définition de la continuité en x est que le réel η est le même pour tout $x \in I$.

A comparer :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in I \exists \eta > 0 \mid \forall y \in I, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Très important !

Attention. Différence entre continuité et uniforme continuité

La différence avec la définition de la continuité en x est que le réel η est le même pour tout $x \in I$.

A comparer :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in I \exists \eta > 0 \mid \forall y \in I, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Attention. Ordre des quantificateurs

Insistons un peu... L'ordre des quantificateurs est important :

$$\blacktriangleright \exists \dots \forall \dots \neq \forall \dots \exists \dots$$

$$\blacktriangleright \exists \dots_1 \exists \dots_2 = \exists \dots_2 \exists \dots_1 \text{ et } \forall \dots_1 \forall \dots_2 = \forall \dots_2 \forall \dots_1$$

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Implication...

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Proposition - Implication

Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I .

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Implication...

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Proposition - Implication

Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I .

Démonstration

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Il existe une réciproque, dans le cadre des fonctions définie sur un segment. C'est le théorème de Heine :

Théorème - Théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur ce segment.

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

et réciproque

Il existe une réciproque, dans le cadre des fonctions définie sur un segment. C'est le théorème de Heine :

Théorème - Théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur ce segment.

Remarque - Démonstration

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

et réciproque

Il existe une réciproque, dans le cadre des fonctions définie sur un segment. C'est le théorème de Heine :

Théorème - Théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur ce segment.

Remarque - Démonstration

Démonstration (Lemme de Cousin)

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Remarques sur la démonstration

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Remarque Commentaires sur la démonstration

► f est continue sur I , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta : I \rightarrow \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in I, |y - x| \leq \delta(y) \implies |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$$

► f est uniformément continue sur I , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \mid \forall x \in I, |y - x| \leq \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$$

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Remarques sur la démonstration

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Remarque Commentaires sur la démonstration

► f est continue sur I , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta : I \rightarrow \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in I, |y - x| \leq \delta(y) \implies |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$$

► f est uniformément continue sur I , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \mid \forall x \in I, |y - x| \leq \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$$

Exercice : A démontrer avec la dichotomie

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Remarques sur la démonstration

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Remarque Commentaires sur la démonstration

► f est continue sur I , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta : I \rightarrow \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in I, |y - x| \leq \delta(y) \implies |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$$

► f est uniformément continue sur I , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \mid \forall x \in I, |y - x| \leq \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$$

Exercice : A démontrer avec la dichotomie

Exercice : A démontrer avec Bolzano-Weierstrass

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Exercice

1. Montrer que si f est lipschitzienne sur I alors f est uniformément continue sur I .
Montrer que sinus est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$).
2. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ mais n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Continuité, prolongement...
- ⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Conclusion

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement. . .

- ▶ f est continue sur I , si f est continue en tout point de I .

⇒ Continuité,
prolongement. . .

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Conclusion

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement. . .

- ▶ f est continue sur I , si f est continue en tout point de I .
- ▶ Vérifications de la continuité : fonctions usuelles ou passage à la limite

⇒ Continuité,
prolongement. . .

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Conclusion

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement. . .

- ▶ f est continue sur I , si f est continue en tout point de I .
- ▶ Vérifications de la continuité : fonctions usuelles ou passage à la limite
- ▶ Prolongement, PAR continuité.
On ajoute à $\mathcal{D}_f = I$ un point x de sorte que $f(x)$ (ajouté) rende f continue en x également.

⇒ Continuité, prolongement. . .

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Objectifs

- ⇒ Continuité, prolongement...
- ⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Conclusion

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

- V1 : Si f continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

Conclusion

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

- ▶ V1 : Si f continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
- ▶ V2 : Si f continue sur $[a, b]$ alors $\forall d \in [a, b], \exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Conclusion

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

- ▶ V1 : Si f continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
- ▶ V2 : Si f continue sur $[a, b]$ alors $\forall d \in [a, b], \exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.
- ▶ V3 : L'image d'un intervalle est un intervalle

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Conclusion

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

- ▶ V1 : Si f continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
- ▶ V2 : Si f continue sur $[a, b]$ alors $\forall d \in [a, b], \exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.
- ▶ V3 : L'image d'un intervalle est un intervalle
- ▶ Weierstrass : L'image d'un segment par une fonction continue, est un segment (f atteint ses bornes sur $[a, b]$)

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Conclusion

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

- ▶ V1 : Si f continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
- ▶ V2 : Si f continue sur $[a, b]$ alors $\forall d \in [a, b], \exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.
- ▶ V3 : L'image d'un intervalle est un intervalle
- ▶ Weierstrass : L'image d'un segment par une fonction continue, est un segment (f atteint ses bornes sur $[a, b]$)
- ▶ - Théorème de la bijection : Si f est continue, alors f est injective ssi f est strictement monotone.

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

Conclusion

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 11 : Continuité
Fin du chapitre.
- ▶ Exercice N° 393 & 397

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme