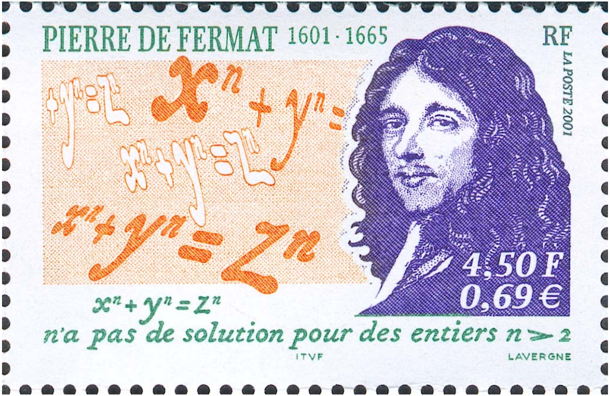

Leçon 56 - Continuité

23 janvier 2025

Enoncé

Théorème - Injectivité et monotonie stricte

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I. Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Enoncé

Théorème - Injectivité et monotonie stricte

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I. Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration

Enoncé

Théorème - Injectivité et monotonie stricte

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I. Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration

Théorème - Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie sur I, continue, strictement monotone sur I (intervalle de $\mathbb{R}$), alors f est bijective de I sur $J = f(I)$.
Sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J, de même sens de variations que f.

Enoncé

Théorème - Injectivité et monotonie stricte

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I. Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration

Théorème - Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie sur I, continue, strictement monotone sur I (intervalle de $\mathbb{R}$), alors f est bijective de I sur $J = f(I)$.
Sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J, de même sens de variations que f.

Démonstration

Enoncé

Théorème - Injectivité et monotonie stricte

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I. Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration

Théorème - Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie sur I, continue, strictement monotone sur I (intervalle de $\mathbb{R}$), alors f est bijective de I sur $J = f(I)$.
Sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J, de même sens de variations que f.

Démonstration

Remarque Un théorème supplémentaire

Définition

Définition - Fonction uniformément continue

Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. On dit que f est uniformément continue sur I si

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall\ (x,y) \in I^2, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \epsilon.$$

Très important !

Attention. Différence entre continuité et uniforme continuité

La différence avec la définition de la continuité en x est que le réel η est le même pour tout $x \in I$.

A comparer :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall\ (x,y) \in I^2, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon.$$

$$\forall\ \epsilon > 0, \forall\ x \in I\ \exists \eta > 0 \mid \forall\ y \in I, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon.$$

Très important !

Attention. Différence entre continuité et uniforme continuité

La différence avec la définition de la continuité en x est que le réel η est le même pour tout $x \in I$.
A comparer :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall\ (x,y) \in I^2, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon.$$

$$\forall\ \epsilon > 0, \forall\ x \in I\ \exists \eta > 0 \mid \forall\ y \in I, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon.$$

Attention. Ordre des quantificateurs

Insistons un peu...L'ordre des quantificateurs est important :

- $\exists \cdots \forall \cdots \neq \forall \cdots \exists \cdots$
- $\exists \cdots_1 \exists \cdots_2 = \exists \cdots_2 \exists \cdots_1$ et $\forall \cdots_1 \forall \cdots_2 = \forall \cdots_2 \forall \cdots_1$

Implication...

Proposition - Implication

Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I.

Implication...

Proposition - Implication

Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I.

Démonstration

et réciproque

Il existe une réciproque, dans le cadre des fonctions définie sur un segment. C'est le théorème de Heine :

Théorème - Théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur ce segment.

et réciproque

Il existe une réciproque, dans le cadre des fonctions définie sur un segment. C'est le théorème de Heine :

Théorème - Théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur ce segment.

Remarque - Démonstration

et réciproque

Il existe une réciproque, dans le cadre des fonctions définie sur un segment. C'est le théorème de Heine :

Théorème - Théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur ce segment.

Remarque - Démonstration

Démonstration (Lemme de Cousin)

Remarques sur la démonstration

Remarque Commentaires sur la démonstration

- f est continue sur I, si

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta : I \to \mathbb{R}_+^* \mid \forall\ x \in I, |y-x| \leqslant \delta(y) \Longrightarrow |f(y)-f(x)| \leqslant \epsilon$$

- f est uniformément continue sur I, si

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \qquad \mid \forall\ x \in I, |y-x| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(y)-f(x)| \leqslant \epsilon$$

Remarques sur la démonstration

Remarque Commentaires sur la démonstration

- f est continue sur I, si

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta : I \to \mathbb{R}_+^* \mid \forall\ x \in I, |y - x| \leqslant \delta(y) \Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \epsilon$$

- f est uniformément continue sur I, si

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \qquad \mid \forall\ x \in I, |y - x| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \epsilon$$

<u>Exercice</u> : A démontrer avec la dichotomie

Remarques sur la démonstration

Remarque Commentaires sur la démonstration

- f est continue sur I, si

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta : I \to \mathbb{R}_+^* \mid \forall\ x \in I, |y - x| \leqslant \delta(y) \Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \epsilon$$

- f est uniformément continue sur I, si

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \qquad \mid \forall\ x \in I, |y - x| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \epsilon$$

<u>Exercice</u> : A démontrer avec la dichotomie

<u>Exercice</u> : A démontrer avec Bolzano-Weierstrass

Exercice

<u>Exercice</u>

1. Montrer que si f est lipschitzienne sur I alors f est uniformément continue sur I.
   Montrer que sinus est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$).
2. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,+\infty[$ mais n'est pas lipschitzienne sur $[0,+\infty[$.
3. Montrer que $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

Définitions classiques

Soit X une partie de $\mathbb{R}$.

Définition - Transformations classiques

A partir de $f \in \mathscr{F}(X,\mathbb{C})$, on définit les applications suivantes à valeurs dans $\mathbb{R}$:

- $|f|$ (module de f) : $\forall x \in X, |f|(x) = |f(x)|$
- $\mathbf{Re} f$ (partie réelle de f) : $\forall x \in X, (\mathbf{Re} f)(x) = \mathbf{Re}(f(x))$
- $\mathbf{Im} f$ (partie imaginaire de f) : $\forall x \in X, (\mathbf{Im} f)(x) = \mathbf{Im}(f(x))$

On définit également $\overline{f}$, fonction conjuguée de f, à valeurs dans $\mathbb{C}$, par $\forall x \in X, \overline{f}(x) = \overline{f(x)}$

⇒ Uniforme continuité
⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?
1. Problèmes
2. Limites
3. Fonc continue sur I
3.5. Théorème de la bijection (bis)
3.6. Continuité uniforme
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
4.1. Opérations
4.2. Fonctions bornées
4.3. Limites
4.4. Opérations sur les limites
4.5. Continuité

Fonctions bornées

Définition - Fonctions à valeurs complexes bornées

On dit que $f \in \mathscr{F}(X,\mathbb{C})$ est bornée si la fonction $|f| \in \mathscr{F}(X,\mathbb{R})$ est majorée, c'est-à-dire si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, |f(x)| \leqslant M.$$

Fonctions bornées

Définition - Fonctions à valeurs complexes bornées

On dit que $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$ est bornée si la fonction $|f| \in \mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ est majorée, c'est-à-dire si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, |f(x)| \leqslant M.$$

Attention. Majoration dans $\mathbb{C}$

Dire qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ est majorée, ou minorée, n'a pas de sens.

Propritétés

Proposition - Stabilité pour fonctions bornées

$f \in \mathscr{F}(X,\mathbb{C})$ est bornée si et seulement si $\mathbf{Re} f$ et $\mathbf{Im} f$ ($\in \mathscr{F}(X,\mathbb{R})$) sont bornées.
Toute combinaison linéaire et tout produit de deux fonctions bornées sont des fonctions bornées.

Propritétés

Proposition - Stabilité pour fonctions bornées

$f \in \mathscr{F}(X,\mathbb{C})$ est bornée si et seulement si $\mathbf{Re} f$ et $\mathbf{Im} f$ $(\in \mathscr{F}(X,\mathbb{R}))$ sont bornées.
Toute combinaison linéaire et tout produit de deux fonctions bornées sont des fonctions bornées.

Démonstration

Définition

Définition - Limite de fonction complexe

On dit que la fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$ admet le complexe ℓ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a) si la fonction à valeurs réelles $|f - \ell|$ tend vers 0 en a.

Définition

Définition - Limite de fonction complexe

On dit que la fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$ admet le complexe ℓ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a) si la fonction à valeurs réelles $|f - \ell|$ tend vers 0 en a.

Attention. Pas de limite infinie pour des fonctions à valeurs complexes

On ne définit pas de limite infinie pour une fonction à valeurs complexes...

Critères et propriétés

Propriété - Critère de convergence

Soit f une fonction à valeurs complexes, $\ell \in \mathbb{C}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors f admet ℓ pour limite en a si et seulement si les fonctions $\mathbf{Re} f$ et $\mathbf{Im} f$ admettent respectivement $\mathbf{Re} \ell$ et $\mathbf{Im} \ell$ pour limite en a.
On en déduit que si f admet une limite en a, celle-ci est unique.

Critères et propriétés

Propriété - Critère de convergence

Soit f une fonction à valeurs complexes, $\ell \in \mathbb{C}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors f admet ℓ pour limite en a si et seulement si les fonctions $\mathbf{Re} f$ et $\mathbf{Im} f$ admettent respectivement $\mathbf{Re} \ell$ et $\mathbf{Im} \ell$ pour limite en a.
On en déduit que si f admet une limite en a, celle-ci est unique.

Démonstration

Critères et propriétés

Propriété - Critère de convergence

Soit f une fonction à valeurs complexes, $\ell \in \mathbb{C}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors f admet ℓ pour limite en a si et seulement si les fonctions $\mathbf{Re} f$ et $\mathbf{Im} f$ admettent respectivement $\mathbf{Re}\ell$ et $\mathbf{Im}\ell$ pour limite en a.
On en déduit que si f admet une limite en a, celle-ci est unique.

Démonstration

Proposition - Limite donc bornée

Si f admet une limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée au voisinage de a.

Critères et propriétés

Propriété - Critère de convergence

Soit f une fonction à valeurs complexes, $\ell \in \mathbb{C}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors f admet ℓ pour limite en a si et seulement si les fonctions $\mathbf{Re} f$ et $\mathbf{Im} f$ admettent respectivement $\mathbf{Re} \ell$ et $\mathbf{Im} \ell$ pour limite en a.
On en déduit que si f admet une limite en a, celle-ci est unique.

Démonstration

Proposition - Limite donc bornée

Si f admet une limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration

Arithmétique de limites

Proposition - Bilan

Soient $f, g \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$, $(\ell, m) \in \mathbb{C}^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = m$. Alors :

$$\lim_{x\to a} |f|(x) = |\ell| \qquad \lim_{x\to a} \overline{f}(x) = \overline{\ell}$$

$$\lim_{x\to a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\ell + \mu m \qquad \lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\ell}{m} \text{ pour } m \neq 0$$

Soit $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$;
soit (u_n) une suite de X telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

Soient $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, $\phi \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ telle que $\phi(I) \subset X$, $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$ et $\lim\limits_{t\to t_0} \phi(t) = a$ alors $\lim\limits_{t\to t_0} (f \circ \phi)(t) = \ell$.

Arithmétique de limites

Proposition - Bilan

Soient $f, g \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$, $(\ell, m) \in \mathbb{C}^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = m$. Alors :

$$\lim_{x\to a} |f|(x) = |\ell| \qquad \lim_{x\to a} \overline{f}(x) = \overline{\ell}$$

$$\lim_{x\to a}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\ell + \mu m \qquad \lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\ell}{m} \text{ pour } m \neq 0$$

Soit $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$;
soit (u_n) une suite de X telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

Soient $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, $\phi \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ telle que $\phi(I) \subset X$, $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$ et $\lim\limits_{t\to t_0} \phi(t) = a$ alors $\lim\limits_{t\to t_0} (f \circ \phi)(t) = \ell$.

Démonstration

Définition

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Définition - Continuité d'une fonction à valeurs complexes

Soit f définie sur I et $a \in I$, f admet une limite en a équivaut à dire que $\mathbf{Re} f$ et $\mathbf{Im} f$ admettent des limites réelles en a, c'est-à-dire qu'elles sont continues en a
Si c'est le cas on dit que f est continue en a.
$f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$ est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
Cela équivaut à dire que $\mathbf{Re} f, \mathbf{Im} f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ sont continues sur I.
On note $\mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ ou $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$.

Proposition

Proposition - Stabilité par continuité

Si $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$ est continue sur I alors $\overline{f} \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$ et $|f| \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ sont continues sur I.

Soient $f,g \in \mathscr{C}(I,\mathbb{C})$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ ($\mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ est un s.e.v. de $\mathscr{F}(I,\mathbb{C})$).

Si g ne s'annule pas, $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}(I,\mathbb{C})$.

Si $\phi \in \mathscr{C}(J,\mathbb{R})$ avec $\phi(J) \subset I$ alors $f \circ \phi \in \mathscr{C}(I,\mathbb{C})$.

Exercice

Exercice

Les propriétés suivantes restent-elles vraies en passant de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue sur $[a,b]$. Alors f est bornée sur $[a,b]$ et il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $|f(x_0)| = \sup_{[a,b]} |f(x)|$.
2. Le théorème des valeurs intermédiaires (image continue d'un segment).

Conclusion

Objectifs

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Uniforme continuité

- Définition : le pas est constant :
  $\forall\ \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall\ (x,y) \in I^2, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon.$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Uniforme continuité

- Définition : le pas est constant :
  $\forall\ \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall\ (x,y) \in I^2, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \epsilon.$
- La continuité uniforme implique la continuité

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Uniforme continuité

- Définition : le pas est constant :
  $\forall\ \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall\ (x,y) \in I^2, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \epsilon.$
- La continuité uniforme implique la continuité
- **Sur un segment**, la continuité implique la continuité uniforme. (Heine)

Conclusion

Objectifs

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

Conclusion

Objectifs

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

- Définitions : fonctions bornées, limite en un point

  On s'intéresse à $|f(x)-\ell|$ (module, fonction de X dans $\mathbb{R}$)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Uniforme continuité

$\Rightarrow$ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

- Définitions : fonctions bornées, limite en un point
  On s'intéresse à $|f(x)-\ell|$ (module, fonction de X dans $\mathbb{R}$)
- Stabilité opératoire sur les limites

Conclusion

Objectifs

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

- Définitions : fonctions bornées, limite en un point

  On s'intéresse à $|f(x) - \ell|$ (module, fonction de X dans $\mathbb{R}$)

- Stabilité opératoire sur les limites
- Définition de la continuité (on peut exploiter les parties réelles et imaginaires)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Uniforme continuité

$\Rightarrow$ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

- Définitions : fonctions bornées, limite en un point
  On s'intéresse à $|f(x) - \ell|$ (module, fonction de X dans $\mathbb{R}$)
- Stabilité opératoire sur les limites
- Définition de la continuité (on peut exploiter les parties réelles et imaginaires)
- De $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$? Oui pour le principe de Weierstrass, Non pour le TVI.

Conclusion

Objectifs

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : Chap 21 - Dérivabilité
- Exercice 404, 408